Philosophischer Sprechsaal.

Ueber die Begriffe: Grenze, Anfang und Ende.

Von C. Isenkrahe.

I. Die Definitionen. Mit interessanten Bemerkungen über die in der Ueberschrift genannten drei Begriffe, die ja für manche Einzelgebiete der Philosophie, der Mathematik und nicht minder auch der Apologetik von ganz hervorragender Bedeutung sind, beginnt Herr Dr. Hartmann die längere Besprechung, die er im ersten Heft des 29. Bandes vorliegender Zeitschrift meinem Buche über „Das Endliche und das Unendliche"[1]) gewidmet hat. In dieser Schrift war auch ich von demselben Punkte ausgegangen, hatte die Aeusserungen scholastischer Philosophen mit den Anschauungen der modernen Mathematik verglichen und das Ergebnis meiner Erörterungen in Form von Definitionen zum Ausdruck gebracht. Hierüber sagt Dr. H. auf S. 72 zunächst: „Wir leugnen natürlich nicht die hohe Wichtigkeit des von Isenkrahe definierten Gebildes", aber er hat Einwendungen, und eben wegen der „hohen Wichtigkeit" der Sache wird es sich lohnen, diese Einwendungen sorgfältig zu beachten und sie im einzelnen auf ihre Kraft und Geltung zu prüfen.

Die belangreichsten unter den von mir aufgestellten Definitionen hat Dr. H. auf S. 71 richtig wiedergegeben; ich möchte sie aber hier nochmals anführen, um mich nachher auf sie beziehen zu können. — Mit dem Namen „Grenze" soll ein Etwas bezeichnet werden, zu dessen näherer Bestimmung folgende „spezifischen Merkmale" dienen: 1) Es ist enthalten in irgend einem Seins- oder Vorstellungsgebiete, aber in so eigentümlicher Weise, dass es keinen Teil desselben ausmacht. 2) Es gehört immer zwei Teilbereichen jenes Allgemeingebietes zugleich und in gleicher Weise an, ist aber wiederum kein Teil, weder vom einen, noch vom anderen. 3) Es kann selber wiederum aus Teilen bestehen, und sowohl diese, als auch Grenzen derselben in sich enthalten. — Ich selbst hatte in meinem Buche (S. 19) hier noch angefügt: „Je nachdem dies nicht der Fall, oder der Fall, oder in verschiedener Weise der Fall ist, lassen sich Grenzgebilde verschiedener Ordnung unterscheiden." Ferner hatte ich in engem Anschluss an diese Aussagen über die „Grenze" auch drei Sätze über „das Begrenzte" folgendermassen aufgestellt: 1) Etwas Begrenztes muss immer Teilbereich sein, dem ein korrelativer Teilbereich zugeordnet ist, so zwar, dass beide einunddieselbe Grenze gemeinschaftlich haben. 2) Das Begrenzte unterscheidet sich von seinem korrelativen Teilbereich dadurch, dass einunddieselbe Aussage α dem einen bejahend, dem andern verneinend zuzuordnen ist. 3) Das Begrenzte mitsamt seinem korrelativen Teilbereich muss enthalten sein in einem Allgemeingebiet. Daher muss es eine Aussage β

[1]) Isenkrahe, Das Endliche und das Unendliche. Schärfung beider Begriffe. Erörterung vielfacher Streitfragen und Beweisführungen, in denen sie Verwendung finden. Münster. Schöningh, 1915.

geben, die sowohl von dem Begrenzten, als auch von dessen korrelativem Teilbereiche und somit von jenem Allgemeingebiet, jenem „idem ordo" [der Scholastiker] zutrifft.

Bezüglich der Begriffe „Anfang" und „Ende" gibt Dr. H. einen Teil meiner Aeusserungen zwar nicht genau wörtlich, aber dem Inhalte nach richtig folgendermassen wieder: „Wird nämlich das Allgemeingebiet A durch die Grenze G in die Teilgebiete B und C zerlegt, so denken wir uns innerhalb des Teilgebietes B eine auf die Grenze G hin gerichtete Bewegung, welche diese Grenze auch wirklich erreicht und durchschneidet. Dann ist G das Ende von B, aber auch zugleich der Anfang von C. Insofern nun an jeder Grenze G immer zwei korrelative Bereiche B und C zugleich haften, so folgt, dass jeder Anfang auch ein Ende, und jedes Ende auch ein Anfang ist." — Zu meinem Bedauern aber bricht Dr. H. sein Zitat schon hier ab und setzt den Satz, der bei mir (S. 22) unmittelbar darauffolgt, nicht mehr dahinter. Ich werde gleich darauf zurückkommen.

Meinen vorstehend mitgeteilten Begriffserklärungen verweigert Dr. H. seine Zustimmung. Was insbesondere den „Anfang" betrifft, so sagt er: „Dieser Definition können wir nicht beipflichten." — Warum denn nicht? — „Sie ist sprachwidrig, und darum in gewissem Sinne gefährlich."

Sprachwidrig! Die scharfe Unterscheidung und Entscheidung zwischen Sprachrichtigkeit und Sprachwidrigkeit ist bekanntlich eine recht missliche und bedenkliche Aufgabe, bei der Vorsicht geboten. Zur Stütze seines Vorwurfs führt Dr. H. aus, dass das Wort „Anfang" auch gebraucht werde, ohne dass man einen korrelativen Teilbereich dabei in Betracht ziehe. Eben dieser Gedanke ist es aber, den ich selber schon vorgebracht hatte in dem vorerwähnten Satze, der auf H.s Zitat unmittelbar folgt, und den er nicht mit aufgenommen hat. Ich schrieb dort: „Freilich wird ja wohl in ausserordentlich vielen Fällen die „Grenze" nur als Ende oder nur als Anfang des jedesmal grade erwogenen Teilbereichs in Betracht gezogen, ohne dass man an dessen Korrelativum überhaupt denkt." Die Existenz solcher „Nur"-Fälle habe ich, wie man sieht, als eine ganz bekannte Sache schon vorgesehen,[1]) hielt darum die Vorführung von Beispielen für unnötig, und nun ist es interessant, dass Dr. H. grade ein derartiges Beispiel wählt, um damit die „Sprachwidrigkeit" meiner Sinnerklärung des Wortes „Anfang" darzutun.

II. Linie und Strecke. Das Beispiel ist folgendes: „Denken wir uns eine gerade Linie, die sich vom Punkte P zum Punkte Q erstreckt, so nennen wir P den Anfang, Q das Ende der Linie, weil P der erste, Q der letzte Punkt der Linie ist. P ist der erste Punkt, weil ihm kein anderer Punkt der Linie vorausgeht, Q der letzte, weil ihm kein Punkt der Linie nachfolgt. Dabei kommt es gar nicht in Betracht, ob P zugleich als letzter Punkt einer unserer Linie vorhergehenden, Q als erster Punkt einer ihr nachfolgenden Linie angesehen werden kann." —

Ist das nicht ein ganz unverkennbarer „Nur"-Fall? — Herr Dr. H. hat nämlich gleich zu Anfang an der Stelle, wo das „Nur" hingehört, es in seinen Satz zwar augenscheinlich hineingedacht, aber für selbstverständlich gehalten, und darum nicht hineingeschrieben. Seinen Folgerungen könnte man ja unmöglich zustimmen, wenn man nicht unterstellte, er habe sagen wollen: „Denken wir uns eine gerade Linie, die sich nur vom Punkte P bis nur zum Punkte Q erstreckt, dann nennen wir usw."

[1]) Auf gleiche Weise hatte ich diesen Gedanken in „Natur und Offenbarung" 1908, S. 141 bereits ausgesprochen.

Dieses „mentale", sprachlich „latent" gebliebene Doppel-„Nur" hat für den besonderen „Denk"-Akt, zu dem das erste Wort seines obigen Satzes uns auffordert, offenbar eine „vetitive" Gewalt, und eben dieses „Veto" ist es, worauf alle Folgerungen beruhen. Bliebe z. B. der Punkt Q, so frage ich, auch dann noch als „letzter Punkt" in sicherer Geltung, wenn Herr Dr. H. seine Anweisung: „Denken wir uns" von dem „Nur"-Veto befreite? — Gewiss nicht! — Eine sehr wichtige Linie z. B., die man häufig „Nullmeridian" nennt, „erstreckt" sich „vom" Pol P „zur" Greenwicher Sternwarte Q. Dieses blosse „vom — zum — Erstrecken" genügt aber an und für sich noch keineswegs, um auszusagen, Q sei „der letzte Punkt" dieser „Linie"; sie geht vielmehr weiter bis zum Gegenpol und würde auch dort noch weiter gehen, würde in sich selbst zurücklaufen, wenn nicht wiederum ein „Nur"-Veto sie daran hinderte, nämlich die Bestimmung, dass Meridiane per definitionem „nur" Halbkreise sind. Grade in dem Umstand, dass solch ein „Nur"-Veto angewendet wird, um bei geraden Linien und geschlossenen Kurven von einem „ersten" und einem „letzten" Punkte, von einem „Anfang" und „Ende" überhaupt erst reden zu dürfen, liegt der Hinweis, dass man bei Ermangelung dieses besonderen Verbots mit seinem „Denken" beide Teilbereiche, die an einen Punkt anstossen, in Betracht zu ziehen hat. — Geschieht das denn auch immer? — Freilich nicht! Die Aufmerksamkeit des Denkenden, Redenden oder Schreibenden ist eben sehr häufig eine einseitige: darauf habe ich ja in meinem Buche vorbeugenderweise schon hingewiesen! — „Aber [so heisst es an der vorhin zitierten Stelle bei mir noch weiter], wenn es auf Schärfe ankommt, und wenn alles zu einer Sache [es sei z. B. Gerade oder Kreis] Gehörige ins Auge gefasst werden muss [und nicht etwa ein den Weg absperrendes Veto hingestellt worden ist], dann darf nicht übersehen werden, dass jede Grenze zweien korrelativen Teilbereichen zugleich angehört usw."

Noch eine Bemerkung zur „Sprachwidrigkeit" mag hier am Platze sein. — Herr Dr. H. spricht von einer „Linie", die sich „vom Punkte P zum Punkte Q erstreckt" und nennt „P den Anfang, Q das Ende der Linie." — Wenn der Geometer von einer „Linie" PQ spricht, so pflegt er darunter eine Gerade zu verstehen, deren Lage in der Ebene durch die Punkte P und Q eindeutig bestimmt ist. Wohl sagt er mit dieser Benennung aus, dass in dieser Ebene diese Linie „sich vom Punkte P zum Punkte Q erstrecke," aber über „Anfang und Ende" derselben hat er damit eigentlich noch gar nichts ausgesagt. Will er letzteres tun, so nennt er sein Objekt nicht „Linie", sondern „Strecke" PQ.[1]) Durch die Bezeichnung „Strecke" ist per definitionem das „Nur"-Veto ausgesprochen,[2]) ist die einseitige Betrachtungsweise eigens und ausdrücklich vorgeschrieben. „Dabei" — so schreibt Dr. H. — „kommt es nicht in Betracht, ob P zugleich usw." Freilich kommt der Teilbereich, der abgeblendet ist, für den zwangsweise eingeschränkten Blick „nicht in Betracht", solange und in dem Masse, als er eben abgeblendet ist. Das uneingezwängte, freie Auge hört darum nicht auf, ihn zu sehen. Es sieht sowohl bei P, als auch bei Q immer noch beides, das Diesseits und das Jenseits, es sieht zwei „Anfänge" und zwei Enden". Und nicht wird diese Aussage etwa „sprachwidrig" durch den

---

[1]) Belege: Wellstein, Encyklopädie, S. 87. Auerbach, Taschenbuch 1909, S. 80. Schwering, Handbuch S. 175 usw. usw.

[2]) In besseren mathematischen Büchern pflegt man diesem „Veto" noch einen besondern Nachdruck zu geben, indem man über die Buchstaben P und Q einen horizontalen Strich legt. Wo also das Schriftbild $\overline{PQ}$ sich vorfindet, hat es die Bedeutung: Von der durch die Punkte P und Q ihrer Lage nach bestimmten Geraden darf und soll hic et nunc nur das Stück von P bis Q in Betracht genommen werden.

Umstand, das die Terminologie der Geometer vorschreibt: Solange speziell von der „Strecke $\overline{PQ}$" oder ihresgleichen die Rede ist, soll nur ein Anfang und nur ein Ende „in Betracht kommen." — Der Befehl „Augen rechts" löscht von der Netzhaut der marschierenden Soldaten das Bild der linken Strassenseite aus. Aber darum behält die Strasse ihre beiden „Ufer" doch, und der unbeeinflusste Bürger sieht sie auch. — Der Sonderfall der „Ausgenommenheit", als ein solcher typisch gekennzeichnet, bringt die Regel nicht um und macht ihren Wortlaut nicht schon „sprachwidrig".

III. Elemente einer Menge. Sein PQ Beispiel hat Herr Dr. H. dem „Geburtslande" der Begriffe „Grenze, Anfang, Ende" entnommen, nämlich dem Bereich des Ausgedehnten. Aber der Zweck, die „Sprachwidrigkeit" meiner Definitionen darzutun, veranlasste ihn noch zu einem zweiten Beispiel, und bei diesem sprang er über auf ein ganz anderes und anders artiges Feld. Nämlich in das Gebiet der Mengen begab er sich und wählte dort als brauchbares Muster das Alphabet aus. Nun ist ja überhaupt stets Vorsicht geboten, wenn man einen Begriff von seiner Geburtsstätte her in einen fremdartigen Boden umpflanzt, und so hat es auch im Gebiet der „Mengenlehre" grade mit den Begriffen „Anfang und Ende" eine eigenartige Bewandtnis. Treten wir rein objektiv an die Sache heran und fragen: Wie kommt eine Menge als solche, d. h. als Vielheit von Elementen, in den Eigenbesitz einer Eigenschaft, zufolge deren wir von ihr aussagen können, sie hat einen Anfang? — Man stelle sich z. B. die „Menge" der Fliegen vor, die an einem Sommertag sich in einem bestimmten Zimmer aufhalten; was heisst da „Anfang"? Oder man denke an die Inseln im Meere u. dergl. — Damit bei einem Betrachtungsgegenstande dieser Art die Aussage vom „Anfang" Vernunft habe, muss zuvor eine Gedankenbrücke gebaut werden, die im Gebiet des Ausgedehnten beginnt und bei der betreffenden „Menge" landet. Diese Brücke heisst Ordnung, und ihr Erbauer und Beschreiter ist der Mensch. Wer da sagt: „Das Alphabet hat einen Anfang", sagt damit eigentlich, wie leicht zu sehen, etwas aus von menschlichem Tun und Getanhaben. Das Alphabet enthält in sich eine Vielheit von Sprachlauten bezw. Lautzeichen. „Hatte" denn aber diese Vielheit etwa einen „Anfang", bevor ein Mensch (ein Phönizier mags gewesen sein) auf die Idee kam, seinem Zeichen für den Laut a die Wertzahl 1 (auch die Griechen setzten danach $\alpha = 1$) zuzuordnen? Der Denkakt, vermittels dessen er diese Idee fasste, begann in irgend einem Augenblick, und dieser Zeit-Punkt schied, wie jeder Zeitpunkt es tut, ein Früher von einem Später, indem er zwischen beiden die „Grenze" bildete. Mochte jener Mensch sodann die Wertzahlen 2, 3 usw. andern Lautzeichen zuordnen, bis deren Vorrat erschöpft war, so trat der Schluss dieser Arbeit ein wiederum in irgend einem Zeitpunkt, der zwischen dem zugehörigen Früher und Später die „Grenze" bildet. So war es zunächst die Menschenarbeit, die „Anfang" und „Ende" hatte; das Ergebnis dieser Arbeit nahm aber dann mittels einer sehr üblichen und sehr beliebten „Uebertragung", die man „kausale Metonymie", nennen darf, Anteil an dieser Bezeichnungsweise. Umgestaltet war jetzt die Vielheit der Laute bezw. Lautzeichen zu einer geordneten Menge und ihr dadurch eine Eigenschaft beigebracht, die uns erst die Möglichkeit gab, objektivierenderweise auch von ihrem „Anfang" und „Ende" zu reden. Mag man nunmehr jene erfundene Reihenfolge der Laute mündlich hersagen, so hat dieser Sprechakt wiederum „Anfang" und „Ende" in der Zeit, und was dem Akte eigen ist, überträgt man auf das Objekt. Mag man die Reihenfolge der Zeichen auf eine Zeile nebeneinanderschreiben, so scheidet das Schriftbild aus der Linie eine beschriebene Strecke aus, die

räumlicherweise „Anfang“ und „Ende“ nebst dem zugehörigen Vorher und Nachher hat, und was dem Schriftbilde eigen, überträgt man auf das abstrakte Objekt. Die „Gedankenbrücke“, von der ich sprach, liegt vor Augen. Die „Uebertragung“ geschieht, aber sie geschieht so gewohnheitsmässig, so „automatisch“, dass sie — wie ja wohl die ganze „Genesis“ des Alphabets — zumeist völlig unbeachtet bleibt. Und das gehört auch zu den Dingen, von welchen ich in meinem Buche im voraus sagte: Man überlegt sich das nicht! In ausserordentlich vielen Fällen denkt man nicht daran! Zu sagen das Alphabet selber ist ein Ding, welches Anfang und Ende hat oder besitzt, ist wohl ebenso landläufig und dabei doch gedanklich ebenso ungründlich, wie wenn man sagt, der peloponesische Krieg oder die Leipziger Messe, oder „Die Wacht am Rhein“ usw. seien Dinge, an sich selbst behaftet mit der Eigenschaft, dass sie Anfang und Ende hatten bezw. haben. Sobald man tiefer geht, zeigt sich, dass das übertragene[1]) Ausdrucksweisen sind, und dass Anfang und Ende dabei in letzter Instanz am menschlichen Tun bezw. an räumlichen Strecken haften. In Bezug auf solche Ausdrucksweisen oder mit Berufung auf sie von „Sprachwidrigkeit“ zu reden, ist eine sehr heikle Sache.

Weil Herr Dr. H. aber gerade auf die Sprachbehandlung Schwerton gelegt hat, möchte ich noch einige sprachliche Bemerkungen anschliessen. — Er gab seinem zweiten Beispiel folgenden Wortlaut: „Dasselbe ist der Fall, wenn wir den Buchstaben a als den Anfang, den Buchstaben z als das Ende des Alphabets bezeichnen. Wer würde die Richtigkeit dieser Bezeichnung davon abhängig machen, ob a als das Ende einer vorhergehenden, z als Anfang einer folgenden Reihe betrachtet werden kann? Es handelt sich eben, [nur!] um Eigenschaften der betrachteten Menge selbst, nicht aber um Beziehungen derselben zu andern Reihen.“

Herr Dr. H. wählt den Ausdruck: „Wir bezeichnen a als den Anfang des Alphabets.“ Genauer dem objektiven Sachverhalt angepasst wäre die Form gewesen: Wir beginnen die Reihe der Buchstaben mit a. Achten wir auf das Wörtchen „mit“! Die Bedeutung desselben bei Vorführung von Mengenelementen tritt namentlich dann hervor, wenn letztere die Teile eines ausgedehnten Ganzen sind. Der Januar z. B., ist er „der Anfang“ des Jahres; kann er zu Recht „als solcher bzeichnet“ werden? — Keineswegs! — Ist denn der erste Januar der Anfang des Jahres? — Keineswegs! — Ist denn die erste Sekunde des ersten Januar der Anfang des Jahres? — Keineswegs! Sondern derjenige unteilbare Augenblick ist es, in welchem die erste Sekunde des ersten Januar anfängt. Und indem diese erste Sekunde anfängt, fängt „mit“ ihr zugleich der Monat Januar und das Jahr an. So auch: Indem wir bei Vorführung der Buchstabenreihe den Buchstaben oder den Laut a zu schreiben oder auszusprechen beginnen, fängt „mit“ diesem Akt das Alphabet an, und in dem Augenblick, in welchem das Schriftbild oder der Schall endet, ist das Alphabet gleichzeitig „mit“ zu Ende. Untrennbar aber haftet an diesem Augenblick ein zeitliches Früher und Später, untrennbar an dem Schriftbild oder Drucksatz ein räumliches Vorher und Nachher. Freilich: daran „denkt man zumeist nicht“.

Aber weiter! — Es lohnt sich wohl zu fragen, ob es der bei „Mengen“ gebräuchlichsten Sprechweise denn auch wirklich gemäss ist, a als den „Anfang“, z als das „Ende“ zu bezeichnen. — Gewiss will ich nicht behaupten, solch eine Terminologie sei in mathematischen Büchern beim Kapitel über die „Mengenlehre“ nirgendwo anzutreffen. Begegnet ist sie mir aber noch nicht, nur einen latinisierenden Anklang

[1]) Selbstverständlich denke ich nicht im mindesten daran, sie etwa deswegen zu tadeln.

daran habe ich bei Hessenberg[1]) vorgefunden, der die Worte „koinitial“ und „konfinal“ als Eigenschaftsbezeichnung benutzt zur bequemen Abkürzung eines sprachlich unbequemen Relativsatzes. Da aber, wo es besonders auf Deutlichkeit und Genauigkeit ankommt, z. B. bei Erklärung des scharfen Unterschieds zwischen „Sprung“ und „Lücke“, vermeidet er die Worte „Anfang“ und „Ende“ ganz, indem er definiert: „Ein Schnitt heisst Sprung, wenn der Abschnitt ein letztes und der Rest ein erstes Element enthält“ usw. Und so erklärt auch Schönfliess[2]) ausdrücklich: „Enthält die Menge ein Element, das jedem andern vorangeht, so heisst es [nicht etwa „der Anfang“, sondern]: das erste Element ...“ Genauer also und der üblichen Sprechweise gemässer hätte auch wohl Dr. H. sich ausgedrückt, wenn er „a“ nicht als den „Anfang“, sondern als den „ersten Buchstaben“ des Alphabets vorgeführt hätte. Unter dieser besser gewählten Benennung aber würde sein „a“ natürlich gar keine Stütze des gegen meine „Definition“ erhobenen Vorwurfs der „Sprachwidrigkeit“ mehr bilden; denn den hatte er ja eigens an das Wort „Anfang“ befestigt. Ueberhaupt halte ich es nach vorstehendem nunmehr für ersichtlich, dass auch das zweite Beispiel des Herrn Dr. H. seinem Beweiszweck nicht genügt. — Aber wenn ich von den beiden, die er ausgewählt hat, meinen Blick abwende und weitere Umschau halte, so finde ich in der Tat keinen Fall, in welchem eine Verwendung des Wortes „Anfang“, die den objektiven Sachverhalt völlig deckt, ihm genau angepasst und nicht etwa durch ein besonderes „Nur“-Verbot eingezwängt ist, gänzlich losgelöst erschiene vom Begriff der „Grenze“, finde auch keinen Fall, in welchem eine Grenze gänzlich losgelöst wäre von dem Gedanken: „diesseits ja — jenseits nein“, oder umgekehrt, so dass der Jabezirk „endet“, wo der Neinbezirk „anfängt“ und umgekehrt.

Doch gesetzt einmal, es existierten wirklich solche Beispiele, würden sie dann wohl Macht haben, die „Sprachwidrigkeit“ — einzig von dieser ist ja hier die Rede — der Definition als ein unstatthaftes Verfahren beweiskräftig zu erhärten? — Diese Frage ordnet sich ein in die allgemeinere: Darf eine philosophische Erörterung gewissen Worten einen bestimmt definierten Sinn auch dann beilegen, wenn es eine Anzahl von Fällen gibt, bei denen diese Worte in einem anderen Sinn gebraucht werden? — Wer das schlankweg als „sprachwidrig“ untersagen will, möge sich überlegen, welche Sprach-Sünden er dann in Bezug auf viele Benennungen, z. B. Begriff, Urteil, Idee, Potenz, Akt usw. usw. sogar den gelobtesten Philosophen vorzuwerfen hat.

IV. Grenze und Schnitt. Herr Dr. H. lässt es bei dem gegen meine Definitionen erhobenen Vorwurf der „Sprachwidrigkeit“ nicht bewenden, sondern knüpft auch einen sprachlichen Verbesserungsvorschlag an, indem er schreibt: „Wir leugnen natürlich nicht die hohe Wichtigkeit des von Isenkrahe definierten Gebildes, aber er sollte [so hingestellt ohne Beifügung irgend einer Klausel oder Einschränkung] es nicht »Grenze« oder »Anfang« oder »Ende« nennen, sondern so, wie man es in der mathematischen Wissenschaft zu nennen pflegt, nämlich »Schnitt«. Für den Schnitt ist es wesentlich, dass er ein Ganzes in zwei korrelative Teile zerschneidet, für den Anfang [!] ist es gleichgültig.“ — Das meiste kommt hier auf den Schlusssatz an, diesen aber halte ich für verfehlt, und zwar aus folgendem Grunde:

---

[1]) „Mengenlehre“ in Auerbachs Taschenbuch 1911, S. 75.

[2]) „Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung“ 1900, S. 28.

Man führe sich das „von J. definierte Gebilde“ nebst dessen Benennungen „Grenze“, „Anfang“, „Ende“ recht genau vor Augen! Wennschon von der „Grenze“ ausgesagt worden ist, dass sie zugleich „Anfang“ und „Ende“ sei, so sind die beiden letzten Namen doch relative,[1]) d. h. sie gelten (was ja ihre genetische Definition ausdrücklich besagt) im Hinblick auf eine wirklich oder in Gedanken vollzogene Bewegung, sowie noch speziell auf deren bestimmte Richtung. Denn die zwischen zwei Teilgebieten liegende „Grenze“ ist „Anfang“ zu nennen nur in Hinsicht auf das bei der Bewegung erstrebte, „Ende“ nur in Hinsicht auf das zu verlassende Teilgebiet; den „Grenzen“ als solchen aber ist diese Bezugsetzung zu einer Bewegung so ohne weiteres noch gar nicht eigen. An und für sich schauen sie (man vergegenwärtige sich z. B. ihre Wiedergabe in den „politischen Landkarten“) weder nach vorwärts noch nach rückwärts, weder nach rechts noch nach links; sie sind nach keiner Seite hin „orientiert“. Nun sagt Dr. H., das „hochwichtige Gebilde“ solle „nicht Grenze oder Anfang oder Ende, sondern Schnitt“ genannt werden. Will man aber für den ersten unter diesen drei Namen, also für „Grenze“, ein Ersatzwort haben, und soll das Ersatzwort seinen Dienst genau richtig besorgen, so muss es für jede Richtung indifferent sein. Vorgeschlagen ist „Schnitt“, also darf diesem Worte — von seiner Mehrdeutigkeit später — überhaupt keine Beziehung zu irgend einer Bewegung, keine „Orientierung“ nach dem erstrebten Teilgebiet hin oder von dem zu verlassenden Teilgebiet her beigelegt werden, und darum darf man es auch nicht schlechthin zu dem Begriff „Anfang“ in Parallele setzen. Die terminologische Konkurrenz sollte demnach nicht geformt werden: „Anfang — Schnitt“, sondern „Grenze — Schnitt“. Und so hätte der obige Schlusssatz des Herrn Dr. H., insofern er seinen Verbesserungsvorschlag in „konzinner und korrekter“ Form begründen soll, heissen müssen: „Für den Schnitt ist es wesentlich, dass er ein Ganzes in zwei korrelative Teile zerschneidet, für die Grenze ist es gleichgültig.“ Damit bekommt die vorgeschlagene „Verbesserung“ aber ein ganz anderes Gesicht, und man darf wohl fragen: Welchen Wert und Nutzen hat sie überhaupt? — Herr Dr. H. hat zur Erreichung seines Zweckes „Beispiele“ gewählt; möge auch mir die Anführung von Beispielen gestattet sein.

Es gibt ein „hochwichtiges Gebilde“ namens Aequator, welches die Erdoberfläche in „zwei korrelative Teile zerschneidet“, nämlich in die nördliche und die südliche Hemisphäre. Sollen wir nun etwa nach der Vorschrift des Herrn Dr. H. zur Vermeidung von „Sprachwidrigkeit“ gehalten sein, den Aequator nicht als „Grenze“, sondern als „Schnitt“ zwischen beiden Hemisphären zu bezeichnen? — Welcher Vorteil steckt darin? — Und gesetzt ein Australienfahrer äusserte in dem Augenblick, da er den Aequator passiert: Hier ist der „Anfang“ der südlichen, das „Ende“ der nördlichen Hemisphäre, oder äusserte sich bei der Heimfahrt in umgekehrter Weise: hätten wir dann, vom strengen Standpunkte aus erwogen, begründeten Anlass zu einer sprachlichen Korrektur? Müssten wir, und zwar durch Benutzung des Wortes „Schnitt“, seine Rede verbessern? — Jeder möge beurteilen, ob und wie! — Und welche Lehre bekommen die Astronomen? —

[1]) Dass ein Gegenstand eine allgemeine und dabei auch noch zwei relative Bezeichnungen hat, kommt bekanntlich auch sonst vor. So heisst z. B. der zweite Planet allgemein „Venus“, aber dabei auch „Abendstern“ und „Morgenstern“. Man wird wohl von der „Venus“, aber nicht vom „Abendstern“ sagen können, er sei verschwunden in der Morgendämmerung. Und sehr verwirrend würde es wirken, wenn man irgendwo von „Wolframs Lied an die Venus“ läse, statt von seinem berühmten „Lied an den Abendstern“.

Sollen sie den Augenblick, da die Sonne in das Zeichen des Widders tritt — um Sprachwidrigkeit zu vermeiden — nicht mehr als „Grenz"-Punkt, sondern als „Schnitt" zwischen zwei Jahreszeiten zu bezeichnen haben? Und bleibt eben dieser Augenblick, ganz gleichgültig ob er „Grenze" oder „Schnitt" heisst, nicht doch auf jeden Fall Winters-„Ende" und Frühlings-„Anfang" zugleich? — Ich höre einwenden: Aber in der Tat ist der Frühlingspunkt doch durch einen „Schnitt" gekennzeichnet, nämlich durch den Durchschnitt des Aequators mit der Ekliptik! — Sehr wohl! Aber wie verhält es sich denn mit den Solstitien? Da fällt dieser Schnitt der beiden Kreise weg. Immer aber bildet ein und derselbe Zeitpunkt zwischen zwei Jahreszeiten die „Grenze", bildet auch des Frühlings „Ende" zugleich mit Sommers „Anfang", oder des Herbstes Ende zugleich mit dem Anfang des Winters.

V. Hartmann oder Killing? Doch von allen „Beispielen", die sich unter mancherlei Hinsichten ja noch häufen liessen, mag abgesehen und einmal auf den besonderen Umstand hingewiesen werden, dass Dr. H. seinen Verbesserungsvorschlag ausdrücklich auf die Terminologie der „mathematischen Wissenschaft" gestützt hat. Da ist es nun zunächst von eigenartigem Interesse, dass seine Korrektur der Sache nach gerichtet ist gerade gegen einen hervorragenden Vertreter der „mathematischen Wissenschaft", nämlich gegen Killing. Selber sagt D. H. ja auch, dass ich den Begriff der „Grenze" definiert habe „ im Anschluss an Killings Grundlagen der Geometrie". Und diesen „Anschluss" habe ich in meinem Buche durch mehrfache Beiziehung der entscheidenden Ausführungen Killings sehr deutlich gemacht. Wenn also im 2. Bande von Killings preisgekröntem Werk auf S. 227 die meinerseits zitierte Stelle steht: „Zerlegen wir einen Raum A in zwei Teile B und C, so lässt sich jeder Körper k in gleichzeitige teilweise Deckung mit B und C bringen . . . Aus diesem Grunde sagen wir, k liege auf der Grenze von B und C", dann hält Dr. H. nicht mir allein, sondern vorerst schon dem hochangesehenen Mathematiker vor: Sie „sollten" das betr. Gebilde, „auf welchem k liegt", nicht „Grenze", nennen, sondern „so, wie man es in der mathematischen Wissenschaft zu nennen pflegt, nämlich Schnitt"! — Der von Dr. H. verbesserte Killingsche Text würde demgemäss lauten: „Aus diesem Grunde sagen wir, k liege auf dem Schnitt von [oder etwa zwischen?] B und C." — Aber wie ginge die Verbesserung dann wohl weiter? Wie soll nachher der Ausdruck „aneinander grenzen" sprachlich berichtigt werden? Etwa durch: an denselben Schnitt anstossen? — dann läse der korrigierte Killing-Text sich etwa folgendermaßen: „Zwei Schnitte [statt Grenzgebilde] erster Ordnung stossen an denselben Schnitt an [statt grenzen aneinander], wenn sie als die beiden Teile eines einzigen Schnittes erster Ordnung betrachtet werden können. In diesem Falle sagen wir auch, sie hätten — — Was denn? — Killing schreibt: „eine gegenseitige Grenze". Wie hätte er schreiben „sollen"? —

Dem Herrn Geheimrat in Münster wird man es zunächst überlassen müssen, die Korrektur des Herrn Dr. H. zu bewerten. Aber die Sache geht einigermassen auch noch andere Leute an, z. B. die Geographen und die Landmesser. Diese haben es ja von Berufs wegen unzählige Male mit hochwichtigen „Gebilden" zu tun, die „ein Ganzes in zwei korrelative Teile zerschneiden." Werden die wohl als eine dankenswerte Verbesserung den Vorschlag begrüssen, sie „sollen" (zwecks Vermeidung von Sprachwidrigkeit) nicht mehr reden z. B. von der „Grenze", sondern von dem „Schnitt" zwischen Preussen und Bayern, sie sollen z. B. bei landwirtschaftlichen Erbteilungen nicht die „Grenzen", sondern die „Schnitte" der einzelnen Lose durch Messung feststellen? Da würden ja beiläufig auch wohl die „Grenz"-Pfähle konsequenterweise in „Schnitt"-Pfähle umgetauft. — Mancherlei sprachlicher Holper und

dabei kein bemerkenswerter sachlicher Nutzen: Das möchte der Erfolg solchen Verbesserungsvorschlages sein.

VI. Die Definition als Prüfstein. Noch aus einem anderen wichtigen Gesichtspunkte haben wir unsern Gegenstand zu betrachten. — Herr Dr. H. legt ja, wie schon gesagt, Ton auf die „mathematische Wissenschaft". Was ist es denn eigentlich, was man „in der mathematischen Wissenschaft »Schnitt« zu nennen pflegt"? — Nicht brauche ich hier daran zu erinnern, wie sehr vieldeutig dieses empfohlene Wort in der Sprache des Volkes ist: Hat z. B. der Kaufmann ein gutes Geschäft gemacht, so hat er einen „Schnitt" gemacht. Wenn Damen über die Machart eines Kleides abfällig urteilen, so finden sie den „Schnitt" desselben verpfuscht, veraltet usw.; Gegenstände von Papier, die Holz-„Schnitte" heissen, hängen unter Glas und Rahmen an Zimmerwänden. — Dieser Fehler der Mehrdeutigkeit haftet dem Worte „Schnitt" aber auch noch an in der Sprache unserer exaktesten Wissenschaft, der Mathematik. Sehr berühmt und in neuerer Zeit besonders „modern" geworden ist derjenige „Schnitt", den Dedekind 1872 in die Arithmetik eingeführt hat. Er ist heimisch in der Mengenlehre, umfasst, wovon schon Rede war, drei besondere Arten, welche die Namen: „Lücke, Einschnitt, Sprung" führen, hängt eng zusammen mit dem, was „Abschnitt" und was „Rest" heisst, und man kann kaum zweifeln, dass Dr. H. da, wo er S. 77 das Wort „Schnitt" in nahe Beziehung gerade zu den Begriffen „Sprung" und „Abschnitt" setzt, unter „Schnitt" nichts anderes als den Dedekindschen Schnitt hat verstanden wissen wollen.

Eine zweite, der Art nach ganz verschiedene Bedeutung hat das Wort in der Zusammenstellung: „Goldener Schnitt". Wenn der Mathematiker von diesem redet, so versteht er strenggenommen darunter eine Aufgabe, die Vollziehung eines bestimmten Schneide-Aktes, übereinstimmend etwa mit dem Sprachgebrauch der Chirurgie, wenn sie von „Kaiserschnitt" spricht. In derselben Weise auch, wie die Worte „Schlag", „Stoss" usw., bedeutet bei der „sectio aurea vel divina" das Wort „Schnitt" ein Tun. Wohl kann man ja nachher auch von dem Ergebnis dieses Tuns aussagen: das ist der goldene Schnitt; dann geschieht das aber schon in einem übertragenen Wortsinne, wie etwa, wenn man bei besonders knapper Sprechweise sagte: Diese Beule ist ein Stoss, oder von einer Wunde urteilt: das ist kein Bajonettstich, das ist ein Schuss.

Wiederum anders liegt die Sache in einer dritten Sinnauffassung. Unter „Kegelschnitten", „Längs-, Quer- und Diagonalschnitten", unter „Hauptschnitten" bei schiefen Zylindern oder Kegeln pflegt der Mathematiker unmittelbar die Ergebnisse von Schneide-Akten zu verstehen, nämlich Schnittfiguren, also Flächen, oder auch deren Umrisse, also Linien. Der „Höhen-Schnitt" im Dreieck legt als Produkt eines Schneideaktes einen Punkt fest. — Da haben wir also drei begrifflich verschiedene Bedeutungen: 1) Schnitt als Mengenelement, 2) Schnitt als Vollziehung eines Aktes, 3) Schnitt als Ergebnis eines Aktes.

Herr Dr. H. wendet das Wort an auf S. 72, 73 und 77. Da er keinen Unterschied in seiner Auffassung desselben angibt, so muss man wohl, obschon dabei Schwierigkeiten obwalten, unterstellen, dass er ihm nur einerlei, also jedesmal den gleichen Sinn beilegt, und aus dem vorhin schon angegebenen Grunde liegt es am nächsten zu denken: Wo Dr. H. vom „Schnitt in der mathematischen Wissenschaft" spricht, meint er den Dedekindschen. Nehmen wir also das als den wahrscheinlichsten Fall zunächst einmal an, so ist der Sinn seines Verbesserungsvorschlages, der, dass als Benennung für das „von Isenkrahe definierte hochwichtige Gebilde" nicht das Wort Grenze, sondern das Wort Schnitt im Sinne Dedekinds

gewählt werden „solle". Nun schiebt sich aber der Frage, ob dieser Namenswechsel eine Verbesserung bedeute, zunächst doch wohl die andere Frage vorauf, ob er überhaupt zulässig sei. Diese Zulässigkeit hängt offenbar davon ab, ob das unter dem Namen „Schnitt" präsentierte Etwas auch wirklich diejenigen „spezifischen Merkmale" an sich trägt, die das in Rede stehende „Gebilde" per definitionem an sich tragen muss. Ich finde nicht, dass Dr. H. diese präliminarische Prüfung vorgenommen hätte. — Gleich das erste „spezifische Merkmal" kennzeichnet, wie vorhin im Abschnitt I angegeben, das definierte Gebilde als ein solches, welches „in irgend einem Seins- oder Vorstellungsgebiete enthalten ist, aber in so eigentümlicher Weise, dass es keinen Teil desselben ausmacht". Wie verhält es sich in dieser Hinsicht mit dem „Schnitt"?

Herr Dr. H. beruft sich auf den Mathematiker Hessenberg. Möge das auch mir gestattet sein. In seiner Schrift: „Das Unendliche in der Mathematik"[1]) heisst es u. a.: „. . . Man sieht nunmehr leicht, dass die [eben in Rede stehenden] Schnitte alle Eigenschaften der Irrationalzahlen besitzen . . . Wir können also jetzt die Schnitte kurzweg Irrationalzahlen nennen, ausgeschlossen natürlich die [anderswo bereits] durch Rationalzahlen definierten Schnitte." Er zeigt auch, „wie die vier Spezies [d. h. Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren, Dividieren] auf die Schnitte angewandt werden." — Nun ist ja wohl klar, dass die Schnitte in ihrer Eigenschaft als Zahlen „enthalten sind in einem gewissen Seins- oder Vorstellungsgebiete", z. B. in dem „Zahlkörper der reellen Zahlen", und dass sie somit der ersten Hälfte des „Merkmals Nr. 1" entsprechen. Allein, was gerade das entscheidende Kriterium ist: Sind sie in diesem Gebiete etwa auch enthalten „in einer so eigentümlichen Weise, dass sie keinen Teil desselben bilden"? —

Nein! — denn woraus bestehen die Mengen überhaupt? — Aus ihren Elementen! Nichts anderes als die Elemente sind es, welche Teile, die Bestandteile einer Menge ausmachen, und so gehört jede rationale oder irrationale Zahl, die zu irgend einem Sonderzwecke als „Schnitt" in Betracht genommen ist, z. B. 2 oder $\sqrt{2}$, dem Gebiet der reellen Zahlen als wirklicher Bestandteil, als Element an. Das aber ist dem „definierten Gebilde" ausdrücklich verboten! — Sogar noch einen Schritt weiter als Hessenberg geht der berühmte Mathematiker Henri Poincaré. Er schreibt[2]): „Wählen wir aus dem Kontinuum K eine gewisse Anzahl von Elementen auf ganz willkürliche Weise! Die Gesamtheit dieser [ausgewählten] Elemente wird »Schnitt« genannt." — So ist also in demjenigen „Seins- oder Vorstellungsgebiet", welches Zahlenkontinuum heisst, nach Poincaré der „Schnitt" nicht nur „enthalten", sondern er macht offensichtlich auch einen wesentlichen Teil desselben aus. —

Es wird nicht nötig sein, noch andere mathematische Autoren[3]) anzuführen, um darzutun, dass das, was „man in der mathematischen Wissenschaft mit dem Namen »Schnitte« zu benennen pflegt", dem ersten „spezifischen Merkmal" nicht genügt. Der Schnitt bildet an und für sich einen Teil des „Allgemeingebiets", in welchem er enthalten ist. Er trennt durch seine markierte Existenz alle vorherigen Elemente von den nachfolgenden und — zugleich im Widerspruch mit dem zweiten „spezifischen Merkmal" des „definierten Gebildes" — kann er auch den „Teilbereichen" eingefügt werden als zugehöriger „Teil". Somit entspricht er keineswegs der Kennzeichnung desjenigen „Gebil-

[1]) „Abhandlungen der Friesschen Schule, Neue Folge". Göttingen 1904, S. 184 f.

[2]) Henri Poincaré, „Der Wert der Wissenschaft", Leipzig 1906, S. 73.

[3]) Z. B. Hilbert, „Grundlagen etc." 3. Aufl. S. 256.

des", welches von mir „im Anschluss an Killing" definiert worden ist unter dem Namen „Grenze". Diesem so definierten Gebilde den Namen „Schnitt" zu geben, ist demnach nicht nur keine „Verbesserung", sondern unverträglich mit der Definition.

Erweitern wir jetzt das Gesichtsfeld, indem wir nicht mehr bloss die Menge M der abstrakten Zahlen, sondern irgend eine andere Menge M′ in Betracht ziehen, so sind die Elemente von M′ denen von M umkehrbar eindeutig zuzuordnen, und wenn irgend ein Element s in M als „Schnitt" in Betracht genommen wird, so ist das zugeordnete Element s′ innerhalb der Menge M′ selbstverständlich der zugeordnete „Schnitt". Ebenso umgekehrt. Die Schnitte s und s′ bilden „Teile", bilden Bestandteile der entsprechenden „Allgemeingebiete", nämlich der Mengen M und M′. Dadurch stellen sie — gleichgültig um welche Gegenstände es sich im einzelnen handelt — sich in Widerspruch mit dem wichtigsten „spezifischen Merkmal", welches die Definition dem in Rede stehenden „Gebilde" vorschreibt. Keineswegs also darf von diesem Gebilde schlechthin ausgesagt werden, es sei das, was „man in der mathematischen Wissenschaft »Schnitt« zu nennen pflegt." — —

Nun ist ja bisher bloss die erste mathematische Sinnauffassung des Wortes Schnitt an den „spezifischen Merkmalen" geprüft worden. Aber man muss bedenken, dass diese erste heutzutage die „modernste" ist. Und überhaupt: Wenn in einem mathematischen Zusammenhange das Wort „Schnitt" so für sich allein steht, ohne einen Zusatz wie etwa „goldener Schnitt", „Kegelschnitt", „Querschnitt", „Hauptschnitt" usw., und wenn das Obwalten einer Bedeutung dieser Art sich auch nicht etwa aus dem Zusammenhange von selber ergibt, so pflegt man von vornherein den „Schnitt" im Sinne Dedekinds zu nehmen. Wer also die Bezeichnung „Grenze" schlechthin durch „Schnitt" ersetzen, aber gerade den „Dedekind-Schnitt" nicht darunter verstanden wissen will, tut etwas an und für sich schon Bedenkliches. Zum allermindesten aber muss erwartet werden, dass er diesen Ausschluss, wenn er ihn beabsichtigt, auch eigens ausspreche.

Der Vollständigkeit halber möchte ich nun doch nicht unterlassen, die beiden anderen vorhin erwähnten Sinnauffassungen des Wortes „Schnitt" ebenfalls den „spezifischen Merkmalen" des definierten Gebildes prüfend gegenüberzustellen. — Der „Schnitt als Vollziehung eines Aktes" mag zwar in irgend einem Allgemeingebiet „enthalten sein", z. B. erstens in der Menge der Akte, die irgend jemand im Laufe seines Lebens überhaupt setzt. In diesem Falle bildet er offenbar auch ein „Element", also einen „Teil" der Menge, in welcher er enthalten ist, was er nach der „Definition" nicht darf. Wollte man aber zweitens den durch den „Schnitt in zwei korrelative Teile zerteilten" Gegenstand als das „Allgemeingebiet" in Betracht ziehen, so bildete der „Schnitt als Akt" zwar „keinen Teil" desselben, aber er ist dann auch gar nicht in ihm „enthalten", was er nach der Definition muss. Mithin ist auf keinen Fall das „spezifische Merkmal" vorhanden. —

Der „Schnitt als Ergebnis eines Aktes" liegt vor in den mehrfachen schon erörterten Fällen: beim Aequator, bei den Grenzen der Jahreszeiten, bei den Kartenstrichen, den Verbindungslinien der Grenzpfähle usw. usw. Diese genügen alle der Definition, weil sie eben „Grenzen" sind. Wählt man dafür das Wort „Schnitt" in der dritten Sinnauffassung, so liegt darin doch im Grunde genommen gar nichts weiter, als der Gedanke, die betr. „Grenze" verdanke ihre Existenz irgend einem Akte des Schneidens. — Wenn nach dem tobenden Kriege in die Karten mehrerer Weltteile neue Striche hineinkommen, so gehören diese zu den „von I. definierten hochwichtigen Gebilden". Jeder von diesen Strichen „zerschneidet irgend ein Ganzes in zwei korrelative Teile". Mag man sie nun gemäss der „Verbesserung"

des Dr. H. nicht etwa neue „Grenzen", sondern neue „Schnitte" nennen: welchen sachlichen Vorteil hat das? — Und ist, wenn man weiter blickt, die Kennzeichnung der „Grenze" als Ergebnis eines Schneide-Aktes denn auch immer die passendste und nächstliegende? — Zum Beispiel im Falle, dass es sich um die Küstenränder der Meere als „Grenzen" zwischen Land- und Wasserbedeckung der Erdoberfläche handelt? — Diese Ränder „begrenzen" beides, Land und Wasser; dass dabei aber eine mit dem Worte „Schnitt" geformte Ausdrucksweise vorzuziehen sei, wird gewiss manchem nicht einleuchten. — Erwägt der Leser noch ausserdem die vorhin erörterten Gründe, weshalb das Wort „Schnitt" in dem mathematisch hervorstechenden Sinne aufgefasst, als definitionswidrig überhaupt unzulässig erscheint zur Bezeichnung des „definierten Gebildes", so mag er sich selbst sein Schlussurteil bilden, ob der Verbesserungsvorschlag des Herrn Dr. H. nicht doch als ungeeignet abzulehnen ist.

VII. Der mir vorgeworfene Fehlschluss. Aber „gefährlich", so betont Dr. H. zweimal, sei es, dem durch seine spezifischen Merkmale definierten Gebilde statt des richtigen Namens „Schnitt" den „sprachwidrigen" Namen „Grenze" zu geben. Denn, so sagt er, „sprachwidrige Definitionen führen leicht zu Fehlschlüssen. Auch Isenkrahe ist dieser Gefahr nicht entgangen." Nun führt er aus: „Man kann sich bekanntlich kein Ende des Raumes vorstellen, über alle Schranken schreitet er hinaus. Hierfür will nun Isenkrahe einen »logisch zureichenden Grund« angeben." — Nicht füglich anzunehmen ist, dass etwa schon das ein Unternehmen sei, was Tadel verdiente. „Vorstellung" ist ja doch sehr verschieden von „logischem Grund". Und haben die Mathematiker es nicht stets so gehalten, dass sie den durch die „Vorstellung" gewonnenen Ueberzeugungen auch noch „logische Gründe" zu unterlegen suchten? — Beispiel: die Zentrale zweier sich schneidenden Kreise ist kleiner als die Summe der Radien. Dass sie im Gegenteil gleich oder grösser sein sollte, kann man sich offenbar „nicht vorstellen". Trotzdem führen alle Lehrbücher „logische Gründe" für die Richtigkeit obiger Aussage ins Feld. Sie leiten dieselbe ab aus den „Definitionen" und bringen das „mit Leichtigkeit" fertig. In entsprechender Weise habe auch ich durch Kombination der vorgeschlagenen Raumdefinition und der Grenzdefinition einen „logischen Grund" abgeleitet für eine Einsicht, die wir auf dem Gebiet unserer „vorstellenden" Geistestätigkeit ebenfalls erwerben. So wenig, wie dieses Unternehmen an und für sich ein Fehler ist, wird es auch ein Fehler sein, dass es mir, wie Dr. H. sagt, „mit Leichtigkeit gelingt". — Nun, wo steckt der Fehler denn?

Nachdem Dr. H. meine Ableitung zitiert hat, führt er weiter aus: „Welchen Sinn könnte denn diese Meinung [nämlich die von Isenkrahe bestrittene und zu widerlegende Meinung, der Raum sei durch „Plassmannsche Bretter" oder „Weinsteinsche Wände" abgeschlossen] haben? Offenbar nur diesen: es gibt letzte Raumflächen. Letzte Raumflächen wären nicht etwa solche, jenseits derer kein Raum mehr wäre — mit dem »jenseits« wäre ja schon Raum vorausgesetzt — sondern [letzte Raumflächen wären] solche, in Bezug auf welche von einem »jenseits« nicht mehr gesprochen werden könnte."

Das von Dr. H. dem „nicht" hier gegenübergestellte „sondern" ist genau zu besehen! Ich frage: Bilden die mit diesem „sondern" vorgeführten Objekte überhaupt einen vernünftigen Redegegenstand? Oder sind es nicht einfach Undinge? — Sie heissen doch eigens „letzte" Raumflächen, sind also von beliebigen andern Raumflächen gekennzeichnet einzig und allein durch das Beiwort „letzte". Was besagt diese Kennzeichnung denn? — Der letzte Hohenstaufe war derjenige, nach dessen Lebensende kein Hohenstaufe mehr existierte. Sein Todes-

augenblick bildete die Scheide zwischen dem temporalen Diesseits Ja — Jenseits Nein. Ohne das jenseitige Nein hätte der hingerichtete Konradin offenbar nicht der „letzte" Hohenstaufe genannt werden dürfen. — Und so sagt Dr. H. in dem von ihm gewählten, schon erwähnten Beispiel ja selbst: „Q ist der letzte [Punkt der Linie PQ]". — Wieso ist er der „letzte"? — „Weil, so fügt er bei, ihm kein Punkt der Linie nachfolgt." — Da haben wir ja das lokale Jenseits als entscheidendes, als wesentlich begründendes Merkmal aufgeführt im Begriff „letzt". Wie soll nun bei einer Raumfläche „von einem Jenseits nicht mehr gesprochen werden können", diese aber das Merkmal, die „letzte" zu sein, dennoch an sich tragen! — Wenn Dr. H. seine Benennung „Q ist der letzte Punkt" selber erklärt und begründet mit den Worten: „weil ihm kein Punkt der Linie nachfolgt", so kann er doch niemanden verwehren zu sagen: „R ist die letzte Raumfläche, weil ihr keine Fläche des Raumes nachfolgt." Und mit diesem räumlichen „Nachfolgen" ist ipso facto der Griff ins „Jenseits" gedanklich schon vollzogen. Das Jenseits darf also nicht einfach unberücksichtigt, darf auch nicht im Belieben bleiben, sondern es muss in Betracht gezogen, muss dabei in Worten oder wenigstens in Gedanken ausdrücklich mit einer Negation behaftet werden, sofern die Aussage „letztes Objekt" einen kennzeichnenden Sinn haben soll. Darum bilden die von Dr. H. in seinem „Sondern"-Satze vorgewiesenen Objekte, nämlich Raumflächen, welche „letzte" sein sollen, ohne dass von einem Jenseits dabei überhaupt „gesprochen werden" kann, gar keinen existenzberechtigten Redegegenstand, bilden kein Ding, von dem mir hätte obliegen können, irgend etwas zu „beweisen".

Aber weiter: Herr Dr. H. sagte also, letzte Raumflächen sollen solche sein „in Bezug auf welche von einem jenseits nicht mehr gesprochen werden könnte." „Kann" denn etwa — diese Frage liegt doch sehr nahe — in Bezug auf die Raumflächen, die er mit seinem „sondern" meint, von einem Diesseits gesprochen werden? — Wenn ja, so „kann" schon deshalb auch von einem Jenseits geredet werden; denn, wie Gutberlet[1]) sehr richtig sagt: „Korrelate fordern sich gegenseitig." Mithin darf bei denjenigen „letzten Raumflächen", die Dr. H. vorschiebt, auch schon von einem Diesseits nicht gesprochen werden „können". Nun aber stelle man sich einmal Flächen vor, in Bezug auf welche weder von einem Diesseits, noch von einem Jenseits gesprochen werden kann! Was bleibt da übrig, wovon gesprochen werden kann? — Solche Objekte sind doch nur noch Etwasse, die (etwaige Krümmungen kommen ja gar nicht in Betracht) mit dem dreidimensionalen Raume überhaupt nichts mehr zu tun haben, die von ihm gänzlich losgelöst sind. Sie begrenzen nichts, sie durchschneiden nichts, sie sind kein Erstes und kein „Letztes", sind weiter gar nichts, als räumlich zweidimensionale Gebilde, die man lediglich als solche in Betracht zu nehmen hat, und die aus einem Problem, bei welchem es sich um den („stereometrischen") dreidimensionalen Raum handelt, einfach von selber ausscheiden, die also meine in Rede stehenden Erörterungen gar nichts angehen.

Die Sätze des Herrn Dr. H. laufen aus auf einen Vorwurf, und dieser muss wohl den „Fehlschluss", zu dem meine „sprachwidrige Definition" mich verführt hätte, kennzeichnen sollen. Der Vorwurf geht dahin, dass ich nicht bewiesen, was ich hätte beweisen müssen. Ich hätte nämlich beweisen müssen, „dass eine jede Raumgrenze, im Sinne des Sprachgebrauchs verstanden, [der Sinn dieser Apposition ist mir zweifelhaft] ein Schnitt sei, d. h. ein Gebilde sei, welches „nicht nur Ende eines Bereiches, sondern auch

[1]) Gutberlet, Allgemeine Metaphysik, Münster, 1906, S. 115.

Anfang eines sich daran anschliessenden Bereiches ist.“ Aber liegt denn eben dieser vermisste Beweis — abgesehen natürlich von der fragwürdigen Benennung „Schnitt“ — nicht tatsächlich vor?

Da jene zweite Deutung des Ausdrucks „letzte Raumflächen“, die Dr. H. mit den Worten: „sondern solche usw.“ vorschlug, sich zufolge jedes der beiden von mir entwickelten Gründe von selber ausschaltet, mithin keinen Redegegenstand zu bilden braucht bezw. bilden kann, so bleibt bloss die an erster Stelle von ihm erwähnte Deutung der „letzten Raumflächen“ übrig. Diesen aber ist die Luft ja schon völlig benommen durch Gutberlets ausschlaggebenden Gedanken, auf den ich an der kritisierten Stelle meines Buches noch eigens hinwies. Das Diesseits „fordert“ das Jenseits als sein erzwungenes Korrelat. Die „Erkenntnis beider ist gleichzeitig.“ Und dieses Zwanges unweigerliches Ergebnis spricht Dr. H. selber (wie ich es mehrfach getan) aus in seiner besonderen Einschaltung: „Mit dem Jenseits wäre ja schon Raum vorausgesetzt“. Der die korrelativen Begriffe miteinander verkettende Denkzwang: wie er offenbar nicht erst dadurch herbeigeführt ist, dass man dem „definierten hochwichtigen Gebilde“ den Namen „Grenze“ gibt, so kann er auch nicht dadurch gebrochen werden, dass man dieses Wort wegen angeblicher „Sprachwidrigkeit“ durch irgend eine andere mehr oder minder passende Vokabel ersetzt. Dieser Denkzwang aber ist es, auf den ich meinen „Schluss“ ausdrücklich baute, und ein „Fehlschluss“ würde er nur sein, wenn Gutberlets erwähnter Ausspruch fehlerhaft wäre.

VIII. Rückblick und Ausblick. Mein von Herrn Dr. H. besprochenes Buch behandelt „Das Endliche und das Unendliche“. Diese Worte sprechen ein Problem aus, über welches wegen seiner gewaltigen Bedeutung schon Generationen gegrübelt haben und Generationen wohl auch noch grübeln werden. Der Begriff „Ende“ bildet den sprachlichen und logischen Angelpunkt desselben, und seinerseits hängt der Begriff „Ende“ nebst dem Antipoden „Anfang“ an dem Stammbegriff „Grenze“. Gerade diese drei mögen daher voraussichtlich auch fürderhin Gegenstand des Nachdenkens, des Redens und Schreibens und nicht minder wohl des Diskutierens bleiben. Wird es dabei zu einer Einigung kommen? — —

Das erste Heft des 28. Bandes vorliegender Zeitschrift (1915) brachte eine sehr wertvolle Abhandlung von P. Norbert Brühl über die „spezifischen Sinnesenergien“. Darin findet sich zwischen S. 50 und 51 eine auffallende Lücke vor, die der Verfasser in seiner nachher über das gleiche Thema herausgegebenen Broschüre (Fulda 1915) ausgefüllt hat. Dort überraschte mich in einer Fussnote von S. 30 der zwischengeschobene Satz: „»Es lässt sich auf alles etwas mehr oder minder Passendes antworten« bemerkt einmal C. Isenkrahe“. Nicht erinnerlich ist mir zwar, wann und wo ich diesen Satz geschrieben, aber ich lehne ihn nicht ab, und P. Brühl stimmt ihm ja auch bei. Manch ein anderer könnte ihn ebensogut mündlich oder schriftlich geäussert haben; er drängt sich bei vielen Gelegenheiten auf. Hat er sich mir aufgedrängt beim Lesen der Kritik des Herrn Dr. H., so wird er sich letzerem vielleicht aufdrängen beim Lesen vorstehender Erörterungen und ihn wieder zu einer „Antwort“ veranlassen, die „mehr oder minder passend“ gefunden werden kann. Ich meinerseits habe in den veröffentlichten Aeusserungen des Herrn Dr. H. keinen Anlass erblickt, diejenige solide Unterlage, die Killing in seinem preisgekrönten Buche dem Begriff der „Grenze“ gegeben hat, und die in meiner Schrift weiter ausgebaut ist, zu verlassen. Warum ich daran festhalte, warum ich die Anfechtungen als sachlich unwirksam erachte, habe ich dargelegt. Mehr konnte ich vorläufig nicht tun. Ob

bezüglich der „hochwichtigen Gebilde“ die Differenzpunkte damit erledigt sind, vermag ich nicht zu sagen. Vielleicht ist es mir vergönnt, sei es über die vorstehend erörterten, sei es über andere in der Besprechung des Herrn Dr. H. berührte Punkte hier oder sonstwo noch einige Gedanken in ruhiger Sachlichkeit vorzutragen.

Erwiderung.

Von Ed. Hartmann.

Vorstehende Abhandlung Isenkrahes bietet mir erwünsche Gelegenheit, die Sprach- und Zweckwidrigkeit seiner Definition sowie die Unrichtigkeit seines darauf aufgebauten Schlusses noch etwas schärfer zu beleuchten als es in meiner Rezension geschehen ist. Bevor ich aber an diese Aufgabe herantrete, möchte ich kurz die Einwände zurückweisen, die Isenkrahe gegen die Richtigkeit einiger von mir gebrauchten Termini erhoben hat.

1. Isenkrahes terminologische Einwände.

Es handelt sich um die Ausdrücke Linie, Schnitt und Anfang.

a) Isenkrahe knüpft an den Umstand, dass ich statt von einer Strecke PQ zu reden, von einer Linie spreche, die sich von P nach Q erstreckt, eingehende Erörterungen über den mathematischen Sprachgebrauch. Meines Erachtens liegt die Sache sehr einfach. Wenn man eine Linie — mit diesem Ausdruck bezeichnet man jedes eindimensionale stetige Raumgebilde, mag es begrenzt sein oder nicht — dadurch charakterisiert, dass sie sich von P nach Q erstrecken soll, so sind damit P und Q als Grenzpunkte der Linie bestimmt. Anderenfalls würde man sagen, die Linie solle durch P und Q hindurchgehen. Gerade wegen dieser Bedeutung des Zeitwortes Sicherstrecken nennt man ja eine beiderseitig begrenzte Gerade eine Strecke. Es ist darum der von Isenkrahe aufgestellte Satz: „Der Nullmeridian erstreckt sich vom Pol zur Greenwicher Sternwarte“ für einen, der die Definition des Meridians nicht kennt, irreführend. Wer sie kennt und also weiss, dass sich der Meridian von Pol zu Pol erstreckt, wird zwar nicht irregeführt, aber wohl ein wenig in Verwunderung gesetzt werden über Isenkrahes eigenartige Terminologie.

b) Von grösserer Bedeutung ist der zweite Einwand. Ich bezeichnete das von Isenkrahe definierte Gebilde als Schnitt. Das bietet ihm Anlass zu sehr ausführlichen Betrachtungen über die mannigfachen Anwendungen, die der Ausdruck Schnitt gefunden hat. Ich werde alle Schnitte, von denen da die Rede ist, selbst den goldenen Schnitt und den Kaiserschnitt, mit Stillschweigen übergehen bis auf den einen, der, wie Isenkrahe richtig bemerkt, hier allein in Betracht kommen kann, nämlich den Dedekindschen Schnitt. Es handelt sich also nur um die Frage, ob das, was Isenkrahe „Grenze“ nennt, mit dem Schnitte im Sinne Dedekinds zusammenfällt oder nicht. Die Entscheidung ist nicht schwer. Die „Grenze“ soll nach Isenkrahe einerseits ein Gebiet in zwei Teile zerlegen, andererseits weder diesem Gebiete, noch seinen Teilen als Element angehören. Diesen beiden Forderungen entspricht aber vollständig der Dedekindsche Schnitt. So zerlegt jede Irrationalzahl — diese wird bekanntlich von Dedekind als Schnitt der rationalen Zahlen definiert — das Gebiet der rationalen Zahlen in zwei Teile, ohne diesem Gebiete oder seinen Teilen als Element anzugehören. Dass die Irrationalzahl dem Gebiete der reellen Zahlen als Element angehört, tut nichts zur Sache. Sie bildet kein Element jenes Gebietes, als dessen Schnitt sie definiert ist, und deckt sich also vollkommen mit der Isenkraheschen Grenze. Der Grund des

Missverständnisses ist klar. Isenkrahe zieht daraus, dass seine „Grenze" dem Gebiete, das zu ihrer Definition vorausgesetzt ist, nicht als Element angehört, den irrigen Schluss, dass sie überhaupt keinem Gebiete angehören dürfe. Dabei übersieht er noch, dass ein Gebilde, das überhaupt keinem „Seins- oder Vorstellungsgebiet" angehört, ein Absurdum ist.

Es bleibt also bei dem Satze: Man sollte das von Isenkrahe definierte Gebilde weder (absolut betrachtet) Grenze, noch (relativ betrachtet) Anfang nennen, sondern Schnitt. Daran knüpft sich aber sofort ein neues Missverständnis. Isenkrahe schliesst nämlich: wenn ich das von mir charakterisierte Gebilde nicht Grenze nennen darf, so darf man auch den Aequator nicht mehr Grenze nennen. Dieser Schluss ist unrichtig, weil dabei das Wort Nennen in verschiedenem Sinne gebraucht wird. Wenn Isenkrahe sein Gebilde Grenze „nennt", so handelt es sich um ein Nennen ganz besonderer Art, nämlich um die das Wesen der Nominaldefinition ausmachende Zuordnung eines Begriffsinhaltes zu einem Terminus, wenn er aber den Aequator Grenze nennt, so subsumiert er diese Linie der Klasse der Grenzen, was keinem Bedenken unterliegt, da der Aequator nicht nur als Schnitt (der ganzen Erdoberfläche), sondern auch als Grenze (jeder der beiden Hemisphären) betrachtet werden kann. Wenn es also auch unstatthaft ist, die Definition des Schnittes mit der der Grenze zu konfundieren, so kann es doch Dinge geben, die zugleich Grenzen und Schnitte sind. Darum ist es Isenkrahe nicht verwehrt, den Aequator als Grenze zu bezeichnen, Killing darf an der von Isenkrahe angeführten Stelle von Grenzen sprechen und auch die Grenzpfähle können Grenzpfähle bleiben und brauchen nicht in Schnittpfähle umgetauft zu werden.

c) Der dritte Einwand bezieht sich auf den terminus Anfang. Isenkrahe ist nicht damit einverstanden, dass man den Buchstaben a als Anfang des Alphabetes bezeichne; man solle vielmehr sagen, das Alphabet fange mit a an. Nun eben weil das Alphabet mit a anfängt, muss man, wenn man überhaupt das Wort Anfang in konkretem Sinne verwenden will, wie dies ja auch Isenkrahe tut, a selbst als Anfang bezeichnen. Gewiss könnte man auf die Ausdrücke Anfang und Ende ganz verzichten, wie dies in der Mengentheorie geschieht, und dafür einfach erstes und letztes Element setzen. Ich hätte hiergegen um so weniger einzuwenden, als ich ja gerade die Behauptung vertrete, Anfang und Ende seien gar nichts anderes als das erste und letzte Glied einer durch eine asymmetrische transitive Beziehung geordneten Menge. Was Isenkrahe bei dieser Gelegenheit über den Anfang des Jahres vorbringt, ist nicht ganz einwandfrei. Man kann das Jahr ganz nach Belieben als eine Reihe von zwölf Monaten, oder als eine Reihe von 365 Tagen etc. oder auch als stetige Momentenreihe ansehen. Im ersten Fall ist der Anfang nichts anderes als der Monat Januar, im zweiten Falle ist es der erste Januar, im letztgenannten Falle ist es der „erste unteilbare Augenblick, in welchem die erste Sekunde des ersten Januar anfängt". Alle diese Auffassungen sind gleich richtig, wenn auch nicht immer gleich praktisch.

2. Isenkrahes Definition.

Nunmehr können wir daran gehen, Isenkrahes Definition einer erneuten Prüfung zu unterziehen. Eine gute Definition soll (soweit als möglich) einfach, klar und weder zu eng noch zu weit sein. Entspricht Isenkrahes Definition diesen Forderungen? Nein! Sie ist unnötigerweise kompliziert, unklar und zu eng.

a) Sie ist unnötigerweise kompliziert, weil sie nicht nur den Begriff der „Grenze", sondern auch den vielumstrittenen Begriff der Bewegung voraussetzt.

b) Sie ist unklar, weil die Definition der „Grenze“ bei Isenkrahe unklar ist.

Zum Beweise dieser Behauptung führe ich das erste „spezifische Merkmal“ der „Grenze“ an. Wir lesen in Isenkrahes Buche (S. 19): „Das Gebilde ist enthalten in irgend einem Seins- oder Vorstellungsgebiet, aber in so eigenartiger Weise, dass es keinen Teil desselben ausmacht.“ Wir müssen hier natürlich fragen: Was heisst es denn, einen Teil eines Gebietes ausmachen? Auf diese Frage erhalten wir von Isenkrahe in seinem Buche keine klare Antwort. Um so deutlicher spricht er sich aber in der vorstehenden Abhandlung aus. Da heisst es: „Woraus besteht die Menge überhaupt? Aus ihren Elementen! Nichts anderes als die Elemente sind es, welche die Teile, die Bestandteile der Menge ausmachen.“ Es soll also die „Grenze“ kein Element des Seinsgebietes sein, das zu ihrer Definition vorausgesetzt wird. Mit welchem Rechte kann man dann behaupten, dass die „Grenze“ in diesem Gebiete enthalten sei? Was einem Gebiete nicht als Element angehört oder als Menge von Elementen darin eingeschlossen ist, ist überhaupt nicht darin enthalten. Die Sache wird noch dunkler, wenn wir in Isenkrahes Buche (S. 16) lesen: „Zutreffend bemerkt Lehmen: Der Punkt kann nicht als Teil der Linie angesehen werden“ und in seiner Erwiderung auf meine Rezension den Satz finden: „Die irrationalen Zahlen gehören dem Gebiete der reellen Zahlen als wirkliche Bestandteile, als Elemente an.“ Es ist ja doch jedermann, der sich auch nur mit den Anfangsgründen der Mengentheorie beschäftigt hat, bekannt, dass sich der Punkt zur Linie gerade so verhält, wie eine irrationale oder rationale Zahl zu dem Kontinuum der reellen Zahlen. Wir stehen also vor Widersprüchen, die wir durch die Annahme erklären können, dass es Isenkrahe nicht gelungen ist, über den Sinn der Killingschen Definition zur vollen Klarheit vorzudringen.

c) Die von uns bekämpfte Definition ist endlich zu eng und darum sprachwidrig. Um den Sprachgebrauch festzustellen, haben wir nur ein Mittel: wir müssen uns fragen, was wir mit dem in Betracht kommenden Worte meinen, was wir damit aussagen wollen. Dies und nur dies macht den Sinn des Wortes aus. Nun wollen wir aber, wenn wir einer Reihe einen Anfang beilegen, nicht nur in vielen Fällen, wie Isenkrahe zugibt, sondern in allen Fällen nichts anderes aussagen als dass die Reihe ein erstes Glied hat. Also besteht hierin und hierin allein die Bedeutung des Wortes Anfang.

Doch hiergegen hat Isenkrahe verschiedenes einzuwenden. Er weist mit Nachdruck darauf hin, dass sich ein Schnitt (von ihm „Grenze“ genannt) immer auf ein Diesseits und ein Jenseits beziehe. Freilich komme der Teilbereich der abgeblendet sei, für den zwangsweise eingeschränkten Blick nicht in Betracht, solange und in dem Masse als er eben abgeblendet sei, das uneingezwängte freie Auge höre darum nicht auf ihn zu sehen. Solle alles zur Sache gehörige ins Auge gefasst werden, so dürfe keiner der beiden Bereiche übersehen werden.

Wir stimmen Isenkrahe hierin vollständig bei: wer einen Schnitt als solchen erfassen will, muss das „Diesseits“ und „Jenseits“ zugleich in Betracht ziehen. Daraus folgt aber nichts für die Bedeutung des Wortes „Anfang“. Denn erstens ist nicht jeder Anfang ein Schnitt. Es kann etwas Anfang sein, ohne dass es irgendwie als Ende aufgefasst werden kann. Das zeigt schon ein Blick auf die Reihe der absoluten Zahlen 0, 1, 2, 3 . . in inf. Diese Reihe hat einen Anfang (0), der nicht als Ende einer vorhergehenden Reihe aufgefasst werden kann. Um Missverständnissen vorzubeugen, bemerke ich, dass es sich hier nicht um positive oder negative, sondern um absolute Zahlen handelt. Die positiven und negativen Zahlen werden auf Operationen an den absoluten Zahlen zurückgeführt (Vergl. Couturat, Die Philos. Prinzipien der Mathematik, Leipzig 1908, S. 85).

Zweitens: Selbst wenn jeder Anfang zugleich Ende wäre, so wäre es doch zweckwidrig, diesen Umstand in die Definition des Anfangs aufzunehmen. Isenkrahe gibt zu, dass bei vielen Untersuchungen nur ein „Teilgebiet" in Betracht kommt. Nun haben wir aber Termini nötig, die gerade das bezeichnen, was wir meinen, das was für uns in Betracht kommt. Dazu sind vom Sprachgebrauche die Worte Anfang und Ende bestimmt. Es wäre zweckwidrig, in ihre Definition Bestimmungen aufzunehmen, die bei ihrer Anwendung gar nicht in Betracht kommen.

Die Isenkrahesche Definition ist für die gründliche Untersuchung mancher Fragen geradezu hinderlich. Das zeigt sich besonders bei seinem Versuche die Unendlichkeit des Raumes logisch zu begründen. Damit kommen wir zu Isenkrahes Fehlschluss.

3. Isenkrahes Fehlschluss.

Zeit und Raum sind unendlich. Worin besteht ihre Unendlichkeit der Zeit? Darin, dass es in ihr keinen Moment gibt, der allen übrigen Momenten vorausginge und keinen Moment, der allen übrigen nachfolgte. Jeder Moment, den wir herausgreifen, ist so beschaffen, dass ihm Zeit vorausgeht und Zeit nachfolgt. Ganz entsprechend verhält es sich mit der Unendlichkeit des Raumes. Diese zeigt sich darin, dass wir den Raum von einer solchen Reihe paralleler, äquidistanter Ebenen zerschnitten denken können, dass es keine Ebene gibt, die allen übrigen vorausginge und keine, die allen übrigen nachfolgte. Jede ist vielmehr so beschaffen, dass ihr unendlich viele Ebenen vorangehen und nachfolgen. Das ist es, was man unter der Unendlichkeit des Raumes versteht. Wollte Isenkrahe sie logisch begründen, so musste er zeigen, dass es in der Reihe der den Gesamtraum zerlegenden Ebenen keine erste und keine letzte geben kann. Was zeigt er aber tatsächlich? Dass Ebenen, die Raum vor sich und Raum hinter sich haben, also innerhalb unserer Reihe liegen, nicht erste und letzte Ebenen sind. Es beweist also etwas, was als selbstverständlich keines Beweises bedarf, und beweist nicht, worum es sich bei der Unendlichkeit des Raumes handelt, dass es nämlich keine ersten oder letzten Ebenen geben kann.

Aber, wendet Isenkrahe ein, eine letzte Ebene (bezw. Fläche) ist ein Unding, mit dem man sich gar nicht abzugeben braucht. Es wäre nämlich eine Ebene, der keine andere mehr nachfolgte. „Mit dem Nachfolgen ist ipso facto schon der Griff ins Jenseits gedanklich vollzogen".

Dieser Einwand ist aus doppeltem Grunde hinfällig: Erstens braucht man die letzte Ebene gar nicht zu definieren als eine solche, der keine anderen mehr nachfolgen; sie ist schon dadurch vollkommen bestimmt, dass sie allen übrigen nachfolgt. Zweitens wird auch durch die Bestimmung, daß ihr keine anderen nachfolgen kein Jenseits anerkannt. Es ist damit nur der Begriff des Jenseits gebildet, die Objektivität dieses Begriffes aber ist damit nicht anerkannt, sondern wird ausdrücklich verneint.

Werfen wir zu Verdeutlichung des Gesagten noch einen Blick auf die Reihe der absoluten Zahlen. Die Reihe nimmt ihren Anfang mit der Zahl Null. Null ist die erste Zahl, weil sie kleiner ist als alle übrigen und weil es — kann ich ohne Bedenken hinzufügen, keine kleinere absolute Zahl gibt als Null. Wird Isenkrahe auch hier einwenden, mit dem Begriff der kleineren Zahl sei schon der Griff in das Gebiet des Kleineren vollzogen und damit die Existenz einer kleineren Zahl anerkannt? Ich glaube kaum. Mit der Bildung des Begriffes der kleineren Zahl ist die Objektivät des Begriffes noch nicht vorausgesetzt ebenso wenig, wie durch den Begriff einer Primzahl zwischen 31 und 37 die Existenz einer solchen Zahl vorausgesetzt wird.

So wird auch durch den Satz, dass der letzten Ebene keine Ebene nachfolge, ein „Jenseits" in keiner Weise anerkannt.

Es ist also jene letzte Ebene nicht das Unding, womit Isenkrahe sich nicht abzugeben brauchte, sondern sie ist gerade das, womit er sich hätte beschäftigen müssen, wenn er die Unendlichkeit des Raumes logisch begründen wollte.

Aber Isenkrahe hat noch einen zweiten Einwand. Mit dem Jenseits, erklärt er, fällt auch das Diesseits fort. Wird also das Jenseits ausgeschlossen, so schrumpft der ganze Raum zu einer blossen Fläche zusammen. Warum dies? Diesseits und Jenseits sind Korrelate. „Die Korrelate aber fordern sich gegenseitig, darum ist ihre Erkenntnis gleichzeitig".

Trotz des Gewichtes dieses Prinzips, das Isenkrahe noch durch die Berufung auf Gutberlet verstärkt, können wir in dem vorliegenden Gedankengang nur einen neuen Fehlschluss sehen.

Betrachten wir die Sache etwas gründlicher. Wenn ich von einem Diesseits oder Jenseits spreche, so denke ich mich selbst irgendwo im Raume plaziert, etwa in einer unserer Ebenen, die wir A nennen wollen. Auf A folge, etwa nach rechts hin, unmittelbar die Ebene B, auf B die Ebene C. Dann befindet sich B diesseits von C, C aber jenseits von B. B und C sind Korrelate und fordern sich als solche gegenseitig, d. h., wenn ich B als diesseits von C befindlich denke, so muss ich auch C als jenseits von B befindlich anerkennen. Wir sehen also: wenn eine Ebene ein Diesseits hat, so ist sie das Jenseits gegenüber diesem Diesseits. Verlangt aber das genannte Prinzip, dass eine Ebene, die ein Diesseits hat, auch ein Jenseits habe? Folgt aus dem Umstande, dass der Ebene C eine Ebene B vorausgeht, die Notwendigkeit, dass ihr eine Ebene D nachfolge? Durchaus nicht! Isenkrahe verwechselt hier den selbstverständlichen Satz: wenn x in irgend einer Beziehung zu y steht, so steht y in der umgekehrten Beziehung zu x mit dem durchaus nicht selbstverständlichen, sondern in seiner Allgemeinheit evident falschen Satze: wenn x in einer Beziehung zu y steht, so gibt es ein z, das in der umgekehrten Beziehung zu y steht.

Wäre Isenkrahes Schlussweise richtig, so könnte man auch schliessen: wenn es eine (absolute) Zahl gibt, die größer als Null ist, so gibt es auch eine Zahl, die kleiner als Null ist, wenn jemand einen Vater hat, so hat er auch ein Kind, wenn jemand einen Grossvater hat, so hat er auch einen Enkel, wenn jemand eine Gattin hat, so hat er auch einen Gatten; denn Größer und Kleiner, Vater und Kind, Großvater und Enkel, Gatte und Gattin sind Korrelate. „Die Korrelate aber fordern sich gegenseitig".

Aus dem Gesagten erhellt, dass wir an dem Urteile, das wir in unsrer Rezension über Isenkrahes Definition des Anfangs und seinen Versuch die Unendlichkeit des Raumes logisch zu begründen, gefällt haben, nichts ändern können.