Ueber die objective Bedeutung des unendlich Kleinen als der philosophischen Grundlage der Differentialrechnung.

Von Prof. Dr. J. Pohle[1]).

Schon bei einem anderen Anlass hatte ich, in Behandlung des Problems vom Unendlichen, die Geschichte des unendlich Kleinen und der Differentialrechnung mit ihren wechselvollen Phasen und Schicksalen einer ausführlichen Betrachtung unterzogen und dabei den Zweck im Auge gehabt, für den Hebel der sachlichen Debatte einen festen Angriffspunkt zu gewinnen und aus der Geschichte, welche eine so gute Lehrmeisterin ist, für die Wissenschaft selbst Nutzen zu ziehen[2]). Aus den friedlichen Hallen der Geschichtsbetrachtung treten wir nunmehr hinaus auf den freien, von Streit widerhallenden Kampfplatz der wissenschaftlichen, positiven Ergebnissen zustrebenden Sacherörterung. Nicht ohne Absicht ist gesagt: auf den Kampfplatz. Denn wir können uns nicht verhehlen, dass die Philosophie gerade in der Frage über die unendlich kleinen Grössen, deren blosser Begriff uns schon eine Welt von Räthseln aufgibt, sich in Fechterrüstung werfen muss, soll sie überhaupt Aussicht auf den Sieg gewinnen, und dass die schwer zu bewältigende Wahrheit hier mehr, wie anderswo, eine geheimnissvolle Tarnkappe trägt, durch die sie sich in dem Augenblick unsichtbar zu machen weiss, in welchem man sie erfasst zu haben glaubt.

---

[1]) Vortrag, gehalten in der „Philosophischen Section" der Görres-Gesellschaft auf der Generalversammlung in Mainz am 6. October 1887.

[2]) Vgl. Katholik, Jahrgang 1881. I. Hälfte, S. 471 ff. Ebendort s. auch eine vorläufige Begriffsbestimmung des unendlich Kleinen.

Unsere nachstehenden Ausführungen massen sich daher nicht an, die äusserst subtile, dornenvolle, seit den Forschungen von Leibniz in der Schwebe befindliche Frage über das Wesen des unendlich Kleinen, und damit über die wissenschaftlichen Grundlagen der Differentialrechnung, einer endgültigen Lösung entgegenführen zu wollen. Nein, sie bescheiden sich mit dem viel geringeren Anspruch, lediglich einer wahrscheinlichen Hypothese das Wort zu reden, die zugleich den noch wenig betretenen Weg weisen soll, wie sich wohl ein freundlicheres Einvernehmen zwischen zwei so eng verschwisterten Wissenschaften, wie Metaphysik und höherer Mathematik, herstellen lassen könnte.

Bisher war dieses Verhältniss ein feindseliges, zum Mindesten aber ein unfreundliches. Oft genug brach der Zwist und Hader in hellen Flammen aus. „Im Alterthum", bemerkt treffend H. Schwarz, „ging die Mathematik mit der Philosophie zusammen und galt gleichsam als eine Vorhalle, welche in das Allerheiligste der Erkenntniss führe" [1]). Von der Neuzeit dagegen darf C. Frantz sagen: „Wenn Kant in den »Metaphysischen Anfangsgründen« zu dieser demüthigen Aeusserung kommt, dass sich die Mathematik der Gemeinschaft mit der Methaphysik nicht schämen möge, so hat im Gegentheil die Philosophie im Bewusstsein ihres weit höheren Wissens sich von der Mathematik gleichgültig, um nicht zu sagen verächtlich abgewandt" [2]). Dass diese unerfreuliche Spannung zwischen zwei Wissenschaften, die in vielen Fragen auf einander angewiesen sind und so viele Berührungspunkte mit einander gemein haben, eine in der Natur der Sache, im Organismus der Wissenschaften begründete sei, kann man schlechterdings nicht sagen. Es liegen nur Missverständnisse und Rechtsverwirrungen vor, welche das natürliche Freundschaftsverhältniss trüben; und im Interesse beider Theile handelt, wer den langjährigen Hauszwist durch einen Vergleich zu beseitigen unternimmt.

Wenn wir nun zunächst, um auf die tiefer liegende Wurzel des Streites zurückzugehen, dem von der Infinitesimalrechnung vorausgesetzten unendlich Kleinen in der Seinsscala eine objective Berechtigung beilegen, so wollen wir dadurch dem öfters

---

[1]) H. Schwarz, Versuch einer Philosophie der Mathem. Halle 1853. S. V.

[2]) C. Frantz, Philosophie der Mathematik. Leipzig 1842. S. III. Vgl. Hist.-polit. Blätter Bd. LXXXVI. S. 282 ff. 1880.

wiederholten Versuch, das unendlich Kleine zu einem blossen Gedankending oder „ens rationis“ zu erniedrigen, energisch in den Weg treten. In einer weiteren Untersuchung, welche einer anderen Stelle vorbehalten bleiben soll, werden wir aber auch die actuale Bestimmtheit desselben gegen jene vielverbreitete Anschauung zu verfechten haben, welche mit unbestimmten, potentialen Grössenbestimmungen auskommen zu können vermeint. Unbekümmert um den möglichen Vorwurf, dass wir Unmögliches zu leisten, Widersprechendes zu vereinbaren, Extreme zu verbinden unternehmen, stellen wir den Doppelsatz auf, dass es wirklich, unabhängig vom erkennenden Verstande, ein unendlich Kleines gibt, und dass dieses unendlich Kleine den Stempel der actualen Bestimmtheit an sich trägt. Weder beruht das „Sein“ desselben auf einer mathemathischen Fiction, vermittelst deren der Verstand ein wesenloses μὴ ὄν sich unter der Maske eines vermeintlichen ὄν vortäuscht; noch schlummert das wirkliche Sein, das wir dem unendlich Kleinen zusprechen zu müssen glauben, im nebelhaften Gebiete einer unfassbaren Potentialität, die nur das Bequeme an sich hat, dass der rastlos verfolgende Geist bei seiner Jagd auf die letzten Elemente stetiger Grössen immer neue Ruhepunkte findet, auf denen er, wie auf gemächlichen Polstern, bequem sich zuvor ausruht, ehe er die niemals endende Hatz wieder fortsetzt.

Während gegen die objective Geltung des unendlich Kleinen weniger erhebliche Bedenken auftauchen, sind die Einwendungen gegen die Actualität desselben freilich um so gewichtiger und zahlreicher. Ist es doch nicht sonderlich schwer einzusehen, dass das unendlich Kleine, nach seinem objectiven „Sein“ betrachtet, weder im abstrahirenden und construirenden Verstand, noch in den existirenden Dingen als solchen seine letzte und adäquate Erklärung finde[1]). Viel schwieriger ist der Versuch, dasselbe auch jenes rein potentialen Charakters zu entkleiden, kraft dessen ihm alle und jede Bestimmtheit mangeln würde. Schon jetzt müssen wir betonen, dass diese Bestimmtheit keinenfalls eine solche sein könne, welche schon an und für sich, d. h. vor jeder, wie immer und wo immer er-

---

[1]) Nur vom Hegel'schen Standpunkt ist es möglich, mit C. Frantz zu sagen: „Der Mathematiker schafft ewige Wahrheiten, denen er selbst durch den Beweis die Ewigkeit gibt; er ist der Herr und Schöpfer seines Allgemeinen“ (a. a. O. S. 112.).

folgenden Bestimmtmachung, gegeben wäre. Denn die Annahme von einer innerlichen Getheiltheit des Stetigen, aus dessen innerster Natur und Anlage ja die unendlich kleinen Grössen zunächst hervorgehen, ist mit so grossen wissenschaftlichen Unzuträglichkeiten behaftet, dass dieselbe ohne Auflösung und Vernichtung des Stetigen selbst nicht aufrecht erhalten werden könnte[1]).

Und dennoch fällt es auf der anderen Seite schwer einzusehen, wie das Stetige dieser gefürchteten Getheiltheit wenigstens im göttlichen Gedanken entgehen könne, weil es einleuchtet, dass ein unendlich vollkommener, allwissender Geist alle möglichen Theilungen und Theile, in die sich das Stetige zerlegen lässt, von Ewigkeit gegenwärtig haben muss. Wenn aber Gott dergestalt das Stetige nicht so fast in seiner Einheit und Ungetheiltheit, als vielmehr in seiner Zerspaltung und Auflösung vor Augen hat, wie könnten wir leugnen, dass das Stetige wenigstens im göttlichen Erkennen in sich selbst zersetzt, zerrissen, wie in Atome verflüchtigt existire? Eine Lösung dieser Schwierigkeit schon an dieser Stelle zu versuchen, wäre verfrüht. Aufgeworfen wurde sie nur, um den Stand der Frage zu klären und festzustellen.

Nur soviel muss zur Rettung der Stetigkeit schon gleich hier hervorgehoben werden, dass die letzten Theilchen (Elemente) des Stetigen, als welche die unendlich kleinen Grössen der Infinitesimalrechnung aufgefasst werden wollen, in beschränktem Sinne allerdings eine Schöpfung des rechnenden Mathematikers sein und bleiben müssen, insofern dieselben nach ihrer formalen Existenzweise nicht eher auftreten können, als bis sie durch Zerlegung des Stetigen wirklich erst gewonnen worden sind. Nicht zwar in dem Sinne, als ob der Mathematiker auch der Schöpfer ihrer Realität wäre, denn diese ist von jeder mathematischen Operation unabhängig und von ihr vorausgesetzt — aber doch in der Weise, dass wirklich der Mathematiker es ist, der durch die Fixirung von Grenzen die unendlich kleinen Grössen aus ihrem natürlichen Verbande im Stetigen herauslöst und, als von Fesseln frei, auf die mathematische Bildfläche hebt. Doch jetzt zur Sache!

Eine auch nur flüchtige Umschau auf dem Gebiete der Differentialrechnung reicht für die Ueberzeugung hin, dass dem unend-

---

[1]) Vgl. Gutberlet, Metaphysik S. 191 ff. Münster 1880. — T. Pesch, Instit. philos. naturalis p. 23 sq. Friburgi 1880.

lich Kleinen objective Gültigkeit in derselben Weise zukomme, wie jeder wirklichen Grösse überhaupt. Wollte Jemand diese (intelligibele) Realität leugnen, so wäre er gezwungen, dasselbe in das Reich der „Gedankendinge“ zu verbannen. Denn das „ens reale“ im Umfange der scholastischen Umgrenzung steht dem „ens rationis“ nicht etwa bloss gleichgültig, sondern gegensätzlich und ausschliessend gegenüber [1]). Unter einem „ens rationis“ oder Gedankending versteht man ein Nichtsein, das der Geist nach Weise des Seins auffasst und dem er positive Eigenschaften beilegt, ohne dass dieselben ihm wirklich zukommen; denn das Nichts hat ja keine Eigenschaften [2]). Es fragt sich nun, ob das unendlich Kleine sich wirklich mit den „entia rationis“ unter Einen Hut bringen lasse; mit anderen Worten, ob dasselbe im Gebiete der Wirklichkeit als ein blosses Nichts figurire, und nur insofern ein „Sein“ für sich beanspruche, als es sich dasselbe vom construirenden und fingirenden Denkgeist erborgt und erschlichen habe. Aber gerade diese Auffassung ist es, welche wir zuerst bekämpfen wollten. Unser erster Beweis für die Realität des unendlich Kleinen gipfelt in einem „Argumentum a minori ad majus“, dem wir der Durchsichtigkeit halber folgende syllogistische Fassung geben.

I.

Argument aus der Betrachtung und Vergleichung der geometrischen Grenzgebilde.

Ohne Zweifel sind Flächen, Linien und Punkte als geometrische Grenzgebilde gefasst, keine blossen entia rationis, sondern objectiv gegebene Dinge. Nun kömmt aber dem unendlich Kleinen ein viel höheres Mass von Realität zu, als den genannten Grenzgebilden. Folglich besitzt das unendlich Kleine a fortiori Realität.

Wir beginnen mit der Erläuterung und Begründung zunächst des Obersatzes. Obschon mit eines der dunkelsten Probleme der

---

1) Cf. S. Thom. Quodlib. 8. qu. 1. art. 1. Vergl. Gutberlet, Logik und Erkenntnisstheorie S. 215 f. Münster 1882.

2) Der h. Thomas von Aquin beschreibt das Zustandekommen des ens rationis also: „Intellectus nititur apprehendere quod non est et ideo fingit illud aliquo modo ut ens“ (Opuscul. 42. cap. I.). Eine ausgeführte Theorie des ens rationis s. bei Suarez, Met. Disputt. LIV. Sect. 1. und bei Goudin, Philos. thomistica P. IV. Qu. IV. art. V. Append. (ed. Matrit. 1782. Tom. IV. p. 307 squ.)

Philosophie, so hat die Lehre von der objectiven Bedeutung der Grenzgebilde dennoch nur wenige ernstliche Widersacher gefunden. Schon die Scholastik hatte die Frage eingehend und erschöpfend behandelt, am eingehendsten und erschöpfendsten Franz Suarez. Nach dessen Zeugniss gab es nur drei Scholastiker, nicht einmal von bedeutendem Rufe oder hervorragendem Wissen, welche die Flächen, Linien und Punkte zu blossen Verneinungen, und folglich zu entia rationis herabwürdigten. Es waren dies Durandus, Occam und Gregor von Rimini [1]. Den Gedankengang des an erster Stelle genannten Gelehrten hat wohl der berühmte Aristoteliker Fonseca auf den kürzesten Ausdruck gebracht, wenn er bemerkt: „Vult enim (Durandus) punctum nihil aliud esse quam negationem ulterioris longitudinis, lineam ulterioris latitudinis, superficiem ulterioris profunditatis seu crassitudinis“ [2]. In neuerer Zeit scheint Herbart sich die Flächen nach der Art des Durandus gedacht zu haben. „Es ist uns unmöglich“, schreibt er, „die Körper für blosse Oberflächen zu halten, denn sie erscheinen uns als Etwas, das Erscheinende aber ist positiv bestimmt. Unter einer Fläche dagegen verstehen wir eine blosse Grenze, die sich nur durch Negation denken lässt“ [3]. Geht man indess der Betrachtungsweise dieser Gelehrten näher auf den Grund, so findet man bald die Quelle, woraus ihre irrthümliche Anschauung entspringt.

---

[1] Suarez, Met. Disputt. XL. Sect. V. ed. Mogunt. Tom. II. pag. 382. — Gegen diejenigen Scholastiker, welche die Grenzgebilde oder (in ihrer Sprache) die „Indivisibilia mathematica“ (Flächen, Linien, Punkte) nur in potentia existiren liesen, bemerkt Suarez mit Recht: „Sed inquirendum restat ab his, an haec potentia possit aliquo modo ad realem actum reduci: nam si non potest, quomodo verum est esse in continuo indivisibila etiam in potentia? Si vero potest, quando aut quomodo illa potentia reducetur in actum? Respondebunt, ut opinor, illam potentiam non posse esse realem, quia ipsamet indivisibilia censent non esse entia realia, sed meras privationes: quia vero a nobis concipiuntur ad modum entium positivorum, ideo ipsum etiam continuum concipi ut existens in potentia ad indivisibilia, quae in infinitum ex eo resultare possunt. Sed si aperte loquendum est, hoc nihil est aliud quam dicere, haec indivisibilia esse entia rationis et in continuo esse aliquod fundamentum, ut concipi aut fingi possint. Quod esse alienum a mente auctorum sic loquentium, satis per se est evidens“ (l. c. n. 28). Er selbst gibt die Potentialität nur zu „quoad realem divisionem, non quoad realem existentiam (l. c. n. 34). Cf. Pererius, De rer. princip. Lib. X. cap. V.

[2] Fonseca, Comment. in Met. Aristot. ed. Francof. 1599. Tom. II. col. 674.

[3] Herbart, SS. WW. Herausgegeben von Hartenstein Bd. I. S. 178. Leipzig 1850.

So richtig es ist, dass der abstrahirende Verstand bei der begrifflichen Bearbeitung eines Körpers sehr viel mit Beschränkungen, Aufhebungen und Verneinungen hantirt, ebenso falsch ist es, dass diese Betrachtungsweise nur Negationen enthalte oder gar in Negationen vollends aufgehe. Mit Nichten. Was der Verstand bei der Begriffsbildung der Linie wegdenkt, ist ja nicht die Linie selbst, sondern etwas ihr Fremdes und Aeusserliches, nämlich die zweite und dritte Ausdehnung, nach deren Abstreifung erst die Linie in ihrer unverhüllten Gestalt zum Vorschein kommt. Durch Entfernung eines dem Begriffe Fremden und Aeusserlichen wird aber dieser selbst so wenig in Negation aufgelöst, dass vielmehr gerade der übrig gelassene Begriffsrest, der ohne Aufhebung des ganzen Denkinhaltes nicht selbst auch hinweggedacht werden kann, die grundlegenden Wesensmerkmale liefert. Trotz allen Abstrahirens und Negirens bleibt mithin die Linie eine positive Dimension, gleichwie auch die Fläche ihre zweidimensionale Realität behält, ob zwar der Geist durch Aufhebung der Tiefenabmessung zu ihrem Begriffe gelangt ist.

Uebrigens steht für die objective Realität der Grenzgebilde die realste, positivste und sicherste aller exacten Wissenschaften sozusagen mit ihrem Blut und Leben ein: ich meine die Geometrie. Wir sind die objective Geltung dieser Wissenschaft in einem Masse anzuerkennen gewöhnt, dass wir ihre Sätze und Ergebnisse an die physikalische Erscheinungswelt unbedenklich wie einen unfehlbaren, nie versagenden Massstab anlegen und eher an Sinnestäuschungen oder Rechenfehler glauben, als die Richtigkeit eines ihrer Sätze bezweifeln. Durch Verwerfung der Realität von Flächen, Linien und Punkten aber würde die Geometrie nicht nur etwa in ihren tiefsten und festesten Grundlagen erschüttert, sie würde auch geradezu aus ihren innersten Wurzeln gehoben, ja vernichtet. Die ebene Geometrie hat es insbesondere mit Linien und Flächen zu thun. Wären nun diese nichts weiter als blosse Verneinungen, entspräche denselben kein gleichwerthiges Substrat in der Aussenwelt, so müssten wir uns zur ungeheuerlichen Behauptung versteigen, dass die genaueste und sicherste aller Wissenschaften sich ihr eigenes Formalobject selber erst vorlöge und aus der unverlässigen Traumstätte einer unbändigen Einbildungskraft hervorholte. Eine solche Behauptung aber widerlegt sich wohl selbst. Mit Recht wiesen daher die Scholastiker zum Erweise der Realität von Punkt und Linie auf den bekannten Satz des Euklides hin, dass eine Kugel eine gegebene Fläche nur in einem Punkte, ein Cylinder aber nur in einer Linie berühren könne (Euclid. Element. III, 16). Wie aber die Berührung keine Einbildung sei, so müsse auch das, worin und wodurch der Contact seine Vermittelung finde, dem Gebiete der Wirklichkeit angehören[1]). Diese Beweisführung erscheint so überzeugend und schlagend, dass sie auch heute von ihrer Kraft noch nichts eingebüsst hat. Neuere Entdeckungen auf dem Gebiete der Mathematik stehen dieser Anschauung nur scheinbar im Wege.

Mit einem gewissen Schein von Berechtigung nämlich liesse sich gegen die Realität der abgehandelten Grenzgebilde höchstens die neueste, von Gauss und Lobatschewski entdeckte, von den Gebrüdern Lolyai weiter ausgebildete sog. „imaginäre Geometrie" als Sturmbock ins Feld führen. Was lehrt und will denn diese neue Geometrie? Von der paradoxen Voraussetzung ausgehend, dass die Winkelsumme eines ebenen Dreiecks kleiner sei als 2R, führt dieselbe widerspruchsfrei ein förmliches System von Lehrsätzen durch, die unseren thatsächlichen Raumverhältnissen und Raumanschauungen stracks ins Gesicht schlagen. Zudem erhebt sie den Anspruch auf grössere Allgemeinheit und Voraussetzungslosigkeit, da die sog. „Euklidische Geometrie", welche unseren ebenen Raum, sowie er ist, zur Voraussetzung hat, wie ein Specialfall im allgemeinen Gesetz in ihr enthalten sei[2]). Aus der widerspruchsfreien Durchführbarkeit einer solchen unserem Raum widersprechenden Geometrie schliessen, unter Zuhülfenahme anderweitiger Beweismittel, unsere modernen Raumtheoretiker Riemann, Helmholz, Benno Erdmann, Fr. Zöllner u. A. auf die Möglichkeit, ja Thatsächlichkeit anders gearteter Räume, als unser

[1]) Cf. Suarez, l. c. Tom. II. p. 382. „Respondent aliqui (fährt Suarez fort) non posse esse realem contactum inter huismodi corpora (Ebene und Kugel). Sed hoc tam est per se incredibile, ut nulla indigeat confutatione." Zu der erwähnten „unglaublichen" Ausflucht hatte u. A. sein Lehrer Fonseca gegriffen, aber nur nach Weise eines Zweifels: „Dici quoque fortasse potest etc." (l. c.)

[2]) Näheres in meiner diesbezüglichen Abhandlung im „Literarischen Handweiser" 1881. No. 298. 299. Vergl. Briefwechsel zwischen Gauss und Schuhmacher V, 247. 269. — Crelle's Journal für Mathematik 1837. XVIII, 295. Frischauf, Absolute Geometrie nach Joh. Bolyai, Leipzig 1872. Von Schweighardt wird die „imaginäre Geometrie" die „Astralgeometrie", von Schmitz-Dumont aber „Pangeometrie" genannt.

empirischer, ungekrümmter, ebener Raum ist, den sie zur Unterscheidung von jenen speciell den „Euklidischen Raum“ nennen. Dass der empirisch gegebene oder Euklidische Raum ein solcher ebener Raum sei, in welchem die Winkelsumme eines Dreiecks weder über, noch unter zwei Rechten liege, das wird bereitwilligst als eine Erfahrungsthatsache eingeräumt. Geleugnet wird dagegen entschieden, dass dem auch a priori so sein müsse. Unser Raum, für den faktisch die Euklidische Geometrie Geltung hat, schliesst die Möglichkeit anders gearteter Räume so wenig aus, dass es ganz gut auch gekrümmte Räume von bestimmtem Krümmungsmass, und Räume von mehr als drei Abmessungen geben kann.

Dass indess mit derartigen Aufstellungen einer Willkür Thür und Thor geöffnet wird, in welcher eine orientalische Einbildungskraft sich allerdings behaglich fühlen mag, liegt auf der Hand. Eine Widerlegung der modernen Raumtheorie und ihrer metageometrischen Voraussetzungen zu liefern, ist nicht dieses Ortes; sie ist schon von Anderen mit Glück versucht und, im grossen Ganzen, auch siegreich durchgeführt worden[1]). Unsere Aufgabe besteht an dieser Stelle nur darin, mit Nachdruck hervorzuheben, dass weder die neue Raumtheorie, noch die ihr zum Grunde gelegte sog. „imaginäre Geometrie“ die von uns verfochtene Realität der geometrischen Grenzgebilde in irgend welcher Weise bedroht. Was könnte eine solche allgemeinere, voraussetzungslose, vom Euklidischen Raum theoretisch hinwegsehende Geometrie im Grunde auch bedeuten? Doch nicht, dass sie die Euklidischen Flächen und Linien zu blossen Hirngespinnsten herabdrückte! Im besten Falle bekämen wir nur einen Zuwachs von bislang unbekannten Raumgrössen und Raumverhältnissen; einen Umsturz der alten und bekannten brächte sie uns gewiss nicht. Gesetzt auch, die imaginäre Geometrie enthielte das allgemeine Gesetz, von dem die Euklidische Geometrie nur einen Specialfall bildete, so müsste doch der Specialfall die gleiche objective Berechtigung beanspruchen, wie das allgemeine Gesetz, in welchem er wurzelte und unter welchem er befasst wäre. Der reale Seinscharakter der „Indivisibilien“ würde davon nicht berührt.

---

[1]) Vgl. v. Hertling, Bericht der Görresgesellschaft 1877. S. 35 ff. Gutberlet, Die neue Raumtheorie, Mainz 1882 u. a. m.

Man könnte uns nun freilich die von Beltrami entdeckten sog. „pseudosphärischen Flächen“ triumphirend entgegenhalten und aus dem imaginären Charakter derselben auf den imaginären Charakter der Flächen überhaupt einen Schluss ziehen. Es sind dies äusserst merkwürdige Flächen von einer solchen Beschaffenheit, dass sie sich in unserem ebenen Raum in ihrer Totalität gar nicht aufwickeln und darstellen lassen. „Die Pseudosphäre“, so führt Helmholtz des Näheren aus, „ist eine sattelförmige Fläche, von der in unserem Raum nur begrenzte Stücke oder Streifen zusammenhängend dargestellt werden können, die man aber doch nach allen Seiten sich ins Unendliche fortgesetzt denken kann. Das verschobene Flächenstück muss dabei seine Biegung, aber nicht seine Dimensionen ändern, gerade so wie man auf einem durch dütenförmiges Zusammenrollen einer Ebene entstandenen Kegel ein Papierblatt hin- und herschieben kann. Ein solches passt sich der Kegelfläche überall an, aber muss der Spitze des Kegels näher stärker gebogen werden, und kann über die Spitze hinaus nicht so verschoben werden, dass es dem existirenden Kegel und seiner idealen Fortsetzung jenseits der Spitze angepasst bliebe. Wie die Ebene und die Kugel, sind die pseudosphärischen Flächen von constanter Krümmung, so dass sich jedes Stück derselben an jede andere Stelle der Fläche vollkommen anschliessend anlegen kann, und also alle an einem Ort der Fläche construirten Figuren an jeden anderen Ort in vollkommen congruenter Form und mit vollkommener Gleichheit aller in der Fläche selbst liegenden Dimensionen übertragen werden können. Das von Gauss aufgestellte Mass der Krümmung, was für die Kugel positiv und für die Ebene gleich Null ist, würde für die pseudosphärischen Flächen einen constanten negativen Werth haben, weil die beiden Hauptkrümmungen einer sattelförmigen Fläche ihre Concavität nach entgegengesetzten Seiten kehren. — Ein Streifen einer pseudosphärischen Fläche kann zum Beispiel aufgewickelt als Oberfläche eines Ringes dargestellt werden. . . Auch zu einem kelchförmigen Champagnerglase mit unendlich verlängertem, immer dünner werdendem Stile könnte eine Hälfte einer pseudosphärischen Fläche aufgewickelt werden. Aber an einer Seite ist sie nothwendig immer durch einen scharf abbrechenden Rand begrenzt, über den hinaus eine continuirliche Fortsetzung der Fläche nicht unmittelbar ausgeführt werden kann. Nur dadurch, dass man jedes einzelne Stück des Randes losgeschnitten und längs der Fläche des Ringes oder

Kelchglases verschoben denkt, kann man es zu Stellen von anderer Biegung bringen, an denen weitere Fortsetzung dieses Flächenstücks möglich ist"[1]). So weit Helmholtz.

Es möchte nun den Anschein gewinnen, als ob in der Abnormität der pseudosphärischen Gebilde, wie sie eben zur Darstellung gelangten, sich ihr imaginärer Charakter von selbst deutlich verrathe. Was sollten nun aber die Euklidischen Flächen, mit dem constanten Krümmungsmass = 0, vor den pseudosphärischen voraus haben? Müsste nicht auch ihre Realität, mit der metaphysischen Sonde geprüft, in Nichts zerfliessen, uns unter den Händen zerrinnen?

Indess eine unbefangene Würdigung aller in Betracht kommenden Verhältnisse zeigt gar bald, dass die schöne Entdeckung Beltrami's alles Andere als einen jähen Sturz der Euklidischen Geometrie oder gar der geometrischen Grenzgebilde bedingt. Gesetzt sogar den unwirklichen Fall, dass die pseudosphärischen Flächen durch und durch auf Fiction des Geistes beruhten, so könnten doch die Euklidischen Gebilde dadurch in den imaginären Process nicht mitverwickelt werden. Diese haben mit jenen an und für sich nichts zu thun. Jahrtausende lang war die Euklidische Geometrie als festgefügtes System schon ausgebildet, als die Pseudosphäre entdeckt wurde; die neue Entdeckung an sich aber ist doch nicht im Stande, durch das uralte festgemauerte Gebäude einen Riss zu ziehen, geschweige dessen Fundamente zu verschütten. So wenig den reellen Zahlen von Seiten der erst später entdeckten imaginären Zahlen Gefahr drohte, ebenso wenig vermag die Pseudosphäre die Realität der Euklidischen Grenzgebilde ins Wanken und zu Falle zu bringen. Doch es ist weiterhin gänzlich falsch, dass die Beltrami'schen Flächen, die der Euklidischen Geometrie als einer exacten Wissenschaft gefährlich werden sollen, eine blosse Fiction im Sinne eines Gedankendinges oder „ens rationis" seien. Man hat ja von ihnen analoge Sätze bewiesen, wie von ebenen und kugelflächigen Figuren, so z. B. dass die Winkelsumme eines pseudosphärischen Dreiecks stets kleiner ist als 2 R., dass die Geradeste zwischen zwei Punkten zugleich auch

---

[1]) H. v. Helmholtz, Vorträge und Reden, Bd. II. S. 11—14. Braunschweig 1884. Cf. Beltrami, Saggio d'interpretazione della Geometria non-Euclidea, Napoli 1868; vergl. Benno Erdmann, Axiome der Geometrie S. 55 ff. Leipzig 1877. — Gauss, Disquisitt. generales circa superficies curvas. Comment. Societ. reg. scientiar. Goetting. 1828. Tom. VI. p. 99 squ.

(wie in der Ebene) die kürzeste Linie ist u. s. w. Ein bloss gedachtes Etwas, ein Nichts könnte solche positive Eigenschaften nicht an sich tragen. Die Pseudosphäre ist darum ein durchaus reales Gebilde, und als solches Gegenstand wissenschaftlicher Betrachtung.

Auch ist es eine blosse Täuschung zu glauben, die Pseudosphäre stehe mit dem Euklidischen (Erfahrungs-) Raum in wirklichem Widerspruch, lasse sich folglich nur als eine Fiction des Geistes, als ein „ens rationis" begreifen. Mit Nichten. Wer so argumentirt, der vergisst, dass die Pseudosphäre eine blosse Fläche ist, die trotz ihrer abnormen Eigenschaften mit dem dreidimensionalen Raum gerade so wenig in Conflict gerathen kann, wie jede beliebige andere Fläche. Wer hätte jemals die Kugel- oder Eifläche zu einem imaginären, dem Euklidischen Raum widersprechenden Gebilde deshalb umzustempeln gewagt, weil weder die eine noch die andere sich „zusammenhängend im Raume darstellen" oder auf einer Ebene glatt abwickeln lässt, wie dies doch mit einem Kegelmantel oder einer Cylinderfläche gelingt? Ueberhaupt findet das Krümmungsmass, nach den grundlegenden Untersuchungen von Gauss, ausschliesslich auf (gekrümmte) Flächen Anwendung, und in der kritiklosen Uebertragung des Krümmungsmasses auf den Raum, auf dessen Leib es doch von Hause aus gar nicht zugeschnitten war, erblicken wir eine unberechtigte *ἀνάβασις εἰς ἄλλο γένος*, die zugleich als das *πρῶτον ψεῦδος* der ganzen Riemann-Helmholtz'schen Raumtheorie bezeichnet werden muss.

Von welcher Seite immer wir also die geometrischen Grenzgebilde betrachten mögen, ihre Realität und objective Geltung ausserhalb unserer (subjectiven) Anschauung ruht auf Grundlagen so fest und so stark, dass der heftigste Anprall nicht im Stande sein wird, dieselben jemals aus den Fugen zu heben. Und hiermit hätten wir die Vertheidigung des Obersatzes unseres anfänglichen Syllogismus durch alle Instanzen hindurch fortgeführt und zu einem siegreichen Ende gebracht.

Was nun weiter den Untersatz anbetrifft, so dürfen wir uns kürzer fassen. Es wurde darin behauptet, dass dem unendlich Kleinen ein höheres Mass von Realität zukomme, wie den Grenzgebilden. Prüft man den Seinsgehalt der unendlich kleinen Grössen mit dem Massstab der geometrischen Grenzgebilde, so stellt sich für jene ein grösserer Gehalt heraus, als für diese. Und in der That: das Mass von Sein wird am sichersten aus der Höhe der

Leistung erschlossen, für welche ein Ding sich als befähigt erweist, wie aus dem bekannten Axiom erhellt: „Operari sequitur esse“ [1]). Die höhere Leistungsfähigkeit des unendlich Kleinen springt aber in die Augen, wenn man erwägt, welche Rolle dasselbe in der Zusammensetzung des Stetigen spielt. Die unendlich kleinen Grössen, als Elemente des Stetigen, sind die natürlichen Vermittler und Träger bei der inneren Zusammensetzung und Ineinsfügung der Theile, aus denen das Stetige resultirt. Wohl durch Häufung von unendlich kleinen Grössen, nicht aber von Grenzgebilden lässt sich Stetiges erzielen. Man setze noch so viele Linien neben oder aneinander, niemals wird kraft dieser Operation eine Fläche herauskommen; denn immer wird, in Folge ihrer Ausdehnungslosigkeit, Linie um Linie in genauester Deckung in sich selbst aufgehen. Das Gleiche gilt vom Punkt und von der Fläche, wenn es sich darum handelt, durch blosse Zusammensetzung daraus eine Linie oder einen Körper zu erzeugen.

Eine andere Bewandtniss hat es hingegen mit dem unendlich Kleinen. Gleichwie z. B. eine Fläche durch stetiges Theilen sich schliesslich in lauter unendlich kleine Flächen-Differentiale auflösen lässt — gleichviel ob letztere als potentiale oder als actuale Grössen gefasst werden — so lässt sich umgekehrt aus den also gewonnenen Flächen-Elementen die ursprüngliche Fläche rückwärts wieder zusammensetzen. Auf dieser letzteren Operation ist die ganze Integralrechnung in dem Sinne, wie Leibniz sie verstand, aufgebaut. Die unendlich kleinen Grössen sind, als die zusammensetzenden Elemente des Stetigen, darum gerade so real, wie das Stetige selbst. Dieser bedeutende Vorsprung nun, den das unendlich Kleine vor den geometrischen Grenzgebilden hat, gestattet einen berechtigten Schluss auf seinen grösseren Gehalt an Realität, der sich — wie eben gezeigt — aus seiner grösseren Leistungsfähigkeit unmittelbar ergibt.

Damit ist aber die von Anfang an bekämpfte Anschauung, welche im unendlich Kleinen nur eine mathematische Fiction, ein Gedankending, ein „ens rationis“, einen imaginären Begriff u. dgl. erblicken wollte, endgültig ausgeschlossen.

---

[1]) Cf. S. Theol. 1. p. qu. XII. art. 4. c. — Reeb, Thesaur. philos. ed. Cornoldi. p. 291. Paris. 1875.

II.

Argument aus der Betrachtung der verschiedenen Klassen von Gedankendingen.

Indessen sind die Schwierigkeiten, welche der Geist in der begrifflichen Wesenheit des unendlich Kleinen von jeher empfand, zu gross, die Ausflüchte und Versuche, welche auf eine völlige Ausschliessung dieser „räthselhaften Grössen“ aus unserer ganzen Begriffswelt ausgehen, zu zahlreich und verfänglich, als dass wir nicht durch ein tieferes Eingehen auf den ganzen Umfang dessen, was im Begriffe eines Gedankendinges liegt, sowie durch eine vollständige Ausschliessung aller denkbaren Deutungen und Auswege suchen sollten, ein neues Argument zu Gunsten der Realität des unendlich Kleinen zu gewinnen. Um systematisch zu Werke zu gehen, so ist vor Allem aus der Ontologie als bekannt vorauszusetzen, dass das Gebiet der „entia rationis“ sich in drei verschiedene Gruppen gliedert: 1) Negationen (z. B. Finsterniss, Nacht) und Privationen (z. B. Blindheit, Dummheit); 2) unmögliche Begriffe (z. B. viereckiger Kreis, körperlicher Geist) und imaginäre Zahlen (z. B. $\sqrt{-1}$); 3) logische Unterscheidungen (z. B. zwischen Sokrates und Mensch) und logische Beziehungen (z. B. des Prädicats zum Subject, der Gattung zur Art etc.)[1]. Es entsteht die Frage: Lässt sich das unendlich Kleine unter einer dieser drei Kategorien von entia rationis unterbringen? Untersuchen wir die Sache im Einzelnen.

Den Beweis, dass die unendlich kleinen Grössen nicht in blossen Negationen und Privationen bestehen können, haben wir eigentlich schon im Verlaufe der vorausgehenden Erörterungen vorweggenommen. Mit Nichts lässt sich eben nichts anfangen, also auch nicht rechnen. Wo die Mathematik trotzdem mit Nullen rechnet, da sind dieselben entweder keine absoluten oder wirklichen Nullen, oder aber, wo sie es sind, keine unendlich kleinen Grössen[2].

---

[1]) Vergl. Gutberlet, Metaphysik S. 7. Münster 1880; cf. S. Schiffini, Principia philosophica ad mentem Aquinatis p. 441 squ. Augustae Taurinor. 1886; vergl. Commer, System der Philosophie I. 36. ff. Münster 1883.

[2]) Beispiele s. bei Lübsen, Einleitung in die Infinitesimal-Rechnung S. 87—95. Leipzig 1862.

Ob sich das unendlich Kleine aber auch der Eingliederung in die zweite Klasse der entia rationis, welche die unmöglichen Ideen und imaginären Zahlen umfasst, ebenso hartnäckig widersetze, das könnte auf den ersten Blick zweifelhaft erscheinen. In der That sehen wir den grossen Leibniz unter den vielen Auswegen, die er bei seinem steten Hin- und Herschwanken aufsuchte, um dem schwierigen Begriff dieser geheimnissvollen Grössen zu entrinnen, auch zu dieser Ausflucht greifen, dass er die unendlich kleinen (Infinitesimal-) Grössen kurzer Hand auf gleiche Stufe mit den imaginären Grössen stellt. Hören wir ihn selbst. Er schreibt: „Si omnino ultimum aliquod vel saltem rigorose infinitum quis intelligat, potest hoc facere, etsi controversiam de realitate extensorum aut generatim continuorum infinitorum aut infinite parvorum non decidat, imo etsi talia impossibilia putet: suffecerit enim in calculo utiliter adhiberi, ut imaginarias radices magno fructu adhibent Algebristae"[1]. Leibnizens Vorschlag, der auf eine so leichte und einfache Weise allen metaphysischen Schwierigkeiten aus dem Wege zu gehen scheint, hat allerdings etwas Verführerisches an sich, wenn man die grossen Erfolge betrachtet, die der Mathematik aus der Einführung der „imaginären" Zahlen und „falschen" Wurzelgrössen erwuchsen. Wem es in der That gelänge, unter Umgehung des Unendlichkeitsbegriffes die wissenschaftlichen Grundlagen der Differential- und Integralrechnung zu legen, die grossartigen, zu tiefem Staunen hinreissenden Ergebnisse derselben durch eine andere haltbare Deutung der Differentiale zu erklären und so das unendlich Kleine gegen ein wesenloses Schemen, ein blosses Gedankending, eine „nützliche Fiction", eine imaginäre Grösse u. dgl. umzutauschen: Dem wäre der Dank aller Philosophen und Mathematiker sicher. Aber die Zauberformel ist noch immer zu finden, welche die hartnäckig an ihrem Dasein festhaltenden Differentiale in das Schattenreich der „entia rationis" verwiese. Um dieses schwierige Unternehmen wirksam zu fördern, müsste die Axt doch viel tiefer angelegt werden, als Leibniz thut. Mit der blossen Berufung auf die „falschen Wurzeln" und „imaginären Zahlen" ist die Sache sicher

[1]) In der „Historia et origo calculi differentialis a. G. G. Leibnitio conscripta" Append. p. 13. Herausgeg. von Dr. Gerhardt Hannover 1846. Vergl. Leibniz, Philosophische Schriften, Ausg. von Erdmann S. 436; Baumann, die Lehren von Raum, Zeit und Mathematik in der neueren Philosophie Bd. II. S. 47 ff. Berlin 1869.

nicht abgethan. Denn noch immer bliebe die ärgerliche Frage zu erledigen: Sind denn die „falschen“ Wurzelgrössen, die „imaginären“ Zahlen der Algebristen wirklich unmögliche Begriffe, welche, aus unverträglichen Begriffsmerkmalen zusammengesetzt, wie sie sind, an einem unheilbaren inneren Widerspruch kranken? Sind sie Phantome, Hirngespinnste? Aber wenn man dies im Ernste behauptet, wie ist es denkbar, mit widersprechenden Begriffen völlig widerspruchsfreie Ergebnisse von erstaunlicher Genauigkeit und Fruchtbarkeit zu erzielen? Dass aus falschen Prämissen zuweilen per accidens ein richtiger Schlusssatz sich ergibt, lässt sich begreifen. Aber ist es nicht selbst ein heller Widerspruch, vermittelst der Combination von unsinnigen Begriffen zu Sinn und Ordnung, auf dem Wege des Widerspruchs, der „methaphysischen Lüge“, zur objectiven Wahrheit zu gelangen?

Der Mathematikerfürst Gauss hat auf diese und ähnliche Fragen die schlagendste Antwort gegeben. Aus seinen scharfsinnigen Untersuchungen über die Zahlen-Metaphysik geht unwiderleglich hervor, dass die imaginären Wurzelgrössen einen sehr vernünftigen, realen Untergrund aufweisen. Mit einem Wort: er hat das Scheingewebe der sog. „imaginären Grössen“ durchlöchert und hinweggefegt, indem er ihnen ein reales Substrat anwies. „Die ersten Algebristen“, bemerkt er selbst, „nannten noch die negativen Wurzeln der Gleichung ‚falsche Wurzeln‘ . . . Allein so wenig man in der allgemeinen Arithmetik Bedenken hat, die gebrochenen Zahlen mit aufzunehmen, obgleich es sehr viele zählbaren Dinge gibt, wobei eine Bruchzahl ohne Sinn ist, ebenso wenig durften in jener den negativen Zahlen gleiche Rechte mit den positiven deshalb versagt werden, weil unzählige Dinge kein Entgegengesetztes zulassen. Die Realität der negativen Zahlen ist hinreichend gerechtfertigt, da sie in unzähligen anderen Fällen ein adäquates Substrat finden. Allein die den reellen Grössen gegenübergestellten imaginären . . . sind noch immer weniger eingebürgert als nur geduldet, und erscheinen also mehr wie ein an sich inhaltleeres Zeichenspiel, dem man ein denkbares Substrat unbedingt abspricht“ [1]). Indem nun Gauss dazu übergeht, in höchst scharfsinniger Darlegung den ebenfalls reellen Gehalt der imaginären Zahlen zu erweisen, gelingt es

[1]) Gauss in den „Göttinger gelehrten Anzeigen“ 1836 bei Lübsen, Lehrbuch der Analysis S. 85 ff, Hamburg 1860.

ihm, in dem Ausdruck $\sqrt{-1}$ eine ganz neue Art von „Einheit“ zu entdecken, welche neben der positiven Einheit (+ 1) und der negativen Einheit (— 1) ebenbürtig dasteht und gerade so reell ist, wie beide. Er nennt dieselbe aus Gründen, die hier nicht weiter erörtert werden können, die „laterale Einheit“ und bestimmt ihr Verhältniss zur „directen“ (positiven) und „inversen“ (negativen) Einheit dahin, dass sie zwischen beiden letzteren die mittlere Proportionale bilde. Wenn nun aber einmal die Täuschung zerstreut ist, dass man die „imaginären Zahlen“ lediglich als ein „inhaltsleeres Zeichenspiel“, als ein mathematisches Spielzeug behandeln könne, so muss noch viel mehr die verhängnissvollere Anschauung fallen gelassen werden, als ob das unendlich Kleine nur eine Ausgeburt des mathematischen Gehirns, ein lehrreiches Belustigungsmittel des höheren Calcüls sei. Wir gehen sogar noch einen Schritt weiter und sagen: Auch wenn es Gauss nicht geglückt wäre, die Illusion der imaginären Grössen zu zerstören, so bliebe dennoch in Betreff der unendlich kleinen Grössen (Differentiale) die Zulässigkeit und Anwendbarkeit jener Benennung absolut ausgeschlossen. Denn da die wesentliche Aufgabe des unendlich Kleinen darin besteht, die innere Constitution des Stetigen zu vermitteln, so müssen die letzten Elemente, aus denen ein Kreisbogen, ein Sinus, eine Tangente etc. sich zusammensetzt, von derselben wesentlichen Beschaffenheit sein, wie das Ganze selbst [1]). Ist aber dieses reell, so können seine Bestandtheile nicht „imaginär“ sein. „Gibt man einmal zu“, bemerkt Lübsen, „dass ein Mensch wirklich sterbe, mithin seine Lebenszeit ganz verleben kann, so muss man auch zugeben, dass das letzte Glied seiner Lebensprogression (Grenze) eine wirklich untheilbare Grösse (ein Hauch, ein Augenblick) ist .... Dass ein solches Gedankending etwas unpassend noch Grösse genannt wird, wird Der entschuldigen, der für diese übersinnliche Vorstellung keinen besseren Ausdruck weiss“ [2]). Wenn Lübsen zwar in der soeben angeführten Stelle die Bezeichnung „Gedankending“ gebraucht, so versteht er, wie aus dem Zusammenhang hervorgeht, darunter kein „ens rationis“ in dem Sinne, wie wir es von Anfang an bekämpften. Es ist ein „Gedankending“ im Sinne von „übersinnlichem Sein“, mithin ein wirkliches, obgleich nur vom Verstande auffassbares Sein; eine zwar „unangebbare

---

[1]) Vgl. Wenck, Grundlehren der höheren Analysis, S. 154 ff. Leipzig 1872.

[2]) Lübsen, Ausführliches Lehrbuch der Arithmetik und Algebra S. 251. Leipzig 1869.

Grösse", aber darum doch immer noch „Etwas" innerhalb der Kategorie der Grösse [1]). Mit Recht schliesst deshalb J. J. Littrow, dass man die unendlich kleinen Grössen „nicht, wie Manche glauben, als blosse Einbildungen betrachten kann, die sich die Geometer zu ihren Untersuchungen ausgedacht haben" [2]).

Lassen sich die unendlich kleinen Grössen endlich vielleicht in die dritte Kategorie der entia rationis, welche die logischen Beziehungen uud Unterscheidungen umfasst, mühelos eingliedern? Logische Beziehungen und Unterscheidungen sind solche, welche nur der Geist setzt, welche also in den Dingen selbst, vor dem Denken, nicht vorhanden sind. Beziehungen und Unterscheidungen, die unabhängig vom denkenden Geiste in den Dingen zu Recht bestehen, und darum von diesem beim Denkact als schon vorhanden vorgefunden werden, sind eben keine logischen, sondern reale Beziehungen und Unterschiede. Nicht diese letzteren, sondern nur erstere gehören zu den „entia rationis." Wenn nun Klügel die Differentiale als „die nur unter sich vergleichbaren unendlich kleinen Unterschiede einer stetigen Reihe" definirt [3]), so könnte man auf den Einfall gerathen, das unendlich Kleine auf die Kategorie der logischen Beziehungen und Unterscheidungen zurückzuführen. Denn es bleibt ja immer wahr, dass in letzter Instanz der Geist des Mathematikers es ist, der jene unendlich kleinen Unterschiede setzt, dass also ohne jene Bezugsetzung des Geistes, kraft welcher die Grenzen fixirt werden, solche Unterschiede nicht existirten. Und in der That, wären dieselben schon von Haus aus, also vor allem Denken, gegeben, so wäre nicht abzusehen, wie wir an jener inneren Getheiltheit und Zerrissenheit des Stetigen vorbeikämen, gegen die wir uns Eingangs dieser Untersuchung so entschieden verwahren zu sollen glaubten. Was fehlt also dem unendlich Kleinen noch zu einem „ens rationis"?

Hierauf lässt sich Manches erwiedern. Fürs Erste muss betont werden, dass dem Stetigen mit Beziehung auf den Geist, der darin unendlich kleine Unterschiede entdeckt, eine privilegirte Ausnahmestellung zukommt. „Die stetige Grösse", so bemerkt treffend Gutberlet, „hat das Eigenthümliche, welche kein anderes Ganze mit

---

[1]) Vgl. Lübsen, Einleitung in die Infinitesimalrechnung S. 60. Leipzig 1862.
[2]) J. J. Littrow, Anleitung zur höheren Mathematik S. 43. Wien 1836.
[3]) Klügel, Mathematisches Wörterbuch I. 815. Leipzig 1802.

ihr gemein hat, dass die potentialen Theile, die sie virtuell in sich enthält, durch den blossen Gedanken, d. h. durch blosse mentale Fixirung einer Grenze in ihr, in actuale Theile zerlegt werden" [1]). Der Geist vermag mithin in unserem Falle Theile zu setzen, ohne diese Theile zu machen; er trägt nichts von dem Seinigen hinein, indem er sich zu denselben in Denkbeziehung setzt. Nur die Grenzfixirung ist sein Werk; die Realität der begrenzten Theile aber besteht so unabhängig von ihm, dass dieselbe vielmehr der Erkenntniss sachlich vorausgeht.

Aber die aufgeworfene Schwierigkeit lässt sich noch tiefer, gleichsam an ihrer Wurzel, fassen und entwerthen. Denn bestände dieselbe zu Recht, beruhte sie auf mehr als blosser Scheindialektik: so liefe zugleich auch das ganze grosse Gebiet des objectiv Möglichen überhaupt Gefahr, ins Nebelreich blosser Gedankendinge, inhaltsloser Geistesschöpfungen ohne objectiven Werth zu versinken. Nach dem scholastischen Exemplarismus, wie er vom hl. Augustinus, hl. Thomas v. Aquin und insbesondere vom hl. Bonaventura vertreten wird [2]), existirt auch das Mögliche in seinen verschiedenen Besonderungen (Engel, Mensch, Stein etc.) nicht eher, als bis Gottes differenzirender Verstand dasselbe in diesen seinen Besonderungen erkannt hat. Vor dem göttlichen Erkenntnissact gibt es mögliche Einzelwesenheiten nur der Kraft und Wurzel nach — virtute —, insofern die göttliche Wesenheit bei ihrer unendlich mannigfaltigen Nachahmbarkeit nach Aussen aus sich fähig ist, unendlich viele Sonderwesenheiten in sich auszuprägen und gleichsam abzuspiegeln. Erst Kraft des göttlichen Gedankens aber, der hinzukommen muss, treten die wurzelhaften Wesenheiten aus ihrer Unbestimmtheit in den eigentlichen (idealen) Möglichkeitszustand, den sog. „status possibilitatis" ein [3]). Daher denn auch alle geschöpf-

[1]) Gutberlet, Metaphysik S. 71. Münster 1880. Diese Betrachtung schliesst zugleich die strenge „distinctio rationis ratiocinatae" für unsern Fall aus.

[2]) Cf. Jeiler, De humanae cognitionis ratione anecdota quaedam S. Bonaventurae. Quaracchi 1883. Eine meritorische Erörterung der Frage nach dem „Ursprung der inneren (ontologischen) Möglichkeit der Geschöpfe" findet man bei Schiffini, Princip. philosoph. ad mentem Aquinatis p. 638—649. 1886.

[3]) Der Skotist De Rada erläutert diesen Satz also: „Creatura ante actum divinae cognitionis nullum esse formale proprium habet in Deo, nec cognitum nec possibile nec intelligibile: licet haec quasi virtualiter habeat in divina essentia ante actum divini intellectus." Controversiae theolog. Tom. I. p. 466. Coloniae 1620.

liche Erkenntniss von den möglichen Dingen in letzter Instanz auf den göttlichen Ideen fusst, in welchen, als in ebenso vielen Prototypen, die möglichen Wesenheiten von Ewigkeit her ihre ideale Besonderung und Differenzirung erfuhren. Indem wir mögliche Dinge denken, denken wir thatsächlich nur die göttlichen Ideen nach, die da den Grundpfeiler und die Urvoraussetzung all unseres Denkens bilden.

Ganz auf dieselbe Rangstufe treten nun aber auch die unendlich kleinen Grössen als Elemente des Stetigen. Wie das Gebiet des rein Möglichen ohne den besondernden göttlichen Gedanken nur ein unendlich grosses unbestimmtes Continuum darstellt, so gross wie Gottes unendliche Wesenheit und Nachahmbarkeit selber — ein Continuum, das erst durch den Hinzutritt des göttlichen Erkennens sozusagen in Parcellen und Einzelwesenheiten zerfällt: so stellt auch die stetige Grösse, so lange kein begrenzender und theilender Gedanke sie berührt, an und für sich lediglich eine in sich ungetheilte Einheit, zugleich aber auch eine virtuelle Vielheit dar, welch letztere durch den thätigen Herantritt des Geistes befähigt wird, in Theile ohne Ende zerlegt zu werden. Lassen wir nun den göttlichen Gedanken gleichsam plötzlich erwachen, so treten sofort Theile im Stetigen auf, und zwar so viele, als in wie viele es sich besondern lässt. Uud da ein unendlich vollkommener Geist alle Theile und Theilungen erkennen muss, die überhaupt möglich sind — ob diese Erkenntniss eine distributive oder collective sei, verschlägt für den Augenblick nichts — so kann es im Stetigen keine unendlich kleinen Elemente (Differentiale) geben, die Gottes Verstand nicht schon von Ewigkeit her durch sein zerlegendes Denken actualisirt und besondert hätte. Wenn der Mathematiker bei der Behandlung stetiger Grössen bis zu Differentialen vordringt und dieselben in seine Formeln fasst, so stösst er im Grunde genommen nur auf Etwas, was nicht so sehr er selbst, als vielmehr das ewige Erkennen Gottes in dieser seiner Bestimmtheit gesetzt und besondert hat. Die unendlich kleinen Rechenmünzen, mit denen der Analyst hantirt, tragen sammt und sonders Bild und Stempel Gottes, in dessen reicher Münzstätte dieselben von Ewigkeit her geschlagen und geprägt worden sind. Nicht mit werthlosen Spielpfennigen hat er es zu thun, sondern mit coursfähigen Geldstücken von edelstem Metall und feinstem Gehalt. Und in der That, hätte er nur wesenlose Schemen, selbsterdachte und selbstgemachte Grössen unter Händen, so wäre nicht abzusehen, wie wir uns der Folgerung entziehen könnten, dass auch das ewige, auf die Elemente des Stetigen gerichtete Erkennen Gottes ein blosses „ens rationis“, ein Gedankending zum Gegenstand hätte: eine Behauptung, die sich in Ansehung der unendlichen, schattenlosen Vollkommenheit des göttlichen Wissens von selber aufhebt. Mich will daher bedünken, als ob die Identificirung des unendlich Kleinen mit der Kategorie der logischen Beziehungen und Unterscheidungen entweder geradezu auf die Vernichtung und Verflüchtigung der objectiven Möglichkeit der Dinge überhaupt hinauslaufe, oder zum Mindesten doch solidarisch mit einer solchen verknüpft sei. Gewiss sind die unendlich kleinen Grössen der Infinitesimalrechnung als Unterschiede (Differentiale) aufzufassen; aber diese Unterschiede sind wirkliche, vom Denken unabhängige, nicht bloss logische, vom Geist geschaffene Unterschiede.

Auch steht nicht zu befürchten, was schon Eingangs unserer Erörterungen als eine den Fragestand klärende Schwierigkeit eingeworfen wurde, dass die besondernde Erkenntnissthätigkeit der göttlichen Vernunft, in Folge der mentalen Zerlegung des Stetigen, dieses selbst derart zerstücke und bis zum Verschwinden atomisire, dass von demselben nicht einmal sein Begriff mehr übrig bleibe. Das Stetige bleibt stetig, auch wenn es vom Gedanken in die Kreuz und die Quer zerlegt wird. Ein geschöpflicher Geist ist nicht minder, wie der göttliche, im Stande, ein stetiges Ganzes, z. B. eine gegebene Linie AB, in beliebig viele Theile zu zerschneiden, ohne dasselbe zu vernichten. Das Ganze muss ja den Theilen, in die es und insofern es getheilt wird, vorausgehen. Erst muss das Ganze vorhanden und als solches erkannt sein, ehe es in seine Elemente zerlegt werden kann; dasselbe ist also, da eine Theilung ohne Ganzes undenkbar ist, sowohl das logische als das reale Prius der in ihm enthaltenen und aus ihm gewonnenen Theile. Die göttliche Erkenntniss der actualen Theile wird darum dieses Ganze ebensowenig in seinem Begriffe aufheben und als solches zerstören, wie die Erkenntniss der blossen Theilbarkeit, welch letztere ja den unverminderten Bestand eines Ganzen, das getheilt werden soll, nothwendig voraussetzt.

Um die aufgeworfene Schwierigkeit also zu lösen, brauchen wir in Gottes Geist nur zwei Erkenntnissmomente auseinanderzuhalten, die zwar nicht re, aber doch virtute voneinander verschieden sind: 1) die Erkenntniss des Stetigen sowie seiner Theilbarkeit, als „in priori signo“, und 2) die Erkenntniss der aus dem Stetigen gewinnbaren actualen Theile, als „in posteriori signo“. Beide Erkenntnissmomente schliessen sich nicht etwa gegensätzlich aus, sondern ergänzen sich vielmehr zu einer harmonischen Totalerkenntniss, welche daher beide Elemente in sich aufgehoben enthält. Die einseitige Vorstellung, als wenn das zerlegende Wissen Gottes die Stetigkeit selber aufs Spiel setzte und in ihrer Wurzel zertörte, wäre nur unter der falschen Voraussetzung aufrechtzuerhalten, dass zwischen den verschiedenen Erkenntnissfactoren, statt Harmonie und Ineinsfügung, nur Krieg und Widerstreit herrschte, ganz zu geschweigen von der handgreiflichen Absurdität, welche schon in der blossen ganz unvollziehbaren Forderung liegt, dass das theilende Wissen Gottes ein Stetiges, welches schon als vorhanden gedacht werden muss, durch die nachträgliche Zerlegung in Gedanken begrifflich vernichten sollte. Wie könnte auch ohne Verletzung des Princips vom Widerspruch ein Ganzes der begrifflichen Auflösung anheimfallen, wenn dem angeblichen Vernichtungsprocess dieses Ganze selber ursprünglich als Material zu Grunde liegt? Wir hätten sonst ja ein Stetiges und kein Stetiges zu gleicher Zeit.

Der metaphysische Nachweis der objectiven Bedeutung des unendlich Kleinen, der im Vorstehenden ohne mathematische Hülfsmittel auf rein philosophischem Wege versucht worden ist, hat für die höhere Mathematik gewiss eine tiefe und nachhaltige Bedeutung. Unser Zweck ging dahin, geradezu die Lebensinteressen dieser an der Schwelle der Philosophie weilenden Wissenschaft nach Kräften zu vertreten, sowie nach einer Deckung und Schutzvorrichtung zu suchen, welche die gefährdeten Lebensadern derselben gegen feige Ueberfälle wirksam zu vertheidigen im Stande wäre. Wenn die unendlich kleinen Grössen, an denen unseres Erachtens nicht einmal die so beliebte neuere „Grenzmethode“ vorbeikommt, nichts Anderes sind, als blosse Fictionen und Einbildungen des rechnenden Verstandes, nichts als fein erdachte Symbole ohne inneren Seinsgehalt: so beruht zuletzt die Differentialrechnung selber nur auf Fiction und Einbildung. Die anstaunenswertheste, die fruchtbarste, die schönste aller mathematischen Zweig-Disciplinen würde, bis in ihre untersten Wurzeln verfolgt, sich nur als ein markloses, hohles Luftgebilde erweisen, ohne Halt und Stütze im festen Boden des realen Seins! Hat der Begriff des unendlich

Kleinen hingegen objective Bedeutung, entspricht ihm eine wenn auch schwer fassbare intelligibele Realität, so geht uns nicht nur ein Licht auf über die unermessliche Fruchtbarkeit und Allseitigkeit der Differential- und Integralrechnnng, sondern wir gewinnen vor allen Dingen auch ein tieferes Verständniss sowie einen beruhigenden Einblick in die Wahrheit und Festigkeit ihrer Grundlagen. Nicht nur der Mathematiker, auch der Philosoph fühlt sich befriedigt; indem sie sich auf der Grenzscheide ihrer respectiven Fachwissenschaften mit dem anfänglichen Gefühl gegenseitiger Entfremdung begegnen, reichen sie sich beide zuletzt versöhnt die Hände.