Logistik und Relationslogik.

Von Dr. Jos. Geyser in Münster i. W.

Das kürzliche Erscheinen einer deutschen Uebersetzung von Louis Couturats Werk *„Les Principes des Mathématiques“* [1]) zwingt die Philosophen, sich allgemeiner, als es bisher geschehen, mit den Prinzipien der mathematisierenden Logik oder der sogen. Logistik etwas näher bekannt zu machen.

Die der Logistik zugrundeliegende Idee lässt sich bis zu den Pythagoreern zurückverfolgen, insofern bei diesen zum ersten Male der Gedanke der Mathematisierung aller Erkenntnisse auftaucht. Dieser Gedanke liegt in der Tendenz, alles wissenschaftliche Erkennen mit der Erkenntnis der Beziehungen von Zahl und Ordnung zu identifizieren. In der neueren Philosophie kehrte Descartes zu diesem Gedanken zurück. Er äusserte in seiner Jugendarbeit „Regeln zur Leitung des Geistes“ [2]) den Plan einer Mathesis universalis, welche den Unterbau zu jeglicher Wissenschaft durch die Untersuchung legen sollte, was sich über Mass und Ordnung im allgemeinen bestimmen lasse. Vor allem bemühte sich Leibniz um die Konstruktion einer allgemeinen Wissenschaftslehre durch das Mittel der Symbolisierung und mathematischen Formulierung der Grundbegriffe aller Erkenntnis und der zwischen denselben möglichen Relationen [3]). Leibniz glaubte durch die mathematischen Formeln dieser

[1]) „Die philosophischen Prinzipien der Mathematik“. Deutsch von Dr. Carl Siegel. Philos.-soziolog. Bücherei. Bd. 7. Leipzig 1908.

[2]) *Regulae ad directionem ingenii.* Nach der Originalausgabe von 1701 herausgegeben von Art. Buchenau. Leipzig 1907. Von demselben erschien eine Uebersetzung dieser Regeln in der Phil. Bibl. Bd. 26a. Leipzig 1907. Vgl. reg. IV.

[3]) Vgl. E. Cassirer, Leibniz' System in seinen wissenschaftlichen Grundlagen, Marb. 1902, 135 ff. Ihm gilt die „allgemeine Charakteristik“ als „der Versuch eines umfassenden Kategoriensystems, in dem die Grundrelationen zwischen Erkenntnisinhalten, insbesondere die mathematischen Verknüpfungs- und Beziehungsformen wissenschaftlich isoliert und dargestellt werden sollten“ (542).

„Characteristica universalis“ die höchstmögliche Stufe der Exaktheit der Wissenschaften und der Sicherheit ihrer Lehrsätze erreichen zu können. Wiederaufnahme in neuer Gestalt fanden diese Ideen in der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts. Nachdem George Bentham *(New System of Logic.* 1827*)*, Thom. Spencer Baynes (*An Essay on the New Analytic of Logical Forms,* Edinb. 1850) und W. Hamilton *(Lectures on Metaphysics and Logic,* Lond. 1859) mit der Methode des „logischen Algorithmus“ begonnen hatten, erstand als Neubegründer der „symbolischen Logik“ George Boole *(The Mathematical Analysis of Logic,* Camb. 1847; *An Analysis of the Laws of Thought,* Lond. 1854). Seine Bestrebungen wurden fortgesetzt von seinem Schüler D. Stanley Jevons (*Pure Logic,* 1864; *The substitution of Similars,* 1869). Die jüngere Form dieser mathematisierenden Logik wurde begründet durch den Amerikaner Charles Peirce *(On the Algebra of Logic,* Hopkins University 1883). In Deutschland folgten dieser Richtung Gottlob Frege (Begriffsschrift, 1879 und Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet, 1893) sowie besonders E. Schröder (Vorlesungen über Algebra der Logik, Leipzig 1890 ff.). In Italien ist der Hauptvertreter G. Peano (*Arithmetices principia novo methodo exposita,* Turin 1889; *Aritmetica generale* Turin 1902). In England erschienen die wichtigen Werke von Whitehead (*A treatise on Universal Algebra*, 1898) und das Hauptwerk der ganzen Bewegung von Bertrand Russell (*The principles of Mathematics* I, Camb. 1903). In Frankreich trat in den Dienst dieser Bewegung Louis Couturat (*De l'infini mathématique*, Paris 1896[1]) und *Les principes des Mathématiques*, Paris 1905).

Die wissenschaftliche Bewegung, um die es sich in den angeführten Arbeiten handelt, nahm ihren Ursprung in der Mathematik. Schon Descartes wurde zu seinem Plan der „allgemeinen Mathematik“ wesentlich durch die Tatsache angeregt, dass sich die Mathematik seiner Zeit in drei getrennten Linien entwickelt hatte, der Arithmetik, Algebra und Geometrie, denen der sie vereinigende Unterbau fehlte. Darum suchte er einen solchen aufzufinden, und zwar in einer solchen Form, dass durch ihn auch eine innere Verbindung der Mathematik mit allen übrigen echten Wissenschaften

[1]) Bezüglich dieses Werkes bemerkt Couturat im Vorwort zu dem zweiten Werk, dass er die positive Lehre desselben über Zahl und Grösse nicht mehr aufrecht erhalte.

möglich werde. Ein analoges Bedürfnis nach einer inneren Verbindung der verschiedenen mathematischen Disziplinen durch eine gemeinsame, für ihre Bestrebungen grundlegende Wissenschaft machte sich seit der Mitte des vorigen Jahrhunderts mit der infolge der vielen grossartigen Entdeckungen auf dem Felde der Mathematik gegebenen ungemeinen Differenzierung dieser Wissenschaft immer allgemeiner und dringender geltend. Und wie bereits Descartes die von ihm erstrebte grundlegende Mathematik als allgemeinste philosophische Wissenschaft sich dachte, so fehlte es auch bei den neueren mathematischen Einheitsbestrebungen nicht an Motiven, die gesuchte allgemeine Mathematik zu einer „Philosophie der Mathematik" zu gestalten. Diese Motive ergaben sich vor allem aus dem Kantischen Kritizismus, der ja bekanntlich gerade durch die vermeintliche Entdeckung Kants, die mathematischen Urteile seien synthetischen Charakters, nicht unwesentlich bestimmt worden ist. Dazu kam, dass Kants Behauptungen über die apriorische Natur von Raum und Zeit und die Apodiktizität der auf sie gestützten Urteile notwendig zur erneuten Diskussion gestellt werden mussten, als durch Bolyai und Lobatschewsky eine nichteuklidische Geometrie, und durch Helmholtz und Riemann eine Art „Metageometrie" ins Leben traten [1]. Zugleich ist wohl verständlich, dass die hierdurch geweckten philosophischen Interessen der neueren Mathematik gerade von der Logik die Befriedigung ihres Verlangens nach einer grundlegenden Disziplin erhoffen mussten. Denn Kants Wort, dass nicht die Erfahrung, sondern nur das reine Denken strenge Wissenschaft hervorbringen könne, war nicht ungehört bei ihnen verhallt. Mit diesem Satze war ja gegeben, dass die Mathematik in ihrem ersten Ursprunge und in ihrer allgemeinsten Form nur Logik sein könne. Allerdings ist dies sicherlich nicht die allgemeine Anschauung der heutigen Mathematiker. Wohl aber sprechen die Mathematiker, die wir vorhin aufgezählt haben, es offen aus, die Mathematik müsse

---

[1] Vgl. Wilh. Meinecke, Die Bedeutung der Nicht-Euklidischen Geometrie in ihrem Verhältnis zu Kants Theorie der mathematischen Erkenntnis. Kantstudien 11. 2 (1906) 209. Ferner W. Reinecke, Die Grundlagen der Geometrie nach Kant. Ebenda 8. 4 (1903) 345. Fr. Medicus, Kants transzendentale Aesthetik und die nichteuklidische Geometrie. Ebenda 3 (1899) 261. Bruno Bauch, Erfahrung und Geometrie in ihrem erkenntnistheoretischen Verhältnis. Ebenda 12. 2 (1907) 213. Leon. Nelson, Bemerkungen über die Nicht-Euklid. Geometrie und den Ursprung der mathematischen Gewissheit. Abhandlungen der Friesschen Schule I (Göttingen 1906) 373 ff.

ganz auf Logik zurückgeführt, sie müsse rationalisiert werden. So wird die uralte Tendenz der Mathematisierung aller wissenschaftlichen Erkenntnisse abgeschlossen durch die Tendenz der Logisierung aller mathematischen Disziplinen [1]).

Sollte die Logik das Amt übernehmen, als Grundlage und Bindesubstanz aller mathematischen Wissenschaften zu fungieren, so entstand für die Anwälte dieser Idee die Aufgabe, nach der Logik Umschau zu halten, welche dieses Amtes walten könnte. Niemand wird sich darüber wundern, dass man der aristotelischen Logik dieses Amt nicht übertrug. Nicht als ob man ihre Regeln als falsche zurückweisen musste, aber man konnte ihre Methode nicht gebrauchen. Sie war zu wenig rein von bestimmtem Erkenntnisinhalt, war nicht formal genug, und betrachtete das menschliche Denken nicht als eine schaffende, sondern als eine nachbildende Funktion. Auch entdeckte man in der Mathematik Arten von Definitionen und Urteilsverhältnissen, die im engen Rahmen der aristotelischen Logik keinen Platz hatten. Schliesslich hatte man als Werkzeug einer in dem Masse, wie es die Mathematik tut, mit Symbolen und Formeln arbeitenden Wissenschaft eine Logik nötig, die ebenfalls die letzten Elemente alles Erkenntnisinhaltes, die Grundbegriffe und Grundsätze des Denkens, in der Gestalt von Symbolen und Formeln darlegt. So entstand eine neue Fundamentallogik durch die Arbeit von Mathematikern. Ihr gab Couturat den Namen der Logistik [2]).

II.

Bertr. Russell sowohl als Louis Couturat haben ihre systematischen Arbeiten durch eine historische Untersuchung der Philosophie des Leibniz vorbereitet [3]). Sie dokumentieren dadurch auch äusser-

---

[1]) Endlich ist man zur Einsicht gekommen, „die Mathematik als nicht an eine bestimmte Natur der Gegenstände gebunden zu betrachten, sondern als eine allgemeine Beweis- und Entdeckungsmethode“. Sie ist „eine rein formale Methode, eine Gesamtheit von deduktiven und hypothetisch notwendigen Schlüssen“ (Couturat, Prinzipien d. Mathem. 323 u. 322). Und als den Weg, zu den Grundlagen der Geometrie zu gelangen, bezeichnet Dav. Hilbert in der Einleitung zu seinen „Grundlagen der Geometrie“ (Leipzig 1899) die „logische Analyse unserer räumlichen Anschauungen“. Die Bedeutung derselben zeigt sich wohl nirgendwo so deutlich als bei der mathematischen Definition der Stetigkeit.

[2]) In seiner *„Algebra nova“* (1635) gebraucht Vieta die Ausdrücke: Logistice numerosa und speciosa.

[3]) Bertrand Russell, *A critical exposition of the philosophy of Leibniz.* Cambr. 1900 (311 S.). L. Couturat, *La logique de Leibniz d'après des do-*

lich, dass sie ihre Arbeiten als eine Ausführung Leibnizscher Grundideen auffassen. Zugleich schliesst sich Couturat, wie er selbst hervorhebt, sachlich ganz an Russell an, bemüht sich jedoch an einigen Punkten, die Formeln desselben zu vereinfachen.

An dem Werke Couturats interessiert uns hier das erste Kapitel. Dieses gibt eine gedrängte Uebersicht des Inhaltes der Logistik nach den vier Abschnitten: Urteilskalkul, Klassenkalkul, Relationenkalkul und Methodenlehre. In den vier folgenden Kapiteln werden die Definitionsversuche der modernen Mathematik von Zahl, Ordnung, Kontinuum und Grösse erörtert. Alsdann folgt ein Kapitel über die Geometrie, worin der rein begriffsmässige Charakter dieser mathematischen Disziplin nachgewiesen wird. Den Schluss bildet ein 80 Seiten umfassender, höchst lesenswerter kritischer Anhang über „Kants Philosophie der Mathematik“[1]).

Indem wir uns zur Darstellung der Logistik selbst wenden, beginnen wir mit dem Abschnitt, mit dem Couturat schliesst, nämlich dem § D „Methodenlehre“ (36—45). Doch gehen wir auf den Inhalt dieses Paragraphen nur so weit ein, als das darin Gesagte für die allgemeine Logik und das Verständnis der drei ersten Abschnitte wichtig ist. Als formale Elemente der wissenschaftlichen Erkenntnis sind zu unterscheiden Begriffe, Sätze (Urteile) und ihre Verkettungen. Die Methode nun besteht in der Zurückführung (Reduktion) erstens von Begriffen auf Begriffe mittels der Definition und zweitens von Urteilen (Sätzen) auf Urteile (Sätze) mittels des Beweises. Beweisen heisst, ein Urteil von vorausgesetzten Urteilen durch die von den logischen Regeln gestatteten Umformungen derselben ableiten. Einen Begriff definieren heisst dagegen, ihn zurückführen auf die logische Verbindung anderer, als bekannt vorausgesetzter Begriffe. So stellt die Definition eine Gleichung dar zwischen einem einfachen Ausdruck auf der einen Seite, dem Definiendum (z. B. homo), und einem zusammengesetzten auf der anderen, dem Definiens (z. B. animal rationale). Wegen dieser Gleichheit können die beiden Seiten im Denken wechselseitig für einander substituiert werden. Eine Definition ist an sich kein Urteil; sie ist weder wahr noch falsch, sondern ist einfach das Setzen eines ein-

---

cuments inédits. Paris 1901 (608 S.). Zu beiden vergl. man den „Kritischen Nachtrag“ in E. Cassirer, Leibniz' System. Marburg 1902.

[1]) Eine kritische Besprechung dieses Kapitels nach der französ. Ausgabe von 1905 brachte E. Cassirer in den Kantstudien 12. 1 (1907).

zelnen Namens für eine bestimmte Begriffsverbindung. Darum heisst sie Nominaldefinition oder besser „explizite Definition“. Konsequent ist sie auch als solche keine Quelle von Wahrheiten, da sich aus ihr niemals etwas anderes als sie selbst ergibt. Ebenso sind die Definitionen von den Axiomen, Postulaten oder Grundsätzen absolut verschieden (S. 43[1]). Allein, zu dieser Schilderung der Definitionen fügt C. eine wichtige Ergänzung hinzu. Jede Definition muss von einem Theorem begleitet sein, das die Existenz des definierten Objektes behauptet. Sie ist mit andern Worten von einem Existenzialurteil über die logische Existenz der definierten Synthese begleitet, nämlich darüber, „dass die definierenden Bedingungen nicht widersinnig, d. h. logisch unverträglich sind“ (41). „Diese Behauptung und nicht die Definition ist die Quelle von Wahrheit“ (42).

Die Methode der Reduktion führt zuletzt zu einigen undefinierbaren Begriffen, den Grundbegriffen, und einigen unbeweisbaren Sätzen, den Grundsätzen. Doch ist diese Undefinierbarkeit und Unbeweisbarkeit keine absolute, sondern nur eine relative, d. h. für jenes System, in welchem diese Begriffe und Sätze als Ausgangspunkte benutzt werden. In einem System mit anderen Definitionen und Reihenfolgen der Beweise könnten dieselben definiert und bewiesen werden. Da die Grundbegriffe selbst nicht definiert werden, so sind sie reine Symbole mit unbestimmtem Sinn. Sie müssen nur so gebraucht werden, dass sie den Grundsätzen genügen.

Für ein abgeschlossenes wissenschaftliches System ist nötig, dass die Grundsätze und Grundbegriffe irreduzibel seien, d. h. sich nicht von einander ableiten oder durcheinander definieren lassen. Man erkennt dies daran, ob die Verneinung eines dieser Elemente mit dem Bestehen aller übrigen verträglich ist. Ist dies so, dann kann jenes Element von den anderen nicht abhängig sein (40).

Dem nicht selten von mathematischer Seite zu hörenden Ausspruch gegenüber, die moderne Mathematik beweise die Unhaltbarkeit der Logik, hebe ich noch folgenden Satz C.s hervor: „Es gibt keine andere in der Mathematik gültige Beweisart als jene, die auch in der Logik Geltung hat“ (37)[1]. Doch sehen wir uns nunmehr einige der Grundbegriffe und Grundsätze der Logistik etwas genauer an.

---

[1]) Ebenso gesteht Poincaré, Wissensch. und Hypothese, deutsch von Lindemann, Lpz. 1906, 27. Die Macht des Verstandes „wird nur begrenzt durch die Notwendigkeit, Widersprüche zu vermeiden“.

III.

Wir wenden uns zu § A mit dem „Urteilskalkul“ (8—17). Nach dem soeben über die wissenschaftliche Methode Gehörten wird die Disposition dieses Abschnittes in der Darstellung der Elemente der Urteilslehre diese sein müssen: 1. Undefinierbare Begriffe, 2. Definitionen, 3. Unbeweisbare Grundsätze. Den „ersten undefinierbaren Begriff in diesem Kalkul“ findet C. in einer Relation, nämlich der, dass ein erstes Urteil ein zweites einschliesst. Um dieselbe zu symbolisieren, bezeichnet er die beiden Urteile durch p und q und schreibt „p schliesst q ein“ in folgender Form:

$$p \supset q$$

Das ist das Symbol der „Abhängigkeitsbeziehung zwischen zwei Sätzen“. Um dieselbe zu „erläutern“, bezeichnet C. sie durch eine Reihe daraus abgeleiteter, unter sich gleichwertiger Behauptungen. Die Formel soll nämlich bezeichnen: „Wenn p wahr, ist auch q wahr; wenn p falsch, ist auch q falsch;“ oder endlich „entweder ist p falsch, oder q wahr“. Offenbar handelt es sich bei dieser Formel um das Verhältnis, dass der Umfang von p den Umfang von q einschliesst. Wir können etwa an das Beispiel denken: ‚Alle Kreise sind Kurven‘; ‚einige Kreise sind Kurven‘.

Schon dieser erste Schritt der Logistik gibt zu Bedenken Anlass. Symbole und Formeln gewinnen offenbar für das Erkennen nur dann Wert, wenn sie nicht lediglich optisch apperzipiert, sondern auch geistig verstanden werden, d. h. einen Sinn haben. In diesem Sinn steckt der Begriff. Nun erhebt die Logistik zum ersten Anfangspunkt der ganzen Logik den Begriff des Einschliessens. Das ist aber evident nur dann möglich, wenn der Sinn dieses Begriffes ohne Voraussetzung anderer Begriffe verständlich ist. Trifft dies nun zu? Ohne Zweifel nicht. Vielmehr steckt in diesem „ersten“ Begriff ein ganzes Nest anderer, ohne ihn verständlicher Begriffe und Grundsätze. Muss sich doch C. zur Erläuterung seiner Formel der Begriffe (und nicht bloss der Wörter) bedienen: Urteil, wahr, falsch sowie des durch ‚Entweder-oder“ bezeichneten ausschliessenden Verhältnisses. Ferner sind die Relation des Einschliessens und die Abhängigkeit der Wahrheit und Falschheit von Urteilen von einander ganz und gar nicht identisch. Vielmehr folgt das zweite Verhältnis logisch aus dem ersten, setzt also bestimmte logische Grundsätze über Folgerungen voraus. Daher kann der Begriff des Einschliessens unmöglich den Anfangspunkt der ganzen Logik bilden. Seine Wahl dazu muss vielmehr die Logistik notwendig in Zirkelbewegungen verstricken. Das zeigt sich denn auch gleich bei ihrem zweiten Schritt.

Der zweite Schritt in der Logistik besteht in der Bildung der ersten Definition. Sie gilt dem Urteil. Dieses wird von C. im Anschluss an Russel auf den vorigen Begriff durch das Symbol zurückgeführt: p ɔ p, q ɔ q. Dies heisst: „Ein Urteil ist das, was sich selbst einschliesst". C. fügt hinzu, so werde das Identitätsprinzip zur Definition des Urteils benützt. Auch bemerkt er, dass „die Urteile allein einschliessen oder eingeschlossen sein können" (9).

Die Philosophie kann hier mit der Kritik nicht zurückhalten. Wir verstehen es aus dem Wesen der Mathematik recht gut, wenn die logisierenden Mathematiker einen quantitativen Relationsbegriff an den Anfang der Urteilslehre stellen. Allein, da wir einen Relationsbegriff nicht ohne die Relate, zwischen denen die Relation besteht, denken können, und da es sich im vorliegenden Falle um Urteile als die Relate der „Abhängkeitsbeziehung" handelt, so müssen im ersten Begriff die Urteile bereits mitgedacht werden. Es ist folglich ein Zirkel, sie in einem zweiten Begriff mittels des vorausgesetzten ersten Begriffes definieren zu wollen. Aber auch wenn wir hiervon absehen und die Definition des Urteils für sich selbst betrachten, müssen wir sie ablehnen. Mag man sonstige Definitionen noch so viel als blosse Namenserklärungen betrachten wollen, so kann man dies bei der Definition des Urteils doch zweifellos nicht tun. C. hebt, wie wir hörten, ausdrücklich die absolute Verschiedenheit von Begriffen und Urteilen hervor. Also muss die Definition der Urteile, wenn sie überhaupt diesen Namen verdienen soll, denselben Merkmale beilegen, durch die sie sich von den Begriffen unterscheiden. Und schon dies genügt, um darzutun, dass die begriffliche Konstruktion von Definitionen nicht nur formal, sondern auch sachlich gebunden ist, und durchaus nicht auf eine willkürliche Namensfestsetzung hinausläuft, die nur auf Vermeidung innerer Widersprüche im Definiens zu achten habe. Ferner ist anderswo C. sehr wohl bekannt, welche Eigenschaft mit dem Wesen des Urteils unlöslich verbunden ist. Sagt er doch von der Definition: „Diese Gleichung wird nicht als Urteil behauptet, sie ist weder wahr noch falsch" (S. 38). Uebrigens brauchen wir nicht einmal so weit zu gehen. Musste C. doch schon bei der Erläuterung seines „ersten undefinierbaren Begriffes" sich der Begriffe „wahr" und „falsch" bedienen. So konnte ihn also höchstens die äussere Formel zu der Meinung verführen, er beginne bloss mit dem Begriff der Abhängigkeitsbeziehung und könne mittels seiner die Begriffe „Urteil“, „Wahrheit“ usw. definieren. Was nun schliesslich die „Definition des Urteilsbegriffes durch das ‚Identitätsprinzip‘“ oder die Formel $p \supset p$, d. h. „ein Urteil ist das, was sich selbst einschliesst“ anbelangt, so ist auch jeder Begriff und jede Vorstellung mit sich selbst identisch, so dass das Merkmal der Identität mit sich selbst oder des Sichselbsteinschliessens mit nichten dem Urteil eigentümlich ist.

Wir können die Sachlage vielleicht durch eine andere Wendung unseres Argumentes noch mehr klären. Wenn die Formel $p \supset p$ die Definition des Urteils sein soll, so muss jemand, dem ich dieselbe vorlege, und dem ich ausserdem den ersten Begriff mitteile, d. h. dem ich sage, das Symbol $\supset$ bedeute den Begriff des Einschliessens, daraus entnehmen können, p bedeute ein Urteil, weil es sich selbst einschliesse. Davon kann aber keine Rede sein. Denn wer überhaupt versteht, was es heisse, sich selbst einschliessen, wird dies bei jeglichem Objekt finden, auf das er sein Denken richtet. Jede Vorstellung, jede Frage, jeder Wunsch, jede willkürliche Benennung u. s. w. schliesst sich selbst ein. Um sich selbst einzuschliessen, ist es also gar nicht nötig, dass das Denkobjekt entweder wahr oder falsch sei. Ferner begeht C. noch einen zweiten Fehler. Die Relation des Einschliessens und die Relation der Identität sind zwei durchaus zu unterscheidende Relationen; denn die erstere kann ohne die zweite bestehen. Daher ist es wenig exakt, das Symbol der ersten Relation auch zur Symbolisierung der zweiten Relation zu benutzen.

Der dritte Schritt der Logistik bringt als zweite Definition die „des logischen Produkts von zwei Urteilen“. Darunter soll die Behauptung verstanden werden, p und q seien zugleich wahr. Symbolisch wird geschrieben:

$p \frown q$ oder $p\,q$ „wie ein arithmetisches Produkt“ (9).

Hier müssen wir C. zugeben, dass das, wovon er spricht, in der Tat in den bisherigen Elementen, die er aufzählte, noch nicht enthalten war. Da nämlich die logische Möglichkeit besteht, dass nicht beide Urteile wahr seien, indem q wahr, p aber falsch sein kann, so bringt die Behauptung, dass sie beide wahr seien, wirklich etwas Neues für das Erkennen. Jedoch müssen wir fragen, aus welchem Grunde denn wohl das Zugleichwahrsein zweier Urteile als „logisches Produkt“ bezeichnet werde. Mit der arithmetischen Operation des Multiplizierens zweier Zahlen hat im allgemeinen das

Zugleichwahrsein zweier Urteile, auch wenn sie in einer Abhängigkeitsbeziehung stehen, doch nicht das mindeste zu tun. Nicht einmal in rein formaler Hinsicht herrscht Analogie. Indem aus 3×9 das Produkt 27 gebildet wird, tritt die Zahl 27 an die Stelle jener Operation 3×9. Dass aber zwei Urteile zugleich wahr seien, bedeutet doch nicht, dass ein gewisses drittes Urteil an ihre Stelle trete.

Bei C. folgt als dritte Definition die der „Gleichartigkeit von zwei Urteilen", oder die Definition des bekannten mathematischen Symbols $=$. Sie lautet:

$$p = q \,.\, = \,.\, p \supset q \,.\, q \supset p$$ [1]).

Dies bedeutet: „Die Aussage p ist gleich q heisst soviel als, p schliesst q und q p ein".

Diese Definition ist gewiss nicht schlecht. Sie bringt ferner offenbar wiederum ein neues Element für das Erkennen, weil ja das von p eingeschlossene Urteil an und für sich sowohl den gleichen als einen geringeren Umfang haben kann. Dennoch kann auch diese Definition der Aequipollenz von Urteilen die allgemeine Logik nicht ganz befriedigen. Sie stützt sich nämlich auf die Umfangsverhältnisse. Das ist aber für das Erkennen nicht das Primäre und Wesentliche; denn über die Umfangsverhältnisse kann das Denken nur auf Grund der Inhaltsbeziehungen entscheiden. Oder wie wollte man z. B. auf andere Weise erkennen, dass alle Behauptungen über die gleichseitigen Dreiecke auch von den gleichwinkeligen gelten? C. dreht das logische Verhältnis um, wenn er schreibt: „Man nimmt in der Logik der Klassen zwei Begriffe als gleichwertig an, sobald sie den gleichen Umfang haben, was zur Gleichsetzung von Begriffen mit verschiedenem Inhalt führt, beispielsweise Dreieck und Dreiseit" (29).

Hier sind wir auf den schwächsten Punkt der Logistik gestossen. Diese ist ihrer Tendenz nach der reinste Formalismus. Allen qualitativen Bestandteilen des Weltinhaltes entzieht sie das Qualitative, und behandelt infolgedessen die Merkmale des Inhaltes der Begriffe wie die inhaltleeren Summanden einer arithmetischen Addition. Damit aber hebt sie gerade das auf, was den Begiffen und Arten der Dinge ihren wesentlichen Unterschied von Zahlen und reinen Mannigfaltigkeiten verleiht. So fallen die qualitativen Verhältnisse aus dem Rahmen, den die Logistik umspannt, heraus. Daher ist dieselbe wohl die spezielle Logik der Mathematik, aber nimmer die allgemeine Logik der wissenschaftlichen Erkenntnis überhaupt. Indem C. schreibt:

---

[1]) Die Punkte sollen Klammern bedeuten.

„Es ist sicherlich nicht untersagt, die Begriffe und deren Beziehungen ihrem Inhalte nach zu denken, aber sie gehen in die Formeln nur mit ihrem Umfange ein. Es sind ihre Beziehungen zwischen den Umfängen, die als Grundlagen für den logischen Kalkul dienen“ (53), gesteht er, dass die Logistik keine Inhalts-, sondern eine Umfangslogik ist[1]). Wie wenig dies aber den allgemeinen Verhältnissen des Erkennens entspricht, lässt sich an einem einfachen Beispiel zeigen. Durch Addition von $4 + 3$ gewinnen wir die Zahl 7, und können somit sagen, dass 4 und 3 in der letzteren enthalten seien. Setzen wir nun damit den Begriff des Menschen in Parallele. Dieser lautet: homo est animal rationale. Er gestattet uns zu sagen: homo est animal. Dagegen gestattet uns das Enthaltensein von 4 und 3 in 7 mit nichten auch zu sagen: 7 ist 4. Daraus ist ersichtlich, dass die Vereinigung der Merkmale in einer Definition ein ganz anderer logischer Prozess ist als eine arithmetische Addition.

C. geht nunmehr dazu über, eine Reihe von Grundsätzen oder Prinzipien aufzuzählen und ihnen eine symbolische Form zu geben. Denselben im einzelnen zu folgen, würde uns zu weit führen. Sie sind durchweg auf die Mathematik zugeschnitten. Wir begnügen uns damit, das „Prinzip des Schlusses“ zu erwähnen. C. schreibt dasselbe: $p \supset q . q \supset r . \supset p \supset r .$ und nennt es: „Wenn p q einschliesst und q r, so schliesst p auch r ein“ (11). Doch fügt C. hinzu, disses Prinzip begründe erst durch Hinzutritt eines zweiten Prinzips „eine syllogistische Folgerung“, nämlich des Prinzips, dass, wenn die Abhängigkeit $p \supset q$ gültig und p wahr sei, auch q wahr sei, und zwar so, dass man es für sich allein behaupten könne. Nur mittels dieses Prinzips, das C. „das Prinzip der Deduktion“ nennt, könne man, falls die Prämissen wahr seien, den Schlusssatz für sich allein als wahr behaupten, und so diesen an die Stelle jener setzen (11). Der Sinn ist offenbar der, dass der Schlusssatz nur dann absolut wahr ist, wenn die Wahrheit der Prämissen feststeht. Im anderen Falle ist er nur hypothetisch wahr und kann niemals „für sich allein“ d. h. ohne Beziehung auf jene Prämissen als wahr ausgesagt werden.

Machen wir eine Probe auf die von C. aufgestellten Prinzipien des Syllogismus, so stehen wir wiederum vor Schwierigkeiten. Ein

---

[1]) Zur Kritik der Umfangstheorien des Urteils vergl. man B. Erdmann, Logik I², Halle 1907, § 287—291. Speziell gegen die mathematisierende Logik wendet sich § 164.

Beispiel für den Modus Barbara lautet: Alle Menschen sind sterblich. Alle Könige sind Menschen. Also sind alle Könige sterblich. Werden die logischen Abhängigkeiten dieses Schlussgefüges in der Definition bei C. richtig angegeben? Nun, dann müssten dieselben darin bestehen, dass p, also der Obersatz, q, den Untersatz, und dieses q wieder r, d. h. den Schlussatz, einschliesse. Offenbar nimmt C. dies an auf Grund der beliebten symbolischen Darstellung des genannten Syllogismus durch drei einander umschliessende Kreise. Diese Darstellung selbst beruht auf der Deutung der Urteile als der Subsumtion des Subjektsumfanges unter den Prädikatsumfang. Dass aber diese Auffassung der Subsumtionslogik den wirklichen Verhältnissen des Denkens nicht entsprechen kann, ergibt sich aus den inneren Widersprüchen, die nach dem Nachweis von Sextus Empiricus und R. H. Lotze daraus notwendig für das syllogistische Denkverfahren entstehen. Betrachten wir unser Beispiel näher. Wenn der weiteste Kreis den Obersatz symbolisiert, so darf man offenbar den Kreis, welcher den Untersatz symbolisiert, nicht in denselben hineinzeichnen. Da nämlich jener erste Kreis bedeutet, dass alle Menschen sterblich seien, so habe ich mit der Hineinsetzung des zweiten Kreises „Alle Könige sind Menschen" bereits entschieden, dass die Könige sterblich seien; denn das Sterblichsein ist ja der Sinn des ersten Kreises. Nun will ich das Sterblichsein der Könige aber doch erst erschliessen. Also darf ich den zweiten Kreis noch gar nicht dem ersten einzeichnen. Anders liegen die Verhältnisse, wenn wir vom Umfang der Begriffe sprechen und den Umfang des Subjektbegriffes Mensch im Obersatz durch einen Inhalt dieses Begriffes bestimmen, der „sterblich" noch nicht enthält und darum im Untersatz identisch festgehalten werden kann. Nur dann dürfen wir das angeführte Beispiel auflösen in ein System von Umfangsverhältnissen der drei Begriffe o, u, m nach dem Schema: u wird eingeschlossen von m, alle m werden eingeschlossen von o; also werden dies auch die u von den o. Es ist darum falsch, wenn C. statt von Begriffen von Urteilen spricht. Ausserdem verlaufen keinesfalls alle gültigen Weisen des Syllogismus nach dem genannten Schema der begrifflichen Umfangsverhältnisse.

Noch möchte ich auf die Auslegung der Disjunktion aufmerksam machen. Wir lesen: „Die logische Summe zweier Urteile p und q ist ein Urteil s, das von jedem von ihnen eingeschlossen wird und selbst jedes Urteil einschliesst, das von jedem von ihnen eingeschlossen wird .... Man wird sich mühelos klar, dass die logische Summe zweier Urteile ihre Disjunktion ist: »Entweder gilt p oder gilt q«. Man stellt sie dar durch p ⌣ q" (13).

Um uns diese Verhältnisse noch müheloser klar zu machen, wählen wir wieder ein konkretes Beispiel für ein disjunktives Urteil. ‚Gott ist entweder endlich oder unendlich'. Die zwei in Disjunktion stehenden Urteile lauten: Gott ist endlich (p); Gott ist unendlich (q). Jener erste Satz wird dagegen dem dritten Urteil s entsprechen. Dieses s ist nun nicht, wie es bei C. heisst, von dem p oder q eingeschlossen, sondern es schliesst umgekehrt diese ein, aber nicht als Summanden, aus deren Addition es entstünde. Vielmehr ist das disjunktive Urteil nur ein einziges Urteil und besagt, dass einem bestimmten Subjekt von zwei oder mehr Prädikaten eines zukommen muss und nur eines zukommen kann. Daraus folgt dann, dass sich das disjunktive Urteil in zwei oder mehr Urteile verwandeln lässt, die untereinander in der Abhängigkeit stehen, dass eines von ihnen und nur eines wahr ist. Lässt sich aber aus diesem Grunde das disjunktive Urteil als „logische Summe zweier Urteile" definieren? Nun, wir können die Zahl 7 verwandeln in die Summe der beiden Zahlen 4 + 3. Das bedeutet aber doch niemals in der Welt „entweder 4 oder 3", ebensowenig wie umgekehrt der Sinn von „entweder p oder q" so viel heisst als: Addiere p und q zum Urteil s. So kommen wir stets zu demselben Resultat, dass die Logistik den wahren Sinn der logischen Operationen in der Tendenz, sie zu mathematisieren, auf den Kopf stellt. Auch hier spricht sie von logischem Produkt und logischer Summe nur, um nachher die arithmetischen Operationen mit Hilfe dieser logischen Operationen zu definieren (55). Gewiss haben auch die arithmetischen Operationen den Sinn einer logisch richtigen Denkhandlung und gewiss ist es sehr erwünscht, das spezifische logische Wesen derselben klarzustellen. Nur möge man das letztere nicht, gehe es, wie es wolle, mit den Grundlagen der allgemeinen Logik identifizieren oder vermengen.

IV.

Machen wir uns nunmehr kurz mit dem Inhalt der beiden noch übrigen Abschnitte der Logistik bekannt. Der § B behandelt den Klassenkalkul (17—28). In ihm werden die mathematisch-logischen Beziehungen zwischen den „Klassen" in ähnlicher Weise festgestellt und mit Symbolen versehen, wie es im § A mit den

Urteilen geschah. So ist die Rede von der Gleichheit, der Identität, dem logischen Produkt, der logischen Summe der Klassen usw. Grundlegend ist daher hier der Begriff der „Klasse“. Dass es nun gerade leicht sei, diesen Begriff aus den Angaben von C. klar und deutlich zu entnehmen, wird wohl niemand behaupten können, der die Ausführungen bei C. liest. Versuchen wir darum ausfindig zu machen, was er meint.

C. geht von dem Begriff der Funktion aus. Das Wort Funktion bedeutet einen Ausdruck, der eine oder mehrere Veränderliche enthält. Wir schreiben ihn darum φx. Das Wort „Veränderliche“ bedeutet einen unbestimmten Ausdruck, an dessen Stelle man irgend welchen bestimmten Ausdruck setzen, oder dem man, anders ausgedrückt, einen bestimmten Wert geben kann. Die Funktionen nun, welche die Logik interessieren, sind „urteilsmässige Funktionen“, d. h. Funktionen, welche die Natur von Urteilen annehmen. Dies will heissen: Wenn man jener Veränderlichen oder jenem unbestimmten x einen bestimmten Wert gibt, so entsteht immer ein Urteil. Wählen wir ein Beispiel. Bilde ich den Satz: „x ist träge und ausgedehnt“, so habe ich kein Urteil gebildet; denn wegen der Unbestimmtheit des x kann von diesem Satze nicht mit Sinn gesagt werden, er sei entweder wahr oder falsch. Setze ich aber für das x als Wert etwa „der Diamant“ ein, so bekomme ich den Satz: „Der Diamant ist träge und ausgedehnt“; und dieser Satz ist natürlich ein Urteil. Eben darum bezeichnet C. den ersten, die Veränderliche enthaltenden Satz als „urteilsmässige Funktion“. Wenigstens scheint mir das der Sinn seiner dunklen Ausführungen zu sein; und ich dürfte mich darin wohl nicht irren. Nunmehr verstehen wir auch den Fortgang auf S. 18. Bleiben wir bei unserem Beispiel. An und für sich können wir für jenes x ganz beliebige Werte einsetzen; z. B. statt Diamant Gold, Wasser, Pflanze, Tier, Mensch, Tugend, Ton, Seele usw. Immer entsteht dabei ein Urteil[1]). Diese Urteile aber sind nicht alle auch wahr, sondern nur ein Teil von ihnen gilt, während der andere Teil nicht gilt. So wird durch eine solche urteilsmässige Funktion eine gewisse Mannigfaltigkeit von

---

[1]) Wenn wir nämlich auch sinnlose Verbindungen, wie „die Tugend ist ausgedehnt“ als Urteile betrachten, was sie, rein formal genommen, ja auch sind.

[2]) Couturat weicht hier prinzipiell von Russell ab, der die Klasse als undefinierbaren Begriff behandelt. Vgl. die Anschauung des letzteren bei Jonas Cohn, Voraussetzungen und Ziele des Erkennens, Leipzig 1908, 164 und die kritischen Bemerkungen S. 167 f.

Werten des x bestimmt, für welche sich aus ihr wahre Urteile ergeben. Diese Mannigfaltigkeit bezeichnet nun die Logistik als Klasse, sodass dieser Begriff durch die vorausgeschickten Begriffe in der Tat definiert ist [2]). Beispielsweise bildet die Summe aller Werte von x, welche die Funktion „x ist träge und ausgedehnt" „befriedigen", d. h. zu einem wahren Urteil machen, die Klasse der Körper. Daraus ersieht man zugleich ohne weiteres, dass es auch hier wieder **Umfangsbeziehungen** sind, aus denen die Logistik ihre grundlegenden logischen Elemente konstruiert. Durch die Urteile wird die Klasse bestimmt. Darum sagt die mathematische Logik: die Klasse entspricht einem Urteil.

Natürlich kann auch umgekehrt ein Urteil einer Klasse entsprechen, insofern ja ein Wert durch Befriedigung der die Klasse bestimmenden Merkmale als zu dieser Klasse gehörig, als ein Individuum derselben bestimmt ist [1]): Indem z. B. Sokrates den Bedingungen genügt, von welchen die Wahrheit der die Klasse Mensch bildenden Urteile abhängt, wird er zu einem Individuum dieser Klasse, entspricht er derselben. C. schreibt dies: $k \; \varepsilon \; a$: d. h. „k ist ein Individuum der Klasse a", oder „k ist a". Doch beachte man, dass nicht der Begriff des Individuums, sondern der Klasse der grundlegende ist.

Dass C. durch diese Definitionen der Klarheit in den Umfangsbeziehungen der Denkprozesse dient, ist unleugbar. Ich zitiere als Beleg seinen Satz: „Es empfiehlt sich, die beiden Beziehungen ε und $\supset$ sorgfältig zu unterscheiden, die, weil sie in der Sprache verwechselt werden, lange Zeit von den Logikern identifiziert wurden. Im klassischen Syllogismus z. B.: Alle Menschen sind sterblich; Sokrates ist ein Mensch; also ist Sokrates sterblich, ist die Kopula des Obersatzes $\supset$, die des Untersatzes jedoch und des Schlusssatzes ε . . . Daraus ergibt sich, dass vorstehender Syllogismus zur Formel hat: $a \supset b \,.\, \varkappa \, \varepsilon \, a \,.\, \supset .\, \varkappa \, \varepsilon \, b$, während ein gewöhnlicher Klassensyllogismus die Formel hat: $a \supset b \,.\, c \supset a \,.\, \supset .\, c \supset b$, die wohl zu unterscheiden ist von der vorausgehenden" (21). Das Individuum wird „nach der in der Mathematik herrschenden Uebung" von der Logistik „nicht definiert, wohl aber die Identität der Individuen. Man sagt, zwei Individuen k und l sind identisch, wenn das zweite jeder Klasse angehört, an der das erste teil hat" (26).

[1]) „Eine Klasse ist bestimmt, wenn von jedem beliebigen Gegenstande ausgemacht werden kann, ob er zu dieser Klasse gehört oder nicht." Klassen werden definiert entweder durch Aufzählen der zugehörigen Gegenstände oder durch einen Klassenbegriff (Cohn a. a. O. 164).

V.

Es bleibt uns noch übrig, die grundlegende Definition des § C, Kalkul der Relationen (28—36) darzulegen. Um eine beliebige Beziehung zwischen zwei Gliedern x und y zu symbolisieren, schreibt C. mit Russell: x R y. Hierin sind zu unterscheiden x als Vorderglied (referent) und y als Hinterglied (relatum) der Beziehung [1]). Es gibt nun eine gewisse Gesamtheit von Vordergliedern, für welche die Beziehung gültig ist, und ebenso von Hintergliedern. Jene Gesamtheit der Vorderglieder bezeichnet die Logistik als das Gebiet (domaine), die der Hinterglieder als das Mitgebiet der Beziehung, und benennt die Summe beider Gebiete als das Feld der Beziehung [2]). Bedeutet z. B. R „Vater", so besteht ihr Gebiet aus allen Vätern der Welt, ihr Mitgebiet aus allen Kindern, ihr Feld somit aus allen Menschen (30). An diese Definitionen schliesst C alsdann die Axiome des Relationenkalkuls an. Sie besagen, dass x R y für alle Werte, die man x und y gibt, ein entweder wahres oder falsches Urteil ist; ferner dass jede Beziehung umkehrbar ist, und dass die umgekehrte Beziehung so lange dieselbe bleibt, als die ursprüngliche dies tut. Ist A grösser als B, dann ist auch B kleiner als A. Ein drittes Axiom sagt: „Jede Beziehung hat eine Verneinung, die wieder eine Beziehung ist." Wird z. B. negiert »A ist grösser als B«, so wird behauptet, zwischen A und B bestehe eine Beziehung, durch welche die Beziehung »grösser« negiert wird, also entweder, dass beide gleich oder dass A kleiner als B sei [2]). Alsdann bespricht C die Verbindungen der Beziehung. Die erste derselben nennt er relative Multiplikation. Wenn gilt: x R y und y R^1 z, so besteht auch zwischen x und z eine gewisse Beziehung R^2, die man das „relative Produkt" der Beziehungen R und R^1 nennt, um auszusprechen, dass sie durch dieselben eindeutig bestimmt ist. Ist z. B. A der Bruder von B und B der Vater von C, so ist A der Oheim von C. Oheim =

[1]) Besser wäre vielleicht Relat und Korrelat.

[2]) Bei Jonas Cohn, Voraussetzungen und Ziele des Erkennens, Leipzig 1908, 133, lauten die Ausdrücke in der oben eingehaltenen Reihenfolge: das Bereich, das umgekehrte Bereich, das Gebiet der Relation. Schade, dass man hier keine einheitliche Ausdrucksweise verwendet. Im übrigen urteilt Cohn: „Dem Logiker muss von vornherein klar sein, dass unter den verschiedenen Formen der mathematischen Logik nur der Relationskalkul eine Zukunft hat; keineswegs der Klassenkalkul, der alle Einseitigkeiten der traditionellen Logik wieder aufnimmt, oder der sogenannte Urteilskalkul, der von der ganz unfruchtbaren Voraussetzung ausgeht, dass zwischen zwei beliebigen Urteilen stets eine Ein- oder Ausschliessung besteht" (132).

Bruder des Vaters, oder $R^2 = RR^1$. Sie lässt sich im allgemeinen nicht umkehren; denn die Gleichung: Oheim = Vater des Bruders (R^1R) wäre falsch; der Vater des Bruders ist vielmehr entweder Vater oder Stiefvater.

Es folgen eine Reihe wichtiger Einteilungen der Beziehung. Ist die umgekehrte Beziehung mit der ursprünglichen identisch ($xRy = yRx$), so ist R eine symmetrische Beziehung, z. B. $A = B$; $B = A$. Im entgegengesetzten Falle ist sie nichtsymmetrisch. Und ist das Verhältnis der umgekehrten Relation so, dass es mit der ursprünglichen Relation der betreffenden Relate unverträglich ist, so ist die Relation eine asymmetrische. Gilt z. B. »A vor B«, so lautet die Umkehr »B hinter A«. Da nun „hinter" zu „vor" sich so verhält, dass, wenn A vor B ist, es nicht zugleich hinter B sein kann, so ist „vor" eine asymmetrische Relation. Hätten wir aber den Satz »A hasst B«, so ist die Umkehr von »hasst« die Relation «wird gehasst», und da es zusammen bestehen kann, dass A B hasst und von B gehasst wird, so ist »hasst« eine nichtsymmetrische Relation.

Wenn sich aus xRy, yRz notwendig xRz ergibt, so nennt man R eine transitive Beziehung. Ist z. B. A grösser als B und B grösser als C, so folgt daraus, dass A auch grösser als C ist. Geht dagegen die Beziehung zwischen dem ersten und zweiten, dem zweiten und dritten Gliede auf das erste und dritte Glied nicht über, so ist die Relation nichttransitiv, bzw. bei Unverträglichkeit der entstandenen mit der ursprünglichen intransitiv. Haben wir: „A liebt B und B liebt C", so folgt nicht notwendig: „A liebt C". Lautet die Hypothese dagegen: „A Vater von B, B Vater von C", so folgt nicht „A Vater von C", sondern „A Grossvater von C"; und da A nicht sowohl Vater als Grossvater von C sein kann, so ist die Beziehung intransitiv. Sie ist zugleich asymmetrisch, da C Enkel von A, und A, wenn Grossvater von C, nicht auch Enkel von C sein kann.

Entspricht jedem Vordergliede (Relat) einer Beziehung ein und nur ein Hinterglied (Korrelat), so ist sie eine eindeutige Relation. Bedeutet z. B. in xRy das R „Kind-sein von", so bedeuten y die in der Welt vorhandenen Väter, und von diesen kann jedem der Kinder x immer nur einer entsprechen. Dagegen können mehrere Kinder denselben Vater haben, so dass also, wenn wir diese Relation umkehren, nicht mehr jedem Vordergliede (jedem Vater) ein und nur

[1]) So deute ich den Sinn des dritten Axioms auf S. 31.

ein Hinterglied entspricht, und somit diese Relation nicht mehr eindeutig ist. Ist aber in x R y die Relation so beschaffen, dass jedem Hintergliede im Vordergliede ein und nur ein Individuum entspricht, so nennt man dieselbe umgekehrt eindeutig. Im vorigen Beispiel war R dies nicht. Setzen wir aber für R „Vater" ein (x Vater von y), so kann jedem y (Kinde) nur ein x (Vater) entsprechen. Wenn schliesslich die Lage so ist, dass jedem Vordergliede nur ein Hinterglied und jedem Hintergliede nur ein Vorderglied entspricht, d. h. dass die beiden vorigen Fälle sich zusammen bewahrheiten, so ist die Relation eine eineindeutige. Soll z. B. in x R y das R das arithmetische Quadrat bedeuten, so ist dies eine eineindeutige Relation; denn jeder Zahl entspricht nur eine Quadratzahl und nur eine Quadratwurzel (2 R 4, 3 R 9, 4 R 16 usw.). Bezüglich der weiteren Ausführungen C.s über die kalkulatorische Behandlung der Beziehungen nach den Verhältnissen der Unterordnung, Gleichheit, des logischen Produktes und der logischen Summe verweise ich die Leser auf den Autor selbst (34 f.).

VI.

Wenn wir auch zu dem „Relationskalkul" der Logistik Stellung nehmen, so müssen wir anerkennen, dass in demselben, soweit wenigstens als er Relationslogik ist, ein gewisser Fortschritt gegenüber der traditionellen Logik liegt. Zweifellos betrachtet letztere das Urteil in einem so engen Umfange, dass viele Urteile des wissenschaftlichen Denkens entweder überhaupt nicht von ihr berücksichtigt werden oder doch nur durch gewaltsame, dem natürlichen Denken fremde Umformungen auf ihr Urteilsschema zurückgeführt werden können. Mir ist es schon seit Jahren klar, dass auch für die logische Betrachtung das Urteil nicht auf eine einzige Art der Beziehung zwischen Begriffen (sei es eine solche des Umfanges, sei es eine solche des Inhaltes) beschränkt werden darf, sondern als Beziehungserkenntnis überhaupt aufzufassen und zu behandeln ist.

Die scholastische Logik betrachtet das Urteil als „Identitätserklärung zweier Begriffe" oder als „Aussage über das sachliche Verbunden- bzw. Getrenntsein zweier Begriffe" u. dgl. [1]). Nun ver-

[1]) Bei Stöckl-Wohlmuth, Lehrbuch der Logik [8], Mainz 1905, 52 heisst es: „Das Urteil . . . ist jene Denktätigkeit, in welcher zwei Begriffe als Auffassungen eines und desselben Gegenstandes erklärt werden . . . Ein Begriff wird zum Subjekt durch einen Geistesakt, der ihn unter den Umfang eines anderen

gleiche man damit etwa die Urteile, deren sich G. Störring bei seinen Untersuchungen der Schlussprozesse bedient hat [1]). Dort finden wir Urteile wie: U links von L; A grösser als F; M über N; R früher als W usw. Sind dies nicht wirkliche und wahrhaftige Urteile? Wie kann man aber ihren Sinn in einem „Akt der Verstandestätigkeit des Subsumierens oder Identifizierens von Subjekt und Prädikat“ finden? Also ist die herkömmliche Urteilslehre mit ihrem Anspruch, allgemeine Urteilstheorie zu sein, nicht im Recht. Das gilt übrigens nicht nur für die scholastische Scholastik. Denn das Gesagte trifft z. B. auch die Bestimmung bei Sigwart [2]): „Der Akt des Urteilens besteht zunächst darin, dass beides (Subjekts- und Prädikatsvorstellung) mit Bewusstsein in Eins gesetzt wird.“ Ebenso scheint uns die „logische Einordnungstheorie“ B. Erdmanns möglichen Missverständnissen ausgesetzt zu sein, weil sie an Stelle von Umfangs- und Inhaltsbeziehungen das Wesen der Urteile in der logischen Immanenz und Einordnung des Prädikates in den Inhalt des Subjektes findet [3]). Allein, wenn ich urteile: „A grösser als B“, so ordne ich weder B dem Inhalt von A, noch A dem Inhalt von B ein [4]), sondern behaupte einfach das Bestehen der betreffenden Beziehung. Richtiger definiert darum Jonas Cohn den allgemeinen Sinn der Urteile, wenn er sagt [5]): „Ein Urteil bejaht oder verneint die Beziehung zwischen zwei Gegenständen.“ Allerdings möchte ich diese Definition nicht völlig zur meinen machen,

---

stellt oder ihn subsumiert. Zum Prädikat wird ein Begriff, wenn ihn ein Geistesakt als seinem Gegenstand nach identisch mit dem Gegenstand eines andern erklärt.“ Vgl. ferner Seb. Huber, Grundzüge der Logik und Noëtik, Pad. 1906, 25, oder Frick S. J., Logica [4], Freiburg 1908, 41: „Assensus mentis in cognitam idearum identitatem vel diversitatem.“ Ferner Alf. Lehmen S. J., Logik [2], Freiburg 1904, 56: „Urteil ist jene Verstandestätigkeit, durch welche die objektive Identität zweier Begriffe behauptet oder verneint wird.“

[1]) Archiv f. d. ges. Psychol. 11. 1 (1908); oder Philos. Jahrb. 21. 3 (1908) 376.

[2]) Logik I [3], Tüb. 1904, § 9 S. 67 (nach Aristot. *De an.* III 6. 430 a 27). Verwandt damit ist die Definition bei Th. Elsenhans: „Das Urteil ist der Akt der Ineinssetzung oder Trennung zweier Begriffe, der mit dem Bewusstsein seiner Allgemeingültigkeit vollzogen wird“ (Psychol. und Logik [4], Leipzig [Göschen] 1903, 74.

[3]) Logik I [2], Halle 1907, § 294 S. 358 f.

[4]) In diesen Urteilen hat der Unterschied von Subjekt und Prädikat, wenn wir darunter A und B verstehen, nur noch psychologische Bedeutung; noch mehr tritt das hervor in Urteilen wie „a = b“. Vgl. Jonas Cohn a. a. O. 90 f.

[5]) a. A. O. S. 89; nachdem eine Kritik der Identitätstheorien vorausgegangen.

sondern würde vorziehen, etwa zu sagen: Die Urteile bestehen nach ihrem Erkenntnisinhalt in der Bejahung oder Verneinung von Relationen. Will ich jedoch die Wahrheitsnatur der Urteile hervorheben, so sage ich: Urteile sind gegenständlich normierte Erkenntnisinhalte. Beide Definitionen sind leicht zu verbinden. Denn die Relationserkenntnisse und nur diese haben einen Gegenstand im Sinne eines ihren Inhalt bestimmenden Objektes. Ist ja doch die Relation durch die sie fundierenden Relate gebunden. Eine Schwierigkeit entsteht nur von seiten der Existenzialurteile. Doch findet man bei näherem Zusehen als Inhalt des einem S beigelegten Prädikates der Existenz eine Relation. In seinem allgemeinsten Sinne bezeichnet nämlich die Aussage der Existenz eines S, dass dieses S von mir vorgefunden ist, dass es mein Wahrnehmen als Objekt erfüllt. Diese Relation zu einem wahrnehmenden Subjekt, d. h.: „S ist ein durch Wahrnehmen vorfindbares Objekt", ist der allgemeinste Sinn der Existenzialaussage. Im engeren Sinne der Realexistenz bedeutet Existenz erstens „an sich selbst wahrnehmbar", zweitens „ein das Wahrgenommene mittelbar oder unmittelbar Wirkendes". Daher fallen auch die Existenzialurteile unter die Relationserkenntnisse [1]).

Für die logische Behandlung des Urteils in dieser erweiterten Auffassung desselben als einer Behauptung über Relationen kann die Logistik sicherlich gute Dienste leisten. Auch dürfte dabei ein massvoller Gebrauch von Symbolen der Prägnanz der Darstellung zugute kommen. Ist dies doch auch nichts Neues mehr für die Logik, da ja nicht nur die Kreisschemata, sondern auch die Buchstabensymbole S, P, M, a, e, i, o schon längst zu ihrem eisernen Bestande gehören, von Barbara, celarent usw. zu schweigen. Ferner bemühen sich auch neuere Logiker um die Einführung neuer Symbole [2]).

Ein Allheilmittel gegen logische Irrgänge sind auch Logistik und Symbolismus nicht [3]). Will ferner die Logistik vor allen anderen

---

[1]) Ueber die Natur des Urteils im allgemeinen sowie auch über die oben berührte Frage der Relationslogik bringe ich in einer demnächst zu veröffentlichenden Schrift genauere Erörterungen.

[2]) Z. B. B. Erdmann a. a. O. 359; oder Wildschrey, Grundlagen einer vollständigen Syllogistik, Halle 1907, 11, 15, 16 usw.

[3]) Ein empirischer Beweis dafür liegt in dem Werke von Couturat selbst vor. Wir lesen S. 8: „Man muss die Evidenz weniger hoch anschlagen, ein Moment, das ganz subjektiv, also veränderlich und rein psychologisch, also der Logik fremd ist." Und doch beruft sich Couturat S. 12 und 15 für gewisse

Logiken wenigstens den ungeschmälerten Vorzug der Klarheit haben, so muss sie sich herablassen, zu uns, denen die Geheimnisse der höheren Mathematik nicht geläufig sind, nicht nur in Symbolen und nicht nur in der Ausdrucksweise der Mathematiker, sondern in der schlichten Sprache des allgemeinen wissenschaftlichen Denkens zu reden. Darin schliesse ich mich Max Verworn an, indem ich auf das Verhältnis des logisierenden Mathematikers zum Philosophen das übertrage, was er vom Verhältnis des Philosophen zum Naturforscher sagt[1]): „Es ist höchst bedauerlich, dass gerade in Deutschland, im Volke der Denker, die babylonische Sprachenverwirrung so weit gegangen ist, dass zwei Männer auf zwei verschiedenen Gebieten der Forschung, sobald sie in ihrer Fachsprache reden, sich nicht mehr verstehen . . . Wir sollen danach streben, auf jedem Gebiete menschlichen Geisteslebens eine allgemein menschliche Sprache zu pflegen. Ich behaupte, das ist durchführbar, selbst wenn die einzelnen Wissenschaften ihre unentbehrlichen Spezialbegriffe und Fachausdrücke prägen."

Sätze auf ihre „Evidenz" und kritisiert S. 61 an der „Definition durch Postulate", dass bei ihr „die Einzigkeit des definierten Objekts nicht als evident erscheint."

[1]) Die Frage nach den Grenzen der Erkenntnis, Jena 1908, 7 f.