Die unendliche Menge.[1])

Von Eberhard Illigens.

Begriffsbestimmungen.

1. Die Grösse oder Quantität wird von Aristoteles in folgender Weise definirt: „Gross (quantitativ) heisst, was in Bestandtheile zerlegbar ist, von welchen jeder ein einzelnes und bestimmtes Ding ist" (*ποσὸν λέγεται τὸ διαιρετὸν εἰς ἐνυπάρχοντα, ὧν ἑκάτερον ἢ ἕκαστον ἕν τι καὶ τόδε τι πέφυκεν εἶναι*)." [2]) Die Grösse im eigentlichen Sinne, welche im Gegensatze zu der intensiven Grösse, dem Grade einer Qualität, auch extensive Grösse genannt wird, erfordert also, dass die Theile, in welche das Ganze zerlegt werden kann, jeder für sich wieder ein abgeschlossenes Ganzes bilden können und nach erfolgter Theilung wirklich bilden. Die Grösse ist zweifacher Art, entweder discret (Menge, Zahl), oder continuirlich (stetig). Discret ist die Grösse, wenn die Theile auch schon vor der Zerlegung der Grösse ein abgeschlossenes Ganzes bilden, also jeder ein für sich d. h. nicht durch das Ganze bestehendes Sein hat; mithin verknüpft das Band, welches die einzelnen Theile der discreten Grösse umfasst, sie nicht zu einem einzigen physischen Sein; das Sein des Ganzen hat nur eine gedachte Einheit. Die Art der discreten Grösse (Menge) als solcher wird durch die Zahl bezeichnet. In der Zahl lässt sich eine materielle und eine formale Seite unterscheiden; das Materielle (Objective) in der Zahl ist die Vielheit von Einheiten; das Formale (Subjective) die Zusammenfassung dieser Vielheiten zu

---

[1]) Ein weiterer Artikel „Ueber die unendliche Ausdehnung" von demselben Verf. wird später erscheinen. D. Red.

[2]) Metaph. IV. (V.) c. 13.

einer Einheit, wird nur durch den Denkgeist bewirkt. Die Zahl kann daher ein ens rationis cum fundamento in re genannt werden.

Kommt also bei der discreten Grösse die physische Einheit des Seins nicht dem Ganzen, sondern den Theilen zu, so verhält es sich bei der stetigen Grösse umgekehrt. Die stetige Grösse hat, auch abgesehen vom Denkgeiste, Einheit des Seins; erst nach der Theilung entsteht eine reale Vielheit. Die gewöhnliche Definition der stetigen Grösse lautet: „Stetig ist dasjenige, dessen Grenzen Eins sind (*συνεχῆ, ὧν τὰ ἔσχατα ἕν*).“ Ein weiteres Eingehen auf die stetige Grösse setzen wir am besten bis zur Erörterung der Unendlichkeit derselben in einer besonderen Abhandlung aus.

2. Nunmehr haben wir den Begriff „unendlich“ ins Auge zu fassen. Unendlich heisst dem Wortlaut nach so viel als ohne Ende, ohne Grenzen; der Begriff „unendlich“ verneint also das Vorhandensein einer Beschränkung, einer Negation, ist also durchaus positiv, wenngleich er von uns, die wir den positiven Gehalt wegen unserer Endlichkeit nicht fassen können, nur im Wege der Negation der Beschränkung, also durch doppelte Negation, nicht durch direkte Position erkannt werden kann. Die Endlosigkeit kann zunächst eine zweifache sein; sie kann entweder schlechthin oder rücksichtlich einer Eigenschaft oder Beziehung verstanden werden. Die schlechthinnige Unendlichkeit, also die Unendlichkeit der ganzen Wesenheit nach kommt nur Gott zu; mit dieser Unendlichkeit haben wir uns hier nicht zu befassen; uns beschäftigt nur die Unendlichkeit der Grösse nach. Die unendliche Grösse kann wiederum zweierlei Art sein. Ist etwas in strengem Sinne unendlich gross, also der Grösse nach ohne Grenzen, so muss es in der Beziehung wenigstens, in welcher es unendlich ist, unvermehrbar sein d. h. es darf kein Ding in der betreffenden Rücksicht grösser als dasselbe gedacht werden können. Denn könnte ein grösseres Ding gedacht werden, so bildete die Grösse desselben die Grenze, welche von dem ersten nicht erreicht würde; der Ueberschuss der Grösse des zweiten über die Grösse des ersten müsste von letzterer negirt werden. Indessen wird nicht immer das Unendliche als unvermehrbar gedacht; man behauptet z. B. die unendliche veränderliche Dauer der Welt, also eine unendliche Menge von Veränderungen, obwohl die Veränderungen in ihrer Zahl noch vermehrt werden. Hier wird also unendlich im Sinne von unzählbar, unerschöpflich genommen. Die Grösse, welche unendlich in diesem Sinne genannt wird, wäre also nicht derart,

dass nicht eine noch grössere Menge gedacht werden könnte, sondern der Begriff derselben forderte bloss, dass sie durch Wegnahme eines endlichen Theiles nach dem andern nicht erschöpft werden könnte, sodass also nach jeder successiven Ausmessung noch ein (unendlicher) Rest verbleibt; hier würde nicht gerade ausdrücklich ein Ende der Grösse verneint, sondern die Erreichung dieses Endes durch successives Fortgehen von einem Theile zum andern geleugnet. Ob nun die Begriffe „unvermehrbar“ und „unzählbar“ zusammenfallen, sei hier nicht untersucht; vorläufig werden wir gut thun, diese beiden Begriffe noch zu scheiden.

Es erübrigt noch, die sonst gebräuchlichen Unterscheidungen des Unendlichen anzugeben. Zunächst treffen wir da die Eintheilung in kategorematisch und synkategorematisch unendlich. Kategorematisch nach seiner ursprünglichen Bedeutung würde ein Begriff sein, der selbständig eine Eigenschaft ausdrückt, wogegen ein synkategorematischer Begriff nur die Bestimmung eines anderen Begriffes bezeichnet. Im ursprünglichen Sinne würde diese Eintheilung also zusammenfallen mit der Eintheilung in unendlich schlechthin (simpliciter) und unendlich in einer Rücksicht (secundum quid). Doch nimmt man jetzt das kategorematisch Unendliche gleichbedeutend mit actual unendlich und das synkategorematische Unendliche mit potenzial unendlich. Actual unendlich ist diejenige Grösse, der die Unendlichkeit wirklich (actu) zukommt, die also, wie sie wirklich ist oder als wirklich gedacht wird, unvermehrbar oder unzählbar ist. Unter dem potenzial Unendlichen, welches im Gegensatze zum actual Unendlichen oder infinitum auch das indefinitum genannt wird, pflegt man eine Grösse zu verstehen, welche insoweit sie actual, zwar endlich ist, welche aber immerfort der Vermehrung fähig ist, also das unendlich Vermehrbare.

---

§ 1.

Eine unendliche Anzahl existirender Realitäten ist unmöglich.

3. Dieser Satz, mit dem wir unsere Erörterung über die Unendlichkeit der discreten Grösse beginnen, soll Geltung haben, mag man unendlich im Sinne von unvermehrbar oder auch nur von unzählbar fassen. Wir behaupten also:

A. Eine unvermehrbare Anzahl existirender Realitäten ist nicht denkbar.

Es kann nicht eine solche Anzahl oder Menge existirender Realitäten, — seien dieses nun Substanzen, seien es als real verschieden gedachte Theile derselben, seien es irgendwie real gedachte Accidenzien oder Beziehungen, — gedacht werden, dass nicht eine noch grössere Menge existirender Realitäten denkbar wäre. Und, da es sich hier nicht darum handelt, ob eine Ursache existirt, welche jede denkbare Anzahl von Realitäten verwirklichen kann, sondern lediglich die denkbare, sich nicht im Begriffe widersprechende Existenz in Betracht kommt, so enthielte eine unvermehrbare Anzahl existirender Realitäten bereits jede Realität, deren Existenz denkbar wäre: alle möglichen Realitäten wären verwirklicht. Die Unmöglichkeit einer solchen unvermehrbaren Zahl hat man in der Weise aus dem Begriffe oder der Entstehung der Zahl zu folgern gesucht, dass man sagt, die Zahl bestehe aus bestimmten Einheiten, deren jede von dem Denkgeiste bezeichnet werden könne; nachdem aber alle Einheiten einzeln bezeichnet seien, verbleibe kein Rest mehr; mithin sei nach dem Satze „infinitum non est pertransire“ jede Zahl eine endliche. Aber es fragt sich, ob in jeder Zahl die sämmtlichen Einheiten der Reihe nach einzeln bezeichnet werden können, so dass man einmal zu Ende kommt; deshalb gilt ein solcher Beweis nur dann, wenn man das Wort „Zahl“ in einem etwas engeren, wenngleich ursprünglichen Sinne fasst und nur von einer Zahl bei derjenigen Vielheit reden will, deren constituirende Einheiten sämmtlich eine nach der andern bezeichnet werden können. Ein solcher engerer Begriff der Zahl wird freilich als der allein zu verwirklichende übrig bleiben, wenn die Existenz einer anderen, als der vorbeschriebenen Vielheit, als unmöglich nachgewiesen sein wird; aber vor diesem Nachweise dürfte es, um einen blossen Wortstreit zu vermeiden, sich empfehlen, von der Zahl einer jeden Vielheit zu sprechen; immerhin wird durch die angeführte Demonstration nur bewiesen, dass, wie es am Tage liegt, eine unendliche Zahl in dem angegebenen engern Sinne unmöglich ist; es bleibt dann immer noch die Frage offen, ob nicht eine unvermehrbare Menge oder Vielheit von existirenden Dingen, mit deren Auszählung man nie zu Ende kommt, denkbar sei. Die so gestellte Frage kann man auf den ersten Blick leicht in folgender Weise zu lösen sich versucht fühlen. Wenn die Anzahl irgend welcher Realitäten unvermehrbar wäre, so müsste auch die Zahl der in dieser Anzahl enthaltenen Zehner unvermehrbar sein, weil sonst bei Vermehrung der Zehner auch die Einer vermehrt würden; es kann aber die Zahl der Zehner nicht unvermehrbar sein, weil die Zahl der Einer grösser ist, als die der Zehner. Diesem Argumente dürfte, obgleich es nicht selten und in den verschiedensten Variationen vorgebracht wird, dennoch keine Beweiskraft zuzuschreiben sein; der Fehlschluss wird durch den Doppelsinn der Unvermehrbarkeit der Zahl der Zehner veranlasst. Wenn man die Zahl der Zehner nämlich unvermehrbar nennt, so kann erstens damit ausgedrückt werden sollen, dass es keine Menge irgend welcher Realitäten geben kann, welche grösser ist als die Menge der Zehner; zweitens kann damit gesagt werden, dass nicht mehr Zehner existiren können, als in der unvermehrbaren Anzahl bereits enthalten sind; nur in diesem zweiten Sinne würde bei einer unvermehrbaren Anzahl der Einer auch die Zahl der Zehner unvermehrbar sein und dadurch die Folgerung, dass durch Vermehrung der Zehner auch die Einer vermehrt würden, beseitigt. — Aber, so wendet man ein, wenn die Zahl der Zehner abstrakt, also ohne Rücksicht darauf, dass sie die Menge der Zehner bezeichnet, gefasst wird, ist dann diese abstrakte Zahl vermehrbar oder unvermehrbar? Freilich vermehrbar; aber was heisst das? Doch nur, dass mehr Realitäten, also z. B. Einheiten existiren können, als die als unvermehrbar angenommenen Zehner; hierin dürfte aber kein Widerspruch liegen, wenn man nur bedenkt, dass die Zahl der Zehner auch als abstrakte Zahl derart sein muss, dass man durch successives Fortnehmen von Einheiten die Zahl nicht erschöpft.

4. Wodurch aber ist eine unvermehrbare Anzahl existirender Realitäten als unmöglich nachzuweisen? Zunächst leuchtet ein, dass nicht von einer einzigen Art von Dingen so viele existiren können, dass nicht eine noch grössere Zahl existirender Dinge denkbar wäre; denn ausser den Dingen der einen Art können noch Dinge einer anderen Art als existirend gedacht werden. Weiterhin aber können von Dingen einer Art nicht so viele existiren, dass nicht noch mehr Dinge derselben Art existiren können. Es dürfte schwer sein, im Ernste diesen Satz zu leugnen; bei der grossen Menge aber von Absurditäten, welche in Betreff der unendlichen Grösse aufgestellt sind, dürfte es dennoch nicht verfehlt sein, einen vollen

Beweis dafür zu liefern. Zunächst führen wir als Beweis die absolute Möglichkeit an, die Art eines Individuums zu ändern. Wenn man annehmen wollte, dass eine solche Anzahl z. B. von weissen Pferden existirte, dass nicht mehr weisse Pferde existiren könnten, so können doch noch schwarze Pferde existiren; nun ist es aber zum Mindesten der göttlichen Allmacht ganz gewiss möglich, die schwarze Farbe eines Pferdes in die weisse zu verwandeln, mithin die Anzahl der weissen Pferde um Eins zu vermehren; also ist die gemachte Annahme unmöglich. Wollte man dagegen bemerken, dass eine unvermehrbare Anzahl weisser Pferde nur dann existiren könnte, wenn alle möglichen schwarzen, fuchsigen etc. Pferde zuvor ihre Farbe mit der weissen vertauscht hätten, so bleibt freilich den Gegnern eine solche Behauptung als nothwendige Consequenz ihrer Annahme; aber diese Consequenz beweisst nur die Unmöglichkeit der Annahme. Denn es ist bedingungslos möglich, dass schwarze Pferde existiren; es ist nicht abzusehen, wie die Existenz derselben unmöglich würde, mag man so viel weisse Pferde als existirend annehmen, als man will. Ausserdem erhellt die Nichtigkeit des Einwandes aus folgender Erwägung. Wenn von der unvermehrbaren Anzahl der weissen Pferde die Anzahl derjenigen Pferde subtrahirt würde, welche erst durch Vertauschung ihrer schwarzen Farbe weiss geworden sind, so ist offenbar die Anzahl der alsdann verbleibenden weissen Pferde vermehrbar. Nun kann aber doch gewiss nicht geleugnet werden, dass alsdann Gott ebenso gut ein weisses Pferd schaffen kann, als dass er ein schwarzes schaffte und dessen Farbe änderte.

Einen zweiten Beweis für die Unmöglichkeit, dass unvermehrbar viele Dinge einer Art existiren, bietet die Theilbarkeit der Dinge. Mag die Anzahl von z. B. existirenden Ringen beliebig gross sein, ganz unbestreitbar ist es doch möglich, dass einer der Ringe in 2 Hälften getheilt und jede Hälfte wieder zu einem Ringe zusammengefügt wird. Mithin kann keine Anzahl existirender Ringe derart sein, dass nicht noch eine grössere existiren kann; in ähnlicher Weise lässt sich von allen Substanzen, die in gleichartige und mit dem Ganzen unter dieselbe Art fallende Theile zerlegbar sind, argumentiren. Was aber von theilbaren Substanzen in dieser Beziehung gilt, das muss auch bei untheilbaren Substanzen Geltung haben. Wie gross auch z. B. die Anzahl existirender Geister sei, so kann immer eine gleiche Anzahl Ringe existiren, wie sich aus

Vorhergehendem folgern lässt. Denn wenn die Anzahl der Ringe, welche existiren könnten, nicht bis zur Anzahl der existirenden Geister reichte, so müsste sie bis zu einem gewissen Theile der Anzahl der Geister reichen, aber nicht weiter; letzteres ist aber nicht möglich, weil jede Anzahl von Ringen, die als existirend gedacht werden können, noch der Vermehrung fähig ist; da ferner, wie sich aus Folgendem ergeben wird, jede Anzahl existirender Ringe auch zählbar ist, also ganz gewiss endlich, so ist auch jede Anzahl existirender Geister endlich, also vermehrbar. In derselben Weise kann man folgern, dass es nicht so viel Ursachen geben kann, dass nicht noch mehr möglich, dass nicht so viel Bewegungen stattfinden können, dass nicht noch mehrere denkbar bleiben u. s. w., überhaupt, dass nicht von irgend welchen Realitäten einer Art so viele existiren können, dass nicht die Existenz noch mehrerer möglich ist.

Für den letzten Satz kann ein dritter und zugleich wohl der stärkste Beweis daraus abgeleitet werden, dass offenbar die Zahl existirender Realitäten einer Art nicht unvermehrbar sein, also alle möglichen Realitäten dieser Art einschliessen kann, wenn diese Zahl durch successive Fortnahme von einzelnen Einheiten erschöpflich ist; dass aber letzteres bei jeder Zahl existirender Realitäten der Fall sein muss, werden wir in Folgendem zeigen.

Wenn aber die Anzahl der existirenden Realitäten einer Art nicht unvermehrbar sein kann, so unterliegt es sicher keinem Zweifel, dass überhaupt die Anzahl existirender Realitäten aller vorhandenen Arten nicht so gross sein kann, dass nicht noch eine grössere Anzahl von irgend welchen Realitäten existiren kann, dass es also nicht eine schlechthin unvermehrbare Anzahl existirender Realitäten geben kann. Hierzu nämlich wäre erforderlich, wie Balmes mit Recht bemerkt, dass sowohl die Anzahl der Realitäten jeder Art als auch die Anzahl der Arten unvermehrbar wäre.

B. Es kann keine unzählbare Menge von Realitäten existiren.

5. Wenn vorstehend auch gezeigt, dass es keine unvermehrbare Vielheit von Realitäten geben kann, so bleibt noch die Frage offen, ob nicht so viele Realitäten existiren können, dass sie nicht gezählt werden d. i. nicht die eine nach der anderen bezeichnet werden kann, so dass man einmal zu Ende kommt: wenn eine solche unzählbare oder, wie sie Cantor nennt, transfinite Menge von

Realitäten existirte, so könnte man successiv beliebig viele Realitäten von dieser Menge weggenommen denken; nie aber würde man durch successive Wegnahme endlich vieler Elemente dazu gelangen, die ganze Menge auszuschöpfen, also alle Realitäten fortzunehmen. Dem Begriffe einer solchen Vielheit widerspräche auch die Vermehrbarkeit nicht; wenn daher eine unzählbare Menge möglich wäre, so könnten ihrer auch mehrere existiren. Eine solche unzählbare oder transfinite Anzahl wird unter Anderen auch von allen Denjenigen angenommen oder stillschweigend vorausgesetzt, welche behaupten oder doch für möglich halten, dass die Welt ewig existirt habe und ewig in Bewegung gewesen sei. Denn in diesem Falle ist die Anzahl der einzelnen Bewegungen sicherlich keine auszählbare, sie ist aber auch nicht unvermehrbar, weil ja den Bewegungen fortwährend noch neue hinzukommen; es müsste mithin die Anzahl der Bewegungen unzählbar sein.

Bevor wir nun daran gehen, die Unmöglichkeit einer unzählbaren Menge existirender Realitäten nachzuweisen, sei es uns gestattet, einige kurze Bemerkungen vorauszuchicken. Zunächst genügt es für den zu liefernden Nachweis, wenn wir darthun, dass eine unzählbare Menge ausgedehnter Realitäten nicht existiren kann, denn jeder als existirend gedachten unausgedehnten Realität kann man eine ausgedehnte Realität zugeordnet denken; dass Letzteres etwa wegen Raum-Mangel nicht geschehen könne, wird Niemand behaupten wollen, der nicht den Raum für endlich erklärt; wollte man aber auch aus einem sonstigen Grunde Zweifel erheben und es nicht für ausgeschlossen erachten, dass nicht allen unausgedehnten Realitäten je eine ausgedehnte zugeordnet werden könne, so müsste die Möglichkeit der Zuordnung bei irgend einem Theile der unausgedehnten Realitäten aufhören; die Anzahl der diesem Theile zugeordneten ausgedehnten Realitäten wäre dann ein Maximum, was dem Nr. 4 Gesagten entgegen ist.

Sodann wird der gedachte Nachweis bezüglich der ausgedehnten Realitäten, mithin nach dem soeben Bemerkten auch bezüglich jeglicher Realitäten geliefert sein, wenn sich zeigen lässt, dass die Anzahl derjenigen Körper, welche sich in einem Raumtheile mit zwei endlichen Dimensionen befinden können, immer eine zählbare sein muss; alsdann nämlich ist wegen der Vertauschbarkeit der Dimensionen unter einander die Anzahl der Körper, welche als im

Raum existirend gedacht werden können, ein Produkt aus drei endlichen Faktoren, also endlich.

Schliesslich sei noch darauf hingewiesen, dass man in jeder Strecke eines Raumtheiles mit zwei endlichen Dimensionen alle darin ganz oder zum Theil enthaltenen Körper, eventuell bei genügender Verkleinerung, innerhalb dieser Strecke in einer Reihe hintereinander geordnet denken kann.

6. Nach diesen Vorbemerkungen werde ein doppelter Beweis gegen die Möglichkeit einer transfiniten Anzahl angetreten.

Erster Beweis. Nehmen wir an, es existirte eine transfinite Anzahl hinter einander geordneter Kugeln; greifen wir aus dieser Anzahl eine beliebige Kugel A heraus, so muss wenigstens die Anzahl der an einer Seite, wir wollen sagen rechts von A befindlichen Kugeln eine transfinite sein. Denken wir uns nun von A zu einer jeden rechts befindlichen Kugel je ein Seil derart gezogen, dass dasselbe, indem es zwei Kugeln verbindet, zugleich auch alle zwischen diesen Kugeln befindlichen Kugeln verbindet; es ist nun, wenn ich irgend ein Seil wähle, immer ein anderes vorhanden, welches eine Kugel mehr verbindet, als das erstere, es sei denn, dass das erstere alle Kugeln verbindet. Weiterhin kann man ein Seil gezogen denken, welches alle Kugeln verbindet. Letzteres Seil kann keine Kugel verbinden, welche nicht schon wenigstens von einem der erstgedachten Seile verbunden wird; mithin muss unter den erstgedachten Seilen eines sein, welches gleichfalls alle Kugeln verbindet. Es verbindet also von den erstgedachten Seilen ein Theil je eine endliche Anzahl von Kugeln, eines jedoch (oder mehrere) eine unendliche (transfinite) Anzahl Kugeln. In diesem Schlusse liegt ein Widerspruch, wie sich aus folgender Betrachtung ergiebt. Diejenigen Seile, welche nur endlich viele Kugeln verbinden, seien weiss, die anderen gelb; diejenigen Kugeln, welche nur von gelben Seilen verbunden werden, seien gelb, dagegen die übrigen, welche also auch von weissen Seilen verbunden werden, weiss. Es gibt nun ein Seil, welches alle weissen Kugeln, aber keine gelben verbindet, ferner ein anderes, welches alle weissen und eine gelbe verbindet. Das letztere Seil verbindet unzählbar viele, das erstere aber endlich viele Kugeln; man erhält also durch Hinzufügung einer Einheit zu einer endlichen Zahl eine unendliche Vielheit, was unmöglich ist.

7. Zweiter Beweis. Wie den vorigen, so kleiden wir auch diesen Beweis am besten in ein möglichst concretes Beispiel. Es sei also eine unzählbare Menge hintereinander geordneter Stäbe vorhanden. Wir zeigen nun zunächst, dass es in jeder Reihe existirender Realitäten eine letzte geben muss d. h. eine solche, welche von einem in der Reihe beliebig gewählten Anfangspunkte eine grössere Entfernung hat, als jedes andere Glied der Reihe. Zu diesem Zwecke denken wir uns eine vom Punkte A sich nach rechts erstreckende Reihe von Stäben, deren Menge mit m bezeichnet werde; wenn nun zur Rechten jedes in der Reihe befindlichen Stabes sich noch ein anderer Stab befände, so müssten in der Reihe m Stäbe vorhanden sein, welche zu je einem anderen der Reihe angehörigen Stabe rechte Nachbarn wären; der dem Punkte A zunächst befindliche Stab ist aber zu keinem Gliede der Reihe rechter Nachbar; es würden also ausschliesslich des ersten Stabes gerade so viele Stäbe in der Reihe vorhanden sein, als einschliesslich desselben, also $n = n + 1$ sein. Zur Vermeidung dieses Widerspruches müssen wir annehmen, dass es in der Reihe einen Stab gibt, dem zur Rechten kein anderer benachbart ist, der also von A aus der „letzte" ist oder vielmehr zur Abkürzung heissen möge. Nunmehr stösst der weitere Beweis auf keine Schwierigkeit mehr. Entweder nämlich ist der „letzte" Stab von A endlich oder unendlich weit entfernt. Im ersteren Falle ist die Anzahl der Stäbe offenbar eine endliche; im letzteren ist ein Theil der Stäbe endlich, ein anderer unendlich weit entfernt; unter den endlich weit entfernten gibt es nach dem vorigen einen „letzten" Stab; der rechte Nachbar dieses letzten endlich weit entfernten Stabes gehörte aber zu den unendlich weit entfernten Stäben, obwohl er nach der Annahme nur endliche Entfernung von demselben hat oder direct an ihn anstösst. Zur Lösung dieses Widerspruches reicht es nicht hin, die Entfernung des letzten, endlich weiten Stabes von seinem rechten Nachbarn unendlich weit zu nehmen, da man alsdann diese Entfernung mit Stäben ausgefüllt denken könnte.

8. Der vorstehenden Entwicklung tritt die von G. Cantor in sehr interessanten Untersuchungen begründete Theorie der transfiniten Zahlen entgegen.[1]) Nach derselben hängt die Anzahl einer unend-

---

[1]) S. Mathem. Annalen Bd. 15. 17. 20. 21 u. 23, Borchardts Journal Bd. 77 u. 84. (Grundlagen d. allgem. Mannigfaltigkeitslehre).

lichen Menge von der Anordnung ihrer Elemente ab; derselben Menge können nach den verschiedenen Arten ihrer Anordnung unendlich viele Anzahlen zukommen; so biete das Resultat $m = m + 1$ gar nichts Widersprechendes dar. Um die Begründung dieses Einwandes näher kennen zu lernen, ist es von Nöthen, den Anzahlbegriff kurz zu erörtern. Zwei endliche Mengen werden von gleicher Anzahl genannt, wenn sie sich gegenseitig eindeutig und vollständig, also je ein Element der einen je einem Elemente der anderen zuordnen lassen, so dass aus keiner der beiden Mengen ein Element übrig bleibt, dem nicht ein Element der anderen Menge verbunden wäre. Aus diesem Anzahlbegriffe folgert nun Cantor, dass die Anzahl einer unendlichen Menge durch ihre Anordnung modifizirt werde. So habe z. B. die Reihe der ganzen positiven Zahlen von 1 ab gleiche Anzahl mit der Reihe der ganzen positiven Zahlen von 101 ab; denn, so heisst die Begründung, es braucht blos angenommen zu werden, jedes Glied der ersten Reihe sei dem um 100 grösseren Gliede der zweiten Reihe zugeordnet, und es bleibt in keiner der beiden Reihen ein Glied, welches nicht einem Gliede der anderen Reihe zugeordnet ist.

Was haben wir nun zu entgegnen? Wenn bloss abstracte Zahlen und die Festsetzung ihrer Beziehungen in Betracht kämen, so wäre hier nicht die Stelle, um über die Richtigkeit der Theorie oder vielmehr nur der Ausdrucksweise zu rechten. Es sollen aber, wie ausdrücklich erklärt wird, die aufgestellten Sätze auch auf Mengen existirender oder als existirend angenommener Dinge Anwendung finden. Und da müssen wir die Veränderung der Anzahl durch die Anordnung der Elemente entschieden bestreiten und die Behauptung gegenüberstellen, dass, wenn zwei Mengen existirender Realitäten, Element für Element, in irgend einer Verbindung beiderseits vollständig zugeordnet werden können, alsdann auch bei jeder beliebigen Verbindung je eines Elementes der einen Menge mit einem der anderen auch jedes Element der letzteren Menge verbunden ist. Beweisen wir nun diese Behauptung, ohne dass wir die Endlichkeit der Mengen voraussetzen.

9. Wenn eine Menge von weissen Kugeln einer Menge von schwarzen Kugeln, Element für Element, beiderseits vollständig zugeordnet ist, so kann jede beliebige andere Zuordnung durch Vertauschungen von schwarzen Kugeln mit einander zu Wege gebracht werden. Wird nämlich die Menge als unendlich angenommen, so

kann zwar im Allgemeinen die zu erzielende Anordnung nicht durch eine endliche Anzahl von Vertauschungen je zweier Elemente erreicht werden; wohl aber würde sie durch solche Vertauschungen erreicht, wenn in irgend einer Reihenfolge nacheinander bei jedem zu vertauschenden Gliede die Vertauschung vorgenommen würde. Nun aber ändert sich, wie zugestanden wird, durch keine Vertauschung je zweier Elemente die Anzahl; mithin bleibt letztere auch in der neuen Anordnung dieselbe. Gegen diesen Beweis können die Gegner sich nicht auf den Satz: „Infinitum pertransiri non potest" berufen; denn wer unendlich viele gleichzeitig seiende Realitäten als möglich einräumt, wird auch unendlich viele nach einander erfolgende Acte zugeben müssen. Und was insbesondere den gedachten Autor betrifft, so nimmt derselbe eine Linie aus unendlich vielen, sämmtlich auseinander gelegenen Punkten bestehend an; bei dieser Annahme kann auch Nichts eingewendet werden, wenn ein endlicher Zeitraum aus unendlich vielen, von einander getrennten Augenblicken bestehend behauptet wird, sodass sogar in endlicher Zeit unendlich viele Acte nach einander stattfinden können.

Wenn zwei Mengen existirender Realitäten gegeben sind, so muss es doch lediglich von der Art der Vielheiten als solcher abhängen, ob bei der Verbindung je eines Elementes der einen Menge mit einem der andern sich ein Ueberschuss der einen Menge ergibt. Es kann hierbei nicht die Anordnung d. i. die Folge entscheidend sein, in welcher wir die Elemente geordnet denken. Denn diese Folge ist zunächst nur eine logische, keine reale, die Menge innerlich afficirende; denn wenn wir von einer ersten, zweiten u. s. w. Kugel reden, so ist dieses eine blosse Bezeichnung, die von unserer Willkür abhängig ist; es mag ja diese Bezeichnung sich auf ein reales Fundament, ein örtliches oder sonstiges Verhältniss der Elemente der Menge, stützen, indem wir als erste Kugel diejenige bezeichnen, welche uns oder irgend einem Punkte die nächste ist; aber es erhellt, dass wir jede zur Menge gehörige Kugel als die erste bezeichnen können, ohne dass mit der Veränderung der Bezeichnung an der Menge selbst, objectiv betrachtet, das Geringste geändert wird; auch das reale Fundament der gewählten Folge, das örtliche Verhältniss der Kugeln zu einander, kann durch regelloses Durcheinanderwirbeln auf die verschiedenste Art geändert werden, ohne dass die Menge als solche eine Aenderung erleidet. Denn, wenn man bei einer gegebenen Menge concreter Dinge sowohl von der Beschaffenheit der Dinge, als auch von der Ordnung ihres Gegebenseins oder vielmehr von dem Verhältnisse der Dinge untereinander abstrahirt, so ergibt sich ein Allgemeinbegriff, der von Cantor die Mächtigkeit der Menge genannt wird; hiernach ist die Mächtigkeit nichts Anderes als die Menge als solche, die Vielheit in abstracto, man möchte sagen die Grösse der Menge. Wenn nun auch auf diesen Allgemeinbegriff kraft seiner Definition die Anordnung der Elemente keinen Einfluss hat, so ergibt sich doch andererseits aus seiner Definition, dass er sich ändern muss, wenn aus der Menge ein Element fortgenommen wird.

11. Gedenken wir hier noch eines schon oben angedeuteten Einwurfs der Gegner. Wenn man, so lautet derselbe, sich zwei Mengen Kugeln, die einen weiss, die anderen schwarz so numerirt denkt, dass in jeder der beiden Mengen jede Zahl als Nummer vorkommt, und dann jede weisse Kugel mit einer um 100 höher numerirten schwarzen verbunden denkt, so sind die weissen Kugeln sämmtlich verbunden, die schwarzen Kugeln mit den Nummern 1 bis 100 bleiben aber unverbunden. Diesem Einwurfe gegenüber sei bemerkt, dass derselbe keineswegs die Richtigkeit der Schlussfolgen in unseren vorstehenden Beweisen direkt angreift, sondern blos auf anderem Wege das Gegentheil zu demonstriren sucht. Und zwar geht der Gegenbeweis von der Voraussetzung aus, dass eine unendliche Menge von Kugeln, welche als Nummern alle möglichen Zahlen tragen, möglich sei. Diese Voraussetzung, mit welcher der Einwurf steht und fällt, wird durchaus unbewiesen gemacht, und ist nach dem Vorigen widersprechend.

Es sei hier noch kurz die Frage berührt, ob und inwiefern die Richtigkeit des beim kosmologischen Gottesbeweise oft vorkommenden Schlusses von einem verursachten Sein auf eine aus sich seiende Ursache, davon abhängig ist, ob eine Anzahl von unendlich vielen Realitäten möglich ist. Dem genannten Schlusse werde folgende Formulirung gegeben. Jedes nicht aus sich seiende Ding setzt eine Ursache voraus, die letztere, falls sie nicht aus sich, wiederum eine Ursache u. s. w. Wäre nun jedes Glied der ganzen Reihe der Ursachen eines Dinges selbst verursacht, so gäbe es in dieser Reihe so viele Glieder, welche ein Glied der Reihe verursacht hätten, als überhaupt Glieder der Reihe vorhanden sind. Das ist aber nicht möglich, weil das letzte Glied der Reihe kein anderes zur Reihe gehöriges Glied verursacht hat; mithin muss es eine unverursachte Ursache geben. Es erhellt, dass der vorstehende Beweis auch für eine unzählbare Reihe von Ursachen Gültigkeit hat, wofern nur eingeräumt wird, dass die Vielheit dieser Reihe ausschliesslich eines Elementes nicht dieselbe ist, wie die ganze Reihe. Die Anzahl der Ursachen aber eine unvermehrbare zu nennen, dürfte wohl Niemandem in den Sinn kommen.

(Fortsetzung folgt.)