Die mathematischen Schriften des Nik. Cusanus.

Von Prof. Dr. Joh. Uebinger in Posen.

(Schluss.)[1]

Der zuletzt erwähnten zweiten „Erklärung", wie sie die Nachschrift enthält, hätte ein Dritter ein sachlich ebenso vernichtendes Urtheil wie der ersten anfügen können; denn es genügt keineswegs der blose Nachweis, wie ihn der Text der „Ergänzungen" und die zweite „Erklärung" lediglich versucht, dass man die fraglichen Linien gleich machen kann, sondern verlangt wird zu einer befriedigenden Lösung des vielgenannten Problems die klare und bündige Angabe, wie man dieselben leicht und sicher wirklich gleich macht. Dieser augenscheinliche Mangel hat mit der Zeit allem Anscheine nach zu dem gänzlichen Aufgeben des also behafteten Verfahrens geführt und das Suchen nach einem ganz anders gearteten veranlasst. Auf diese Weise wohl entstand

2. *Dialogus de quadratura circuli 1457.*

„Bester Vater", so beginnt Paolo das 1457 zu Brixen niedergeschriebene Gespräch[2]) mit dem Cardinal, „Du weisst, dass ich von Jugend auf nach der Wahrheit forschte, welche in der Mathematik allem Anscheine nach ziemlich klar wiederstrahlt, und wie sehr ich nach der Quadratur des Kreises verlange, welche bisheran unbekannt blieb.[3]) Wenn Dir daher nach Absendung der Büchlein »über die

---

[1]) Vgl. diese Zeitschr. 8. Bd. S. 301 ff. u. 403 ff., 9. Bd. S. 54 ff. u. 391 ff. — [2]) „Finis. Brixinae, 1457", lauten die Schlussworte desselben pag. 12; aus der angegebenen Jahreszahl ward in dem Basler Nachdruck pag. 1098 durch Umstellen der beiden inneren Ziffern 1547, und trotz des ausdrücklichen „finis" auf Seite 12 rechnen Gassendi, Vita pag. 348 und Scharpff S. 309 auch die zwei folgenden Seiten, die angebliche Abhandlung „De quadratura circuli", noch mit zu dem Gespräche hier. — [3]) Paulus. „Pater optime, quia me nosti a puero veritatem quaesivisse, quae in mathematicis clarius videtur relucere (vgl. 8. Bd. S. 304 Anm. 3), atque quantum cupiam hactenus ignotam circuli quadraturam ...", pag. 10.

mathematischen Ergänzungen« an mich ein anderes Verfahren, welches minder zweifelhaft, in den Sinn kam, so theile mir, bitte, dieses mit"[1]); die genannten Büchlein von 1453 bew. 1454 nämlich blieben für ihn in ihren Ausführungen dunkel und in ihren Ergebnissen zweifelhaft.[2])

Jetzt aber, im Jahre 1457, glaubt der Ersuchte ein Verfahren mittheilen zu können, welches leicht auszuführen und zum Schlusse keinen Zweifel zurücklasse.[3]) Alle Glieder, welche dazu gehören, seien bekannt, blos das eine ausgenommen, wie man zu einer gegebenen Kreislinie eine gerade zeichne, welche ihr gleich ist[4]); und dieses bisher unbekannte Schlussglied enthalte der Satz[5]): Fügt man die Quadrantensehne eines gegebenen Kreises zum Halbmesser desselben, so entsteht der Durchmesser des Kreises, welcher dem Dreiecke von dem gleichen Umfange wie der gegebene Kreis umgeschrieben ist.[6]) „Leicht fasslich", so erwidert Paolo, „sei dieses Verfahren, überdies, falls sich dessen Richtigkeit nachweisen lasse, sehr lieb und werth!"[7]) Sofort löst darauf der Cardinal diese Aufgabe durch den von alters her und so auch bei ihm in solchen Fällen üblichen Nachweis des „nec plus nec minus" in einer den Mitunterredner völlig befriedigenden Weise; derselbe nämlich erklärt schliesslich nicht leugnen zu können, dass, wie klar nachgewiesen, es damit seine Richtigkeit habe.[8]) Auf Grund dieses Nachweises ausserdem liessen sich, wie in „den mathematischen Ergänzungen" sei berührt worden, allerhand Folgerungen ziehen, welche man bisheran in der Mathematik nicht kannte.[9])

---

[1]) „. . . si igitur post mihi missos tuos de mathematicis complementis . . . libellos alius certior modus incidit, rogo communices", l. c. — [2]) „. . . utique mihi obscuros atque incertos libellos . . .", l. c. — [3]) Nicolaus card. „Imo facilis et ut puto certus", l. c. — [4]) Vgl.: Nic. „Omnia tibi nota scio quae ad rem pertinent solum hoc unico dempto, scilicet ut datae circumferentiae circuli scias rectam lineam ei aequalem assignare", l. c. — [5]) Vgl.: Nic. „Ut igitur tibi pandam conceptum circa id quod restat, accipe propositionem . . .", l. c. — [6]) „Si chorda quadrantis dati circuli fuerit addita semidiametro [das Komma des Druckes hier tilgen!] eiusdem [hier ein Komma setzen!], oritur diameter circuli circumscripti trigono isoperimetro circumferentiae dati circuli", l. c. — [7]) Vgl.: Paulus. „Facilis est haec praxis atque carissima, si hoc verum ostenderis", l. c. — [8]) Vgl.: Paulus. „Non possum negare, quin ita sit, ut clare ostendisti . . .", pag. 12. — [9]) Vgl.: Paulus. „Satis est scire modum curvam circumferentiam in rectam lineam transmutandi et econverso rectam in curvam, ex quo omnia quae hactenus in mathematicis ignorabantur possunt elici, prout in mathematicis tuis tetigisti complementis", l. c.

An dieses Gespräch über die Kreisquadratur aber schliesst sich allem Anscheine nach

3. De una recti curvique mensura.

Die praktische Meisterschaft, wie man die gemeinsame, gleiche Grösse des Krummen und des Geraden feststelle, fehle, so heisst es im Eingange, den Geometriebeflissenen [1]), darum seien selbige nicht vollauf tüchtig und könnten mancherlei Aufgaben, die, wie sie sähen, zu machen wohl möglich sei, nicht zu einem endgiltigen Abschlusse bringen.[2]) Weil solches also unser Autor sah, so wandte er einen Eifer, der nicht gering war, an, um eben diese Befähigung zu erlangen.[3])

Diese Befähigung aber besteht in der Kenntniss dreier Sätze. Es sind dies die drei Aufgaben: 1. wenn ein Bogen gegeben ist, zu ihm eine Gerade von gleicher Grösse[4]), 2. umgekehrt zu einer gegebenen Geraden einen gleichgrossen Bogen an einem gegebenen Kreise[5]) und endlich 3. zu dem Bogen eines Halbkreises eine Gerade und zu seiner krummlinigen (gemischtlinigen) eine geradlinige Fläche von gleicher Grösse zu zeichnen.[6]) Die Beweise zu diesen Sätzen fussen auf dem Gedanken des „nec plus nec minus", bewegen sich demnach in ähnlichen Geleisen wie das Gespräch über die Quadratur.

Von diesem freilich unterscheidet sich andererseits unsere Schrift nicht wenig durch die äussere Fassung. Eine Form nämlich, in welche man für gewöhnlich nicht wissenschaftliche Untersuchungen, sondern persönliche Nachrichten kleidet, ward hier gewählt, d. i. die Briefform. Deutlich allerdings tritt diese in dem Nürnberger Drucke nicht mehr hervor, nach ihm glaubt man weit eher eine wissenschaftliche Abhandlung vor sich zu haben; indessen fehlen selbst hier nicht alle Spuren von der ursprünglichen Form. Unter der oben bereits erwähnten Ueberschrift nämlich stehen ganz unvermittelt die Worte

---

[1]) „. . . vidi practicum magisterium commensurationis curvi et recti deesse geometricis . . .", pag. 16. — [2]) „. . . ideo ipsos imperfectos et plura, quae possibilia fieri vident, ad actum deducere non posse . . .", l. c. — [3]) „Quia vidi . . ., conatum igitur non parvum adhibui, ut ipsam artem assequerer", l. c. — [4]) „Propositio prima. Dato arcu rectam ei commensurabilem assignare", pag. 16. — [5]) „Propositio secunda. Datae rectae arcum dati circuli commensurabilem assignare", pag. 18. — [6]) „Propositio tertia. Arcui semicirculi rectam et areae eius curvae rectilinealem commensurabiles designare", pag. 20. In diesen Sätzen ist das Eigenschaftswort „commensurabilis" wegen seiner eigenthümlichen Bedeutung, welche von der heute üblichen nicht unerheblich abweicht, darum besonders zu beachten.

„Nicolaus cardinalis scti. Petri“, welche, an und für sich recht auffällig, dadurch am ehesten verständlich werden dürften, dass man sich ein „s. d.“ hinzudenkt. Gerade auf diese Art Ergänzung aber bringt einen die Zusicherung gegen Schluss, welche, gänzlich individuell zugespitzt, wörtlich übersetzt also lautet: „Zu vielen verborgenen Eigenschaften, die sich kaum aufzählen lassen, wirst Du auf Grund dieser Befähigung gelangen [1]) . . . und Werkzeuge wirst Du zusammensetzen können, mit Hilfe derer Du die vorausgeschickten Lösungen sehr leicht und rasch verständlich machen wirst, Aufgaben, welche wir für Deinen regen Fleiss übrig lassen!“ [2]) Diese Sätze, zumal der letzte Relativsatz lassen sich nimmer auf jeden beliebigen Leser unter der Voraussetzung beziehen, es läge eine allgemein gehaltene Abhandlung vor; denn es ist durchaus nicht jedermanns Sache, diesen regen Fleiss zu besitzen und so jene Ergebnisse zu erzielen. Dergleichen vermag unter tausend und abertausend Menschen im Laufe der Jahrhunderte vielleicht einer. An einen solchen Glücklichen wendet sich allem Anscheine nach unser Schreiben; ein Brief also liegt vor, an welchem man bis auf zwei Spuren, die wohl ihrer sachlichen Bedeutung halber bestehen blieben, alle Kennzeichen eines solchen in der Folgezeit als nebensächliches Beiwerk tilgte, welchem man alsdann anstatt dessen, wie wir in Handschriften öfters bemerken können, eine sachliche Ueberschrift gab, als ob eine wissenschaftliche Abhandlung vorläge. Diese somit später hinzugekommene Ueberschrift passt zu dem Inhalte freilich etwas besser als jene früher besprochene, mit der es eine ähnliche Bewandtniss hat, aber keineswegs vollkommen; statt „una . . . mensura“ nämlich müsste, wie aus dem Texte selbst deutlich erhellt [3]), „commensuratione“ stehen, ein Hauptwort, welches erst dem Inhalte völlig entspräche, allerdings dann nicht so leicht verständlich und geläufig wie das gewählte, aber irreführende „una . . .

---

[1]) „. . . et ad multa occulta, quae vix enarrari possunt, hac arte pervenies“, pag. 20. — [2]) „. . . et instrumenta componere poteris, cum quibus praemissa facillime et subito facies, quae tuae industriae relinquimus“, l. c. — [3]) „. . . magisterium commensurationis curvi et recti deesse . . ., heisst es, wie bekannt, gleich zu Anfang; „commensurari autem curvum et rectum dico, quando una mensura mensurantur, puta quando recta linea tot pedes habet rectos quot arcus curvos“, pag. 16; darnach bedeutet „commensurare“ soviel wie „una mensura mensurare“ und „commensuratio“ entsprechend „una mensura mensuratio“; das Eigenschaftswort „commensurabilis“ endlich geht, wie schon angedeutet, auf gleiche Grössen und nicht auf Grössen mit gleichem Maas.

mensura“ wäre.[1]) Die Wahl des letzteren sodann dürfte auf Rechnung des Adressaten zu setzen sein, und dies ist niemand anders als Georg Peurbach. Von ihm aus nämlich, so müssen wir nach Lage der Verhältnisse annehmen, kam der Brief 1461 in den Besitz, 1476 in den Nachlass seines Schülers Regiomontanus und 1533 zu Nürnberg in den Druck. Jener erste Empfänger aber erhielt denselben vermuthlich 1457 gleichzeitig mit dem „Gespräch über die Quadratur.“

Diese Vermuthung stützt sich auf folgende zwei Erwägungen. Einmal steht unser Brief in dem Nürnberger Drucke, der bis auf eine einzige Ausnahme die zeitliche Reihenfolge einhält, nach dem Gespräche, an letzter Stelle. Will man auf diesen Umstand etwa keinen sonderlichen Werth legen, so bleibt alsdann noch immer die früher nachgewiesene inhaltliche Uebereinstimmung mit dem „Gespräche“ einerseits und die formelle Verschiedenheit von ihm andererseits zu beachten. Sowohl jene Uebereinstimmung als auch diese Verschiedenheit scheinen für die Zusammengehörigkeit und gleichzeitige Uebersendung zu sprechen: Nach vielen nicht auf die Dauer befriedigenden Versuchen war abermals ein neues Verfahren gefunden, den Kreis zu quadriren. Ein Gespräch mit einem der mathematischen Freunde, mit Paolo Toscanelli, machte dies bekannt. Natürlich musste es vor allem dem andern mathematischen Freunde, dem Georg Peurbach, bekannt gegeben werden. Ehe aber dies geschah, überzeugte sich unser Verfasser, dass den Geometriebeflissenen die praktische Meisterschaft fehle, ganz allgemein das Krumme und Gerade wechselseitig zu vertauschen. So entstand im Anschlusse an „das Gespräch“ unser Brief und ward jenem als Begleitschreiben gleich mit auf den Weg zu Georg Peurbach gegeben.

Nach alldem zu schliessen, bilden hierselbst die beiden letzten Nummern und die zweite, soweit sie echt, Ergänzungen zu der ersten. Darnach erstreckten sich „die mathematischen Ergänzungen“, dieses Wort im weiteren Sinne genommen, über einen Zeitraum von fünf Jahren. Anfang September 1453 ward dazu der Grund gelegt in dem Theil, welcher von vornherein das Ganze, alsbald jedoch nur mehr deren erstes Büchlein bildete; durch Zweifel an der Richtigkeit seiner Ausführung veranlasst, kam sodann höchstwahrscheinlich 1454 das zweite Büchlein, zunächst ohne, dann mit Nachtrag, hinzu;

---

[1]) Pietät gegenüber dem überlieferten Text und zugleich Einsicht von dem wahren Sachverhalt bekundet 1533 der Herausgeber, wenn er pag. 16 die Ueberschrift unverändert lässt, auf dem Titelblatte aber „commensuratio“ wählt.

in dasselbe Jahr dürfte weiterhin die bekannte Nachschrift zu setzen sein; endlich 1457 brachten „das Gespräch über die Kreisquadratur“ und der Brief an Peurbach „über die gleiche Grösse des Geraden und Krummen“ den endgiltigen Abschluss der „mathematischen Ergänzungen!“

Auf die grundlegenden „Verwandlungen“ 1450 folgten also „die Ergänzungen“ 1453—57, auf diese endlich

IV. Die Vollendung 1458.

Während die erste Gruppe drei, die zweite auch drei, zählt diese dritte nur zwei Nummern; und während in der ersten Gruppe die Hauptschrift in der Mitte, in der zweiten am Anfange, steht dieselbe in der dritten am Schlusse. Es geht ihr nämlich voran

1. *De beryllo.*

Nahezu fünf Jahre trug sich der Verfasser nachweislich mit dem Plane zu dieser Schrift. Schon in einem Briefe nämlich, der in den Januar 1454 zu setzen ist, begegnet uns der „Beryll“, aber erst am 18. August 1458 ward er vollendet.[1]

Von den vier an die Spitze dieses „Beryll“ gestellten Sätzen geht uns hier im Grunde genommen nur der vierte etwas an. Der erste derselben nämlich behauptet die Einheit des obersten Principes, der zweite die individuelle Verschiedenheit der einzelnen Dinge, der dritte eine die geschaffenen Dinge nachmessende[2] und erst der vierte eine schöpferische Thätigkeit des Menschen.[3] An der Hand dieser vier Sätze schreitet sodann die Schrift vorwärts; auf den ersten kommen einundzwanzig, auf den zweiten acht, auf den dritten drei Capitel[4], und der vierte – geht gänzlich leer aus. Darnach scheint die Schrift für unsere Zwecke belanglos zu sein.

Doch dies scheint nur so. Thatsächlich kommen in der Ausführung der drei ersten Sätze genug Stellen vor, welche hier Beachtung verdienen. Namentlich dort, wo es sich darum handelt, das erste Princip zu veranschaulichen, spielen, ähnlich wie früher in „dem gelehrten Nichtwissen“, Vergleiche aus der Mathematik eine hervorragende Rolle. Um zu begreifen, wie dasselbe auch nur das untheilbare Princip von gross und klein, gleich und ungleich, eins

[1] Vgl. Uebinger, Die philosophischen Schriften des Nik. Cusanus. Zeitschrift für Philosophie und philos. Kritik (1894). Bd. 105. S. 42—50. — [2] Vgl. cap. 3, 4 bezw. 5. — [3] „Quarto adverte Hermetem Trismegistum dicere hominem esse secundum deum“, cap. 6. — [4] Cap. 7—27; cap. 28 35; cap. 36—38.

und theilbar und dergleichen mehr sein könne[1]), nehme man einen Halm *ab* zur Hand[2]), der einer Linie ähnlich erscheine, knicke ihn in der Mitte *c*, lasse den Schenkel *cb*, welcher beweglich sei, gegen *ca* sich bewegen, so verursacht derselbe in einer solchen Bewegung zusammen mit *ca* alle möglichen Winkel.[3]) Niemals aber wird einer spitz in dem Maasse sein, dass er nicht spitzer sein kann, bevor *cb* mit *ca* zusammentrifft; ebensowenig einer stumpf in dem Maasse, dass er nicht stumpfer sein könnte, bevor *cb* mit *ca* eine einzige fortlaufende Linie bilden wird. Wenn man demnach durch den Beryll den grössten und zugleich kleinsten möglichen Winkel sieht, so wird der Blick nicht bei einem Winkel, sondern bei der einfachen Linie Halt machen[4]); sie eben ist das Princip der Winkel, sie das untheilbare Princip für ebene Winkel jeder Art von Theilung, wodurch sich Winkel theilen lassen.[5])

Noch einen anderen, auch hier höchst beachtenswerthen Vergleich muss im weiteren Verlaufe die Mathematik liefern.[6]) Es handelt sich dabei um einen Vergleich, welcher klarer und anschaulicher als das bisher Vorgebrachte ein Bild von der absoluten Wahrheit und dem All vermittelt; zu dem Ende solle man sich das Verhältniss zwischen Punkt und Körper genau ansehen.[7]) Gesetzt nämlich den Fall, der Punkt sei auf die Weise mitgetheilt, wie er mittheilbar ist, und man hat den Körper.[8]) Der Punkt ist an und für sich auf alle Art des stetigen Seins und der Ausdehnung untheilbar. Die Arten des stetigen Seins aber sind Linie, Fläche und Körper, die Arten der Ausdehnung aber lang, breit und tief. Die Linie also nimmt an der Untheilbarkeit des Punktes theil, weil sie nicht in das Gegentheil einer Linie, auch nicht nach Breite und Tiefe sich theilen lässt. Die

[1]) Vgl. cap. 7. — [2]) Vgl.: „Huius vide nostrae artis aenigma et recipe calamum ad manus . . .“, cap. 8. — [3]) Vgl. einige Zeilen später: „Esto igitur quod calamus sit ut linea et plicetur super *c* puncto *cb* mobili et moveatur versus *ca*, in eo motu *cb* cum *ca* causat omnes formabiles angulos.“ — [4]) „Quando igitur tu vides per beryllum maximum pariter et minimum formabilem angulum, visus non terminabitur in angulo aliquo, sed in simplici linea“, l. c. — [5]) „. . . quae est principium angulorum, quae est indivisibile principium superficibilium angulorum omni modo divisionis, quo anguli sunt divisibiles“, l. c. Die folgenden Capitel 9—16 enthalten die Anwendung auf das „indivisibile“ schlechthin. — [6]) „Adhuc alio aenigmate per doctrinam . . .“, Anfang zu cap. 17. — [7]) Vgl.: „De hac consideratione puncti et corporis te eleva ad similitudinem veritatis et universi et in clariore aenigmate facies dictorum coniecturam“, Schluss des cap. 17. — [8]) „Sit igitur punctum communicatum modo, quo communicabile est, et habetur corpus“, cap. 17.

Fläche nimmt an der Untheilbarkeit des Punktes theil, weil sie nicht in das Gegentheil einer Fläche, auch nicht nach Tiefe theilbar ist. Ebenso nimmt auch noch der Körper an des Punktes Untheilbarkeit Antheil, weil er in das Gegentheil eines Körpers sich nicht auftheilen lässt, wenngleich er nach Tiefe theilbar ist. In der Untheilbarkeit des Punktes sind all diese Arten der Untheilbarkeit enthalten; nichts also findet sich in diesen, ausgenommen die Entfaltung der Untheilbarkeit des Punktes. Alles daher, was sich in einem Körper findet, ist nichts als Punkt oder Bild der Eins.[1]) Einfacher nämlich als der Punkt ist die Eins oder die Monade.[2]) Des Punktes Untheilbarkeit ist daher ein Bild der Untheilbarkeit der Eins. Gesetzt also, dass die Eins gleichsam die untheilbare und unmittheilbare Wahrheit sei, welche sich offenbaren und mittheilen will durch ihr Bild, und die Eins zeichnet oder versinnbildet sich, und es entsteht der Punkt.[3])

Darnach erscheint es dem Autor höchst zweckmässig, auf die kleinsten Dinge achtzuhaben, wann man die grössten erforscht.[4]) Nicht immer, z. B. nicht im Jahre 1440, wie wir früher gesehen, dachte derselbe so günstig über die analoge Verwerthung des Kleinsten wie jetzt 1458. Ebenso macht er dasselbe erst jetzt, veranlasst höchstwahrscheinlich durch diese Verwerthung, zum Ausgangspunkte seiner Mathematik in der Schrift

2. *De mathematica perfectione.*

Wie bereits früher in einem anderen Zusammenhange bemerkt ward, geht der letzte der vier an die Spitze des „Beryll" gestellten Sätze in der Ausführung der bezüglichen Schrift gänzlich leer aus, und bei tieferem Eindringen in das Verhältniss der beiden Schriften dieser IV. Nummer gewinnt man schier den Eindruck, als ob dieses mit Absicht so geschehe. Der vierte jener Sätze nämlich erklärt, wie bekannt, den Menschen für einen zweiten Gott; denn ebenso wie Gott der Schöpfer der wirklichen Dinge und der Naturformen, sei dies der Mensch für die Verstandesdinge und die Kunstformen. Zu diesen nun aber gehören offenbar in erster Linie die mathematischen Begriffe und Formen; sie wären daher im „Beryll"

---

[1]) „Omne igitur quod reperitur in corpore non est nisi punctum seu similitudo ipsius unius", l. c. — [2]) „Unum seu monas est simplicius puncto", l. c. — [3]) „Esto igitur, quod unum sit ut indivisibilis et incommunicabilis veritas, quae se vult ostendere et communicare per suam similitudinem, et unum se signat seu figurat, et oritur punctum", l. c. — [4]) Vgl.: „. . . ut ad minima respiciamus, quando maxima inquirimus", l. c.

an vierter Stelle zu besprechen gewesen. Anstatt dessen aber bricht der Verfasser vorzeitig ab und schreibt über den Gegenstand, vermuthlich wegen seiner Wichtigkeit, eine eigene Schrift, eben unsere „mathematische Vollendung!"

Darnach also folgte diese zeitlich auf jene. Das gerade Gegentheil dieses Satzes indessen dürften die meisten anzunehmen geneigt sein, wenn sie jetzt erfahren, dass auf den „Abschluss der Mathematik" bereits in dem „Beryll" hingewiesen wird. Neben Materie und Form, heisst es daselbst, gebe Aristoteles als drittes Princip den Mangel an; unser Beryll dagegen lasse uns schärfer sehen, so zwar, dass wir die Gegensätze in dem verbindenden Principe vor ihrer Spaltung sehen, d. h. bevor sie zwei einander entgegengesetzte Dinge bilden[1]); so etwa, wenn wir die geringsten Grade der Gegensätze zusammenfallen sähen, z. B. die geringste Wärme und die geringste Kälte, die geringste Säumniss und die geringste Schnelligkeit und dergleichen, so dass diese ein einziges Princip vor der Spaltung in die zwei Gegenstücke bilden[2]), wie beispielsweise in dem Büchlein über „Die mathematische Vollendung" von dem kleinsten Bogen und der kleinsten Sehne ausgesagt sei, dass sie zusammenfallen.[3]) Ohne auf dieses lehrrreiche Beispiel irgendwie näher einzugehen, greift der „Beryll" sofort auf die Linie als Princip der Winkel, wovon bereits früher die Rede war, zurück, indem er also fortfährt: Wie daher der mindestspitze und der mindeststumpfe Winkel einfacher rechter ist, in welchem die kleinsten Winkelgegensätze zusammenfallen, bevor sie als spitzer und stumpfer zwei Winkel bilden: genau ebenso verhält es sich mit dem Princip Verbindung, in welchem schlechthin die kleinsten Gegensätze zusammenfallen. Der somit nicht zu leugnende Mangel eines näheren Eingehens auf jenes Beispiel zunächst ist es, der einen auf den Gedanken bringt, es könne der fragliche Hinweis auch ganz gut in späterer Zeit eingeschoben sein. In diesem Gedanken bestärkt einen dann noch das irreale „sähen", statt dessen man, wäre der Hinweis auf „Die mathematische Vollendung" ursprünglich vorhanden gewesen, ein reales „sehen" erwartet, und endlich die Stellung

[1]) „Beryllus noster acutius videre facit, ut videamus opposita in principio connexivo ante dualitatem, scilicet antequam sint duo contraria", cap. 25. — [2]) „. . . sicut si minima contrariorum videremus coincidere, puta minimum calorem et minimum frigus, minimam tarditatem et minimam velocitatem et ita de omnibus, ut haec sint unum principium ante dualitatem utriusque contrarii", l. c. — [3]) „. . . quemadmodum in libello de mathematica perfectione de minimo arcu et minima chorda quoniam coincidant dixi", l. c.

des Hinweises, der, wäre er ursprünglich, wohl näher an das Zeitwort „Zusammenfallen" gerückt worden wäre.

Vielleicht hält der eine oder andere die soeben geltend gemachten Bedenken für gesucht und sieht darin keinen genügenden Anlass zum Zweifeln an der Ursprünglichkeit jenes Hinweises. Wer dies jedoch thut, muss zugleich eine alsdann unerklärliche Zeitangabe, an deren Echtheit sich nicht zweifeln lässt, mit in den Kauf nehmen. In der früher schon erwähnten Handschrift E_3 nämlich schrieb gelegentlich der Autor eigenhändig neben den Anfang der „mathematischen Ergänzungen" auf den Rand die folgenden, bisher gar nicht beachteten Worte: „Nach dem Tode des Papstes Nikolaus und Calixtus im Beginne der Regierung des Papstes Pius schrieb ich das Büchlein »Ueber die mathematische Vollendung«:"[1]) Nun starb Calixtus III. am 6. und am 19. August 1458 folgte ihm Pius II.; folglich kann das Büchlein nicht vor dem 18. dieses Monats, dem Tage, an welchem bekanntlich der „Beryll" vollendet ward, niedergeschrieben sein. Immerhin wäre es nun denkbar, dass dies bald nach diesem Tage, dass es noch in dem letzten Drittel des August geschah.

Indessen bleibt hier weiterhin folgendes zu beachten. Auf die Nachricht vom Tode des Papstes Calixtus begab sich der Cardinal, welcher am 18. August, wie bekannt, noch auf Schloss Andraz in Tyrol weilte, unverzüglich zur Papstwahl nach Rom und dürfte daselbst gegen Ende des Monates angekommen sein. Da die Papstwahl schier vierzehn Tage vorüber, und somit für die Fragen des Alltäglichen wieder Raum war, so mag in einer der ersten Unterredungen, welche er mit Antonio, dem Cardinal von S. Chrysogono, hatte, die Frage auf wissenschaftliche Dinge gekommen sein. Eben dieser nämlich, ein hervorragender Kenner der hl. Theologie, ein eifriger Förderer der Philosophie, ein Freund endlich weiland des gelehrten Nikolaus V.[2]), ebenso wie unser Autor, muss diesen um die angegebene Zeit nach neuen wissenschaftlichen Arbeiten gefragt haben und, als er darauf den „Beryll" erhielt, verlangte er von ihm dringend sonst etwas Neues.[3]) Demzufolge setzte sich der so dringend Ersuchte,

[1]) „Post mortem papae Nicolai (dem eben, wie bekannt, die gerade vor Augen liegenden „mathemathischen Ergänzungen" gewidmet sind) et Calixti (der ihm zunächst folgt) in principio papatus papae Pii scripsi libellum de mathematica perfectione . . .", Cod. E_3 a. a. O. — [2]) „Raynaldus: . . . natione Maioricensem, quem sibi philosophiae studiis et arcanorum sacrae theologiae cognitione ex omnibus parem elegerat (sc. Nicolaus V.) . . .", ad a. 1455 n. 14. — [3]) Vgl.: „Sollicita est nobilis mens vestra, pater reverendissime, . . . et a me alias

als ihn wegen Fernbleibens vom päpstlichen Hofe ein kranker Fuss entschuldigte, zwei Tage zu Hause hin und schrieb „Die mathematische Vollendung“ nieder.[1]) Ueber dem allem dürfte es September geworden sein; noch weiter aber die Frist zu erstrecken verbietet uns die früher erwähnte authentische Zeitangabe. Als der Urheber dieselbe in späteren Jahren gelegentlich machte, wusste er zwar noch die denkwürdigen näheren Umstände, aber nicht mehr genau den Tag, und so müssen auch wir uns mit der Angabe bescheiden, dass „Die mathematische Vollendung“ im September 1458 zu Rom entstand.[2])

Sofort ward dieselbe demjenigen, welchem sie den nächsten Anstoss verdankt, mit einer sehr verbindlichen Widmung übersandt.[3]) Das Büchlein, heisst es hier, solle zeigen, wieweit man das so vorzügliche Zusammentreffen der Gegensätze durch die Erfahrung bisheran nicht bekannter Dinge in theologischen Untersuchungen empfehlen könnte.[4]) Alles mathematische Wissen nämlich gewinne man eben aus ihm, wie die weiter unten folgenden Belege zeigten, gerade in den dunklen Fragen, denen zwar stets sehr eifrig nachgeforscht, die aber keinem bis dahin klar geworden.[5]) Die Art und Weise aber, wie die Mathematik uns zu den vollends absolut göttlichen und ewigen Dinge führe, kenne der so gelehrte Cardinal, der Grösste unter den Theologen, besser als der Schreiber selbst.[6]) Uebrigens eine kleine Schrift eigenen Nachsinnens über Spiegel und Gleichniss habe er bereits abgesandt.[7])

novi aliquid deposcebat“, Anfang der Abhandlung „de mathem. perfectione“; das Umstandswort „alias“ ist für uns nicht mehr wie für den ersten Leser, den Cardinal Antonio, sofort verständlich, sondern wird dies erst durch obige Zergliederung. Diese aber stützt sich auf Andeutungen, welche weiter unten folgen, und stützt ihrerseits die bereits früher anderweitig begründete Annahme über die Reihenfolge der in Rede stehenden Schriften.

[1]) „Et quoniam me a palatio pes morbidus excusavit, biduo domi sedens mathematicam perfectionem . . . conscripsi“, l. c. fol. 101a. — [2]) Bislang setzte man den „Beryll“ in das Jahr 1454 und die darin erwähnte „mathematische Vollendung“ unbestimmt in die Jahre 1460—1464. — [3]) „ . . . quam mitto conscripsi“, l. c. — [4]) „ . . . conscripsi, quatenus virtutem coincidentiarum experimento ignotorum hactenus in theologicis inquisitionibus commendarem“, nach cod. E_3 zu Cues; statt „ignotorum“ steht in den Drucken „ignotarum“, eine winzige Aenderung, welche, an sich zwar nicht gerade widersinnig, aber doch den Sinn der Stelle völlig verändert und den Zusammenhang mit dem Folgenden gänzlich aufhebt. — [5]) „Omne enim scibile mathematicum ex ipsa, uti exempla quae subiungo declarant, attingitur in his obscuris semper perquam avide quaesitis, quae nulli hactenus patuerunt“, l. c. — [6]) „Quomodo autem mathematica nos ducant ad penitus absoluta divina et aeterna, melius me novit doctissima paternitas vestra, qui estis theologorum vertex“, l. c. — [7]) „Quandam etiam meae considerationis

Wenn jener dabei ein bisschen zu verweilen sich herablasse, so werde er alsbald sehen, ob er selber den Blick des Geistes richtig auf das Princip der Dinge gerichtet.[1]) Dergleichen Dinge, welche sogar die grössten Gelehrten aufzuzeichnen sich fürchteten, weil man sie nicht ebenso zutreffend darlege als überlege, habe er sich nicht gescheut dem zu übersenden, dessen Einsicht sie allseitig zurecht legen möge[2]); denn der Absender weiss, dass er nicht einem Fremdling, sondern einem liebevollen väterlichen Freunde die verborgenen Dinge mittheilt, welche ihm selber vielleicht kostbarer erscheinen, als sie es wirklich sind[3]), und ist willens, sich in der Werthschätzung zu richten nach dem Ausspruche des Freundes, welchen dieser, wie er inständig bitte, den besagten Büchlein beifügen möge.[4])

Das Ziel, welches sich das zweite derselben setzt, ist dies: von dem Zusammenfallen der Gegensätze aus die mathematische Vollendung zu suchen.[5]) Weil nun diese vorzugsweise darin besteht, eine gerade und krumme Grösse wechselseitig gleich zu machen, so nimmt sich dasselbe vor, das Verhältniss zweier gerader Linien zu erforschen, welche sich wie eine Sehne zu ihrem Bogen verhalten. Sobald man dieses einmal hat, besitzt man zugleich das Mittel, die krumme Grösse der geraden gleich zu machen.

Um aber die zwei geraden Linien zu finden, muss ich vorerst das Verhältniss einer Sehne zu ihrem Bogen kennen.[6]) Doch wie ist es möglich, das Verhältniss einer gegebenen Sehne zu ihrem Bogen

circa speculum et aenigma parvam ablegavi scripturam", eine Stelle, welche offenbar auf den kurz vorher vollendeten „Beryll" zu beziehen ist; man vergleiche nur die Worte: „Unde ut clare legenti conceptum depromam, speculum et aenigma subiiciam", De beryllo cap. 1, und jeder Zweifel in dieser Hinsicht schwindet.

[1]) „Ubi si rev. paternitas vestra modicum versari dignabitur, subito videbit, si visum mentis recte (in den Drucken steht „rectae") in rerum conieci principium", l. c.; den zweiten Nebensatz mit dem Bindewort „si" schliessen die Drucke in Klammern ein und verbinden das Prädicat des Hauptsatzes unmittelbar mit dem, was weiter folgt. — [2]) „Haec talia, quae etiam a doctissimis scribi timebantur, quoniam minus apte panduntur quam contemplentur, non erubui paternitati vestrae mittere, cuius iudicio dirigi opto . . .", l. c. — [3]) „. . . sciens me non alieno sed patri qui me amat communicare secreta, quae mihi pretiosiora fortassis videntur quam existant", l. c. — [4]) „. . . correcturus aestimationem secundum vestram sententiam, quam istis libellis (d. i. offenbar dem „Beryll" und der „mathematischen Vollendung") supplex adscribi deposco", l. c. — [5]) „Intentio est ex oppositorum coincidentia mathematicam venari perfectionem", l. c. — [6]) Vgl.: „Et quoniam ad has inveniendas necesse est me alicuius chordae ad arcum habitudinem scire . . .", l. c.

zu kennen, da zwischen diesen Grössen, welche so sehr verschieden, ein Verhältniss, das sich berechnen liesse, vielleicht gar nicht besteht? [1]) Demnach werde ich auf die geistige Anschauung zurückgehen müssen, welche erkennt, dass die kleinste Sehne, die sich aber nicht zeichnen lässt, mit dem kleinsten Bogen zusammenfällt.[2]) Dergleichen hält die Vernunft sehr wohl für nothwendig, obgleich sie weiss, dass weder ein Bogen noch eine Sehne als Grössen wirklich schlechthin die kleinsten sind, dies auch gar nicht können, weil sich das Stetige immerfort theilen lässt.[3]) Aber um die Kenntniss ihres gegenseitigen Verhältnisses zu gewinnen, berücksichtige ich das geistige Schauen und behaupte zu sehen, wo die Gleichheit der Sehne und des Bogens vorhanden, nämlich in dem schlechthin Kleinsten beider.

Ist diese Gleichheit einmal erkannt, so gehe ich, um zu meinem Ziel zu gelangen, weiter unter Bezugnahme auf ein rechtwinkliches Dreieck und einen Satz, der also lautet: Die grösste Seite, welche es an dem Dreiecke gibt, sehe man für die erste Linie, den Radius des zugehörigen Kreises, die kleinste Seite an demselben, für die zweite Linie, und die Halbsehne, die noch übrige Seite, für die dritte Linie an[4]); dann wird sich ebenso wie der halbe Bogen zur halben Sehne verhalten die Summe dreier erster Linien zur Summe zweier erster nebst der dritten[5]); und dieser Satz, der wegen seiner Wichtigkeit eingehend erläutert und auf mancherlei Art zu beweisen gesucht wird[6]), ist die Grundlage des fraglichen Wissens[7].)

Vielerlei Dinge werden einem hier offenkundig[8]); man sieht nämlich, wie ein Satz, der vom Grössten und Kleinsten, auch von den Zwischengliedern gilt; und wer da das Grösste mit dem Kleinsten zusammenfallen sieht, weil eben das Grösste zugleich auch das Kleinste, der sieht hierin eins und alles. Auch besitzt man die

[1]) „Sed quomodo est possibile me cuiusquam datae chordae ad arcum habitudinem scire, cum inter illas quantitates adeo contrarias forte non cadat numerabilis habitudo?", l. c. — [2]) „Necesse erit igitur me recurrere ad visum intellectualem, qui videt minimam sed non assignabilem chordam cum minimo arcu coincidere", l.c. — [3]) „Hoc probe videt intellectus necessarium, licet sciat, nec arcum nec chordam, cum sint quantitates, esse simpliciter minimas in actu et posse, cum continuum sit semper divisibile", l. c. — [4]) „Si orthogonii latus, quo non est maius, ponatur linea prima et semidiameter circuli et latus, quo non est minus, secunda linea et semichorda et reliquum latus tertia linea . . .", fol. 101b. — [5]) „. . . quae erit semiarcus ad semichordam habitudo, illa erit lineae aequalis tribus primis lineis ad lineam aequalem duabus primis cum tertia", l. c. — [6]) Fol. 101b bezw. 101b–102b. — [7]) „Et haec est radix huius scientiae", fol. 101b. — [8]) „Multa hic propalantur", fol. 102b.

Handhabe, um zu dem Wissen zu gelangen, wie man gegensätzliche Gebilde, welche für immer ungleich zu bleiben scheinen, gleich macht.[1]) Derlei Aufschlüsse erscheinen ihrem Urheber hoch bedeutsam und früher unberührt geblieben zu sein.[2])

Aus dem fruchtbaren Satze aber wird er jetzt selbst einige Folgerungen ziehen, damit man, wenn diese einmal angegeben sind, nach gleichem Verfahren zahllose andere zu entwickeln vermöge[3]); und diese Folgerungen betreffen an erster Stelle Linien[4]), an zweiter ganz kurz Kreis- und Kugelflächen, Kugel und Würfel.[5])

Auf ähnliche Art solle man, so schliesst die bedeutsame Abhandlung, bei anderen krummen Flächen auf die kleinsten Grössen acht haben und deren Verhältnisse ermitteln[6]); was immer ein Mensch in mathematischen Dingen wissen könne, mache er auf diesem Wege ausfindig.[7])

Schlusswort.

Neun Schriften nach der bisher giltigen Annahme waren zu untersuchen. Die nähere Untersuchung ergab zunächst, dass zwei davon nicht echt, dass den verbleibenden sieben eine achte anzugliedern sei. Ueber das gegenseitige Verhältniss derselben, in erster Reihe über die Zeit der Abfassung herrschte bisher grosse Ungewissheit, sogar mannigfacher Irrthum. Nicht zwei Jahrzehnten, sondern einem einzigen, den neun Jahren 1450—58 gehören dieselben an. Innerhalb dieses Zeitraumes wiederum war mancherlei Umstellung vorzunehmen, beispielsweise die Abhandlung, welche bislang an vierter Stelle stand, an die erste hinaufzurücken.

[1]) „Et praxim habes venandi scientiam commensurationis (in den Drucken: „incommensurationis") contrariorum, quae incommensurabilia videntur", l. c. Die beiden stammverwandten Wörter dieser Stelle glaubte ich auch hier nicht in dem heute üblichen, sondern in dem früher (oben S. 146 Anm. 6) angegebenen Sinne deuten zu müssen. — [2]) „Haec mihi magna et prius intacta videntur." Zum Beweise für den letzten Theil der Behauptung wird an Archimedes erinnert, „qui per helicam voluit rectam circumferentiae circuli commensurare" (vgl. 8. Bd. S. 407 Anm. 7), und demnach „nihil de arte tetigit", l. c. — [3]) „. . . . ex foecunditate propositionis aliqua eliciamus correlaria, ut pari modo innumerabilia his datis queant explicari", l. c. — [4]) Fol. 106a. — [5]) Fol. 112a. — [6]) „Simili modo in aliis curvis superficiebus ad minima respiciendo habitudines elice", fol. 112a. — [7]) „. . . et quicquid scibile est humanitus in mathematicis, mea sententia hac via requiritur", l. c.

Psychologisch erschien es weiterhin geboten, die acht echten Schriften in kleineren Gruppen zu vereinigen. Dazu bedurfte es der Feststellung innerer sachlicher Verwandtschaft unter ihnen; bei näherem Zusehen ergaben sich drei Gruppen zu zweimal drei und einmal zwei Schriften. Eine passende Bezeichnung für diese Gruppen lieferte jedesmal die Aufschrift, welche jeweilig die Hauptschrift trägt: Verwandlungen, Ergänzungen bezw. Vollendung, von denen die erste Gruppe 1450, die zweite 1453—57 und die dritte 1458 anzusetzen ist. Den so gefundenen Gruppen entsprechen naturgemäss in der Darstellung ebensoviele Abschnitte, nur ist ihnen noch ein solcher über die Vorstudien vorausgeschickt.

Die so begründete genetische Darstellung gewährt uns einen tieferen Einblick in eine nie rastende geistige Regsamkeit. Für Mathematik augenscheinlich reich beanlagt, findet der Studirende der Rechte um 1420 auf der Universität einen für jene so eigentliche Wissenschaft gleich begeisterten Mediciner. Alsbald jedoch nehmen den Doctor der Rechte die Angelegenheiten des öffentlichen Lebens sozusagen vollständig für sich in Anspruch; nur ein ganz bescheidenes Plätzchen verbleibt jener, insofern sie 1436 sich in den Dienst der Kalenderreformvorschläge stellen liess. Als dann aber 1440 dem Rahmen des „gelehrten Nichtwissens“ eine gewisse Füllung zu geben war, musste sie dazu den Stoff liefern: Die unendliche Linie, das unendliche Dreieck, den unendlichen Kreis, die unendliche Kugel, sämmtlich Gebilde, welche, weil unendlich, im Grunde genommen eins sind, darum in eins zusammentreffen.

Derlei freilich ist keine eigentliche Mathematik; in ihr ist das Zusammentreffen der Gegensätze durchaus zu vermeiden; allein das ausführlich darzulegen und so die Euklid'sche Geometrie auszugestalten bleibt ihm für den Augenblick keine Zeit. Erst 1450 kommt die gelegene Zeit; Gespräche mit Sachverständigen thun das übrige. Aber etwas ganz anderes, als er sich 1440 gedacht, geschieht. Die geplante Ausgestaltung wird zu einer Umgestaltung. Gerade auf das 1440 abgewiesene Zusammentreffen der Gegensätze stützt sich dieselbe; freilich nicht in dem unendlich Grossen, sondern statt dessen in der kleinsten Figur, dem Dreiecke, suchen „Die Verwandlungen“ das Zusammentreffen der Geraden und der Curve. Das gleiche Ziel erstreben auf mancherlei Art „Die Ergänzungen“, welche sich, da sie ihren Urheber nie lange zu befriedigen vermögen, um die Mitte des Jahrzehntes (1453—57) schier überstürzen. Einen ganz neuen Versuch sieht das Jahr 1458 machen. An die Stelle des Dreieckes, der kleinsten Figur, ist das unendlich Kleine, das Gegenstück zu dem unendlich Grossen, getreten.

Diese beiden Begriffe bilden die Punkte, wo sich das philosophische und das specifisch mathematische Forschen des Cusanus berühren; 1440 nämlich muss sich behufs passender Symbole für die Gotteslehre die Mathematik gewissermaassen eine Metamorphose in's unendliche gefallen lassen, 1458 dagegen bequemt sich zu dem gleichen Behufe die Gotteslehre den Grundbegriffen der Mathematik: Körper, Fläche, Linie, Punkt, Monade, an. In beiden Fällen dient die Mathematik der Gotteslehre; gleichsam zum Lohne dafür empfängt sie 1450 von ihr das so wichtige Princip vom Zusammentreffen der Gegensätze, und dieses führt, richtig verwendet, 1458 von der kleinsten Figur zu dem Kleinsten überhaupt oder, wie es gewöhnlich heisst, zu dem unendlich Kleinen. Diese Wechselbeziehung und zugleich die reinliche Scheidung zwischen Mathematik und Philosophie im Denken des Cusanus einmal deutlich und klar zu durchschauen, dürfte Philosophen und Mathematiker gleichmässig interessiren.

Jenes unendlich Kleine aber hat, wie die Geschichte der Mathematik zeigt, im Verlaufe der Zeiten eine ganz verschiedene Behandlung erleben müssen; einst das Aschenbrödel, das man glaubte unbeachtet lassen zu dürfen, ist es heutzutage zum allbeherrschenden Princip erhoben, welches die Functionen erzeugt. Als solches aber erscheint es zuerst bei Nikolaus Cusanus. Darnach möge der Leser selbst entscheiden, ob man ihn mit Cantor[1]) einen genialen Kopf nennen darf.

---

[1]) Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Bd. II. (1892) S 194.
