Des hl. Thomas Lehre vom Unendlichen und die neuere Mathematik.

Von Prof. Gerhard Langenberg in Wattenscheid.

Erster Teil.

Bezüglich der thomistischen Lehre vom Unendlichen sind wir nicht auf eine Vielheit zerstreuter Einzeläusserungen angewiesen. Die Summa Theologica behandelt nämlich das Unendliche ausführlich in sieben Artikeln: 1, q. 7, a. 1 bis 4; 1, q. 14, a. 12; 1, q. 53, a. 3; 3, q. 10, a. 3 [1]). Wenn wir den theologischen Stoff ausscheiden, so erhalten wir eine Abhandlung, die zwar durch Gegenstand und Anordnung der scholastischen Disputation etwas unregelmässig in der Form wird, aber doch eine geschlossene Theorie des Unendlichen bietet und sogar bis zu seinen Paradoxien vordringt. Für unsere rein philosophische Betrachtung wollen wir aus mehrfachen Gründen die ersten zwei Artikel, welche die Unendlichkeit Gottes behandeln, ausscheiden, soweit sie nicht das in anderem Sinne Unendliche streifen. Verwandte Abschnitte in anderen Werken des hl. Thomas bleiben im allgemeinen unberücksichtigt, weil sie in unserer Frage nicht so systematisch sind, wie die Aufsätze in der abschliessenden S. Th., dann aber auch um die Einheitlichkeit der Grundlage für unsere Besprechung nicht zu sehr zu stören.

Da mit jedem Zitat aus neuzeitlichen philosophischen Werken die Gefahr einer wenig fruchtbringenden Polemik über die Terminologie des Unendlichen und ihre Anwendung gegeben ist, so wollen wir mit möglichst wenig Polemik bezw. Zitaten auszukommen suchen und hauptsächlich die Darlegungen des Philosophen Thomas wirken lassen. Es möge dabei aber gestattet sein, durch einige Ausdeutungen und Anwendungen die Tragweite der thomistischen Grundsätze zu erläutern, um so einen Vergleich mit der neueren Mathematik zu ermöglichen.

Zunächst geben wir die Gliederung des Stoffes durch Aussonderung der Hauptlehrsätze aus den erwähnten Artikeln. Die Gesamtheit der Thesen liefert uns gleichzeitig eine Unterlage für die Besprechung der Terminologie.

---

[1]) Im folgenden einfach mit den Ziffern 1—7 zitiert.

I.

Uebersicht über die Lehre des hl. Thomas.

1. Die **Definition** des Unendlichen:

Infinitum dicitur aliquid ex eo, quod non est finitum (1c).

Infinitum est „cuius quantitatem accipientibus semper est aliquid extra sumere", ut dicitur Phys. lib. III, cap. 6 (5, 1).

2. Das Unendliche und das **Erkenntnisvermögen**:

Infinitum transiri non potest neque a finito neque ab infinito (5 ad 2).

Cognoscere infinitum secundum modum infiniti est cognoscere partem post partem. Et sic nullo modo contingit cognosci infinitum (5 ad 1).

Et hoc modo verum est quod eius quantitatem accipientibus, scilicet parte accepta post partem, semper est aliquid extra accipere. Sed sicut materialia possunt accipi ab intellectu immaterialiter et multa unite, ita infinita possunt accipi ab intellectu non per modum infiniti, sed quasi finite; ut sic ea quae sunt in se ipsis infinita, sint in intellectu cognoscentis finita (6 c).

3. Die **Vielheit** des Unendlichen:

Nihil prohibet aliquid esse infinitum uno modo, quod est alio modo finitum (7 ad 2).

Id quod est infinitum omnibus modis, non potest esse nisi unum.

Si tamen aliquid esset infinitum uno modo tantum, nihil prohiberet esse plura talia infinita.

Quia infinitum non est substantia, sed accidit rebus quae dicuntur infinitae, sicut infinitum multiplicatur secundum diversa subiecta, ita necesse est quod proprietas infiniti multiplicetur, ita quod conveniat unicuique eorum secundum illud subiectum.

Zum Satze „infinito non potest esse aliquid maius":

Sic igitur dicendum est, quod infinito simpliciter et quoad omnia nihil est maius; infinito autem secundum aliquid determinatum non est aliquid maius in illo ordine; potest tamen accipi aliquid aliud maius extra illum ordinem (7 ad 3).

4. Die **Realität** des Unendlichen **in den Dingen**:

a) in der **räumlichen Ausdehnung**:

Omne corpus naturale habet determinatam quantitatem et in maius et in minus. Unde impossibile est aliquod corpus naturale infinitum esse (3 c). Et similiter potest dici de superficie et linea (3 contra).

De corpore etiam mathematico eadem ratio est (3 c).

... licet infinitum non cit contra rationem magnitudinis in communi (3 ad 2).

b) in der **Menge**:

Impossibile est esse multitudinem infinitam in actu (in rerum natura).

Sed esse multitudinem infinitam in potentia possibile est (4 c).

Infinitum multitudinis non reducitur in actum, ut sit totum simul, sed successive; quia post quamlibet multitudinem potest sumi alia multitudo in infinitum (4 ad 1).

Infinitum invenitur in potentia in divisione continui (4c).

c) in **Bewegung** und **Zeit** (das Wesen des Kontinuums):

Inter quaelibet duo puncta sunt infinita puncto media, cum nulla duo puncta consequantur se invicem sine medio.

Cum magnitudo sit divisibilis in infinitum, et puncta sint etiam infinita in potentia in qualibet magnitudine, sequitur quod inter quaelibet duo loca sint infinita loca media.

Ordo prioris et posterioris in motu continuo est secundum ordinem prioris et posterioris in magnitudine.

Sicut loca media sunt infinita in potentia, ita et in motu continuo est accipere infinita quaedam in potentia.

Cum inter primum „nunc" et ultimum temporis mensurantis motum sint infinita „nunc", oportet quod inter primum locum a quo incipit moveri, et ultimum locum ad quem terminatur motus, sint infinita loca (6c).

Motus et tempus non sunt secundum totum in actu, sed successive; unde habent potentiam permixtam actui. Sed magnitudo est tota in actu. Et ideo infinitum quod convenit quantitati et se tenet ex parte materiae, repugnat totalitati magnitudinis, non autem totalitati temporis vel motus (3 ad 4).

II.
Zur Terminologie.

Die wichtigsten Mengenbezeichnungen [1]), für die das Prädikat „unendlich" gegebenenfalls in Betracht kommt, waren im Vorstehenden quantitas,

[1]) Eine gute Uebersicht über alle Fachausdrücke in De natura generis, c. 20 (opusc. 42). Zur Definition des Mengenbegriffs vergl. die kritischen Aeusserungen von Hessenberg (Grundbegriffe der Mengenlehre, Göttingen 1906, 141 und 148 f.). Schönfliess zitiert (Entwickelung der Mengenlehre und ihrer Anwendungen², 1913, 1. Hälfte S. 5, Anm. 3) „im historischen Interesse" die Cantorsche Wortdefinition: „Menge ist jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen". Zum Begriffe der transzendentalen und der mathematischen Einheit vergl. bei Thomas: Unum enim nihil aliud significat, quam ens indivisum. Et ex hoc ipso apparet, quod unum convertitur cum ente (1, q. 11, a. 1c). Sed unum quod est principium numeri, addit aliquid supra ens ad genus quantitatis pertinens (ibid. ad 1). Unum opponitur privative multis, inquantum in ratione multorum est, quod sint divisa. Unde oportet, quod divisio sit prius unitate, non simpliciter, sed secundum rationem nostrae apprehensionis. Apprehendimus enim simplicia per composita. Unde definimus punctum „cuius pars non est" vel „principium lineae". Sed multitudo etiam secundum rationem consequenter se habet ad unum: quia divisa non intellegimus habere rationem multitudinis, nisi per hoc quod

magnitudo (in communi) und multitudo. Zu dem quantitas-Begriff, welcher der umfassendste ist, vergl. aus der S. Th. folgende Stellen; Duplex est quantitas. Una scilicet, quae dicitur quantitas molis vel quantitas dimensiva. Sed alia est quantitas virtutis, quae attenditur secundum perfectionem alicuius naturae vel formae (1, q. 42, a. 1, ad 1). — Quantitas corporalis habet aliquid, inquantum est quantitas, et aliquid inquantum est forma accidentalis. Inquantum est quantitas, habet quod sit distinguibilis secundum situm vel numerum; et ideo hoc modo consideratur augmentum magnitudinis per additionem, ut patet in animalibus. Inquantum vero est forma accidentalis, est distinguibilis solum secundum subiectum, et secundum hoc habet proprium augmentum, sicut et aliae formae accidentales, per modum intensionis eius in subiecto (22, q. 24, a. 5, ad 1). Auf der einen Seite steht also der Inbegriff der Wesensvollkommenheiten eines Dinges, auf der anderen die räumliche Ausdehnung und die Menge oder Mannigfaltigkeit. Danach ergibt sich ungezwungen die thomistische Dreiteilung:

a) Das infinitum simpliciter oder inf. secundum essentiam, das absolute Wesen,
b) das infinitum quantitatis dimensivae, das Unendliche der räumlichen Ausdehnung,
c) das infinitum multitudinis, das Unendliche der Menge.

Wie in der Einleitung bereits bemerkt, soll das der Wesenheit nach Unendliche hier nicht näher behandelt werden. Anscheinend bietet es auch weniger Schwierigkeiten als das infinitum secundum quid! Gelegentlich spricht Thomas vom infinitum per se (den genannten drei Arten) im Gegensatz zum infinitum per accidens. Letzteres spielt in seiner philosophischen Beweisführung keine nennenswerte Rolle, wohl aber bei den arabischen Aristotelikern. Definieren lässt es sich vielleicht als eine unbestimmt grosse oder beliebig wachsende Menge, bei welcher die Charakterisierung, ob endlich oder unendlich, aus irgend einem Grunde noch nicht geschehen ist oder auch nicht zu geschehen braucht.

Bemerkenswert ist die Sorgfalt, mit welcher der thomistische Sprach-

---

utrique divisorum attribuimus unitatem. Unde unum ponitur in definitione multitudinis, non autem multitudo in definitione unius. Sed divisio cadit in intellectum ex ipsa negatione entis. Ita quod primo cadit in intellectum ens. Secundo quod hoc ens non est illud ens; et sic secundo apprehendimus divisionem, tertio unum, quarto multitudinem (ibid. a. 3, ad 4). Es kommen also nur die beiden Grundgesetze „a ist a“ und „a ist nicht nicht-a“ in Betracht. Da die Einheit auch eine „Menge“ (nach unserem Sprachgebrauch) ist, so lässt sich alles, was mit einer Einheit übereinstimmt oder von ihr (auch im Sinne der verallgemeinerten Zahlen) verschieden ist, die „Nullmenge“ nicht ausgeschlossen, unter den Begriff „Menge“ bringen. Dieser darf nicht immer mit „Zahl“ vertauscht werden, weil er auch Dinge mitbezeichnen kann; unter Umständen sind diese sogar abstrakte Zahlen.

gebrauch quantitas dimensiva (Ausdehnung) und magnitudo (Grösse), multitudo (Menge) und numerus (Zahl, Anzahl) auseinander hält. Das zweite Glied der genannten Begriffspaare wird nicht mit dem Adjektiv „unendlich“ in Verbindung gebracht, weil der Begriff der Begrenztheit bereits darin enthalten ist. (Im Deutschen ist er wenigstens nicht ausgeschlossen, weshalb man sich besser dem vorsichtigeren Sprachgebrauche anschliesst). Bei Thomas gibt es demnach wohl eine multitudo infinita, aber keinen numerus infinitus, denn jede Zahl ist nach ihm eine species multitudinis und „infinita poni opponitur cuilibet speciei multitudinis“ (4 ad 3).

Der Begriff „unendlich“ wird zunächst nicht weiter erklärt als durch die Wortdefinition: Infinitum dicitur aliquid ex eo, quod non est finitum; unendlich heisst: nicht-endlich. Die zweite Definition, die von Aristoteles stammt, erscheint erst in Art. 5; sie liefert das Kriterium der Unendlichkeit für unser Erkenntnisvermögen und wird in den Artikeln 3 und 4 über die Existenzweise des Unendlichen nicht verwertet. — Aehnlich negativer Art ist der Satz: Infinita carent mensura quantitativa (5 ad 3). Mit der ersten Definition können wir uns vorläufig begnügen, denn der Unendlichkeit entgegenstehend und sie ausschliessend ist nur der finis, das Ende, bzw. der terminus, die Grenze (vergl. dazu den ganzen Gedankengang des 3. Artikels). In ein Ding Grenzbestimmungen (gewöhnlich allseitig) einführen, heisst dementsprechend determinare, wofür uns eigentlich eine „bestimmte“ Uebersetzung fehlt. — Alle diese Begriffe werden von Thomas als bekannt vorausgesetzt. Uebrigens würde mit einer Definition auch nicht viel erreicht werden, denn e i n f a c h e Begriffe können nur noch durch negative Umschreibungen definiert werden [1]), sodass die unbedingte Jagd auf ein genus proximum und eine differentia specifica erfolglos bleibt oder auch auf Abwege führt [2]),

Marksteine in der peripatetischen Philosophie sind die Begriffe a c t u s und p o t e n t i a, in dem Streit über das Unendliche gleichzeitig gefährliche Prellsteine. Alle Meinungsverschiedenheiten über die Existenz von Dingen, auf die der Begriff der unendlichen Menge Anwendung finden soll, gehen auf die A u f f a s s u n g und die A n w e n d u n g dieser beiden Fachausdrücke

---

[1]) Vergl. 1, q. 10, a. 3, ad 1: Simplicia consueverunt per negationem definiri; sicut punctum est, cuius pars non est; quod non ideo est, quod negatio sit de essentia eorum, sed quia intellectus noster, qui primo apprehendit composita, in cognitionem simplicium pervenire non potest nisi per remotionem compositionis.

[2]) Zum Begriff der „Grenze“ sei die aristotelische Definition angeführt, die wir bei Thomas wohl voraussetzen dürfen: *Πέρας λέγεται τὸ ἔσχατον ἑκάστου καὶ οὗ ἔξω μηδὲν ἔστι λαβεῖν πρώτου, καὶ οὗ ἔσω πάντα πρώτου* (Metaph. V, c. 17; 1022 a): „Grenze heisst das Aeusserste eines Dinges, das, ausserhalb dessen nichts von ihm zu finden ist, und innerhalb dessen alles von ihm sich findet, beidemale das Aeusserste im ursprünglichen Sinne genommen“ (Rolfes). — Ueber die Definition Isenkrahes vergl. Philos. Jahrb. XXIX (1916) 71 f., 313 ff.

zurück. Der actus, die „Wirklichkeit" umfasst das ganze Gebiet des objektiv Existierenden, welches stets in Individuen existiert; denn das Allgemeine, das Universale kann als solches nicht objektiv existieren. Selbstverständlich gehören nicht bloss die Substanzen, sondern auch alle ihre Eigenheiten und vollzogenen Tätigkeiten, materielle wie immaterielle, zum Aktualen und in demselben Sinne alles, was in der Vergangenheit objektiv existiert hat oder geschehen ist. Die kommenden Tätigkeiten existieren noch nicht in actu; also in potentia, denn die beiden Gegensätze sind ausschliessend. Aehnlich, aber auch nur ähnlich, sprechen wir in der Physik von potentieller Energie, wobei über die Natur der betreffenden Energie noch nichts ausgesagt ist. Der Träger der Energie und das Energiequantum selber existieren in actu, die Betätigung hängt von der Aktuierung einer oder mehrerer Bedingungen ab, die Tätigkeit und die Arbeitsleistungen sind vor der Auslösung in potentia, in der Möglichkeit, mit und nach der Auslösung in actu, in der Wirklichkeit. Diese Potentialität ist aber nur ein ganz besonderer Fall, in der Metaphysik umfasst das Gebiet des Möglichen unendlich viel mehr. Ea vero, quae non sunt actu, sunt in potentia, vel ipsius Dei vel creaturae; sive in potentia activa vel passiva; sive in potentia opinandi vel imaginandi vel quocumque modo significandi (1, q. 14. a. 9c). Nun kann man von den Fähigkeiten (diese sind ja zunächst und ursprünglich mit potentia gemeint) des Subjektes, durch welche die betreffenden Dinge aktuales Dasein empfangen können, und auch von der Frage, ob sie tatsächlich später Dasein empfangen werden, gänzlich absehen und lediglich die Natur der Objekte ins Auge fassen. Auf diese Weise gelangt man zum Begriff der absoluten Potenz, deren Merkmal die innere Widerspruchslosigkeit ist und die gewöhnlich gemeint ist, wenn es schlechtweg heisst, dass ein Ding nicht in actu, sondern in potentia sei. Dieses Reich der Möglichkeit, der ordo idealis, umfasst danach alles, was widerspruchslos denkbar, vorstellbar, irgendwie darstellbar ist (vergl. die hervorgehobenen Ausdrücke in obigem Zitate), auch was aus gegebenen Objekten ableitbar und irgendwie durch Zeichen darstellbar ist, es umfasst die Welt der gedachten Wesenheiten mit allem, was zur Wesenheit gehört oder aus ihr sich entwickeln lässt; zu ihm gehören auch die Objekte und Wahrheiten der Mathematik, gleichgültig ob wir sie bereits kennen oder nicht. Die Dinge dieser idealen Welt haben Realität, nicht im physischen, sondern im metaphysischen Sinne, sie existieren in demselben Sinne, wie man den Gebilden der Mathematik „Existenz" beilegt, sie existieren ewig, notwendig, unveränderlich, unabhängig von uns; wir brauchen sie bloss zu finden, zu entdecken oder nachzudenken. Die Anwendung des Existenzbegriffes im Sinne der inneren Widerspruchslosigkeit ist den mathematischen Wissenschaften geläufig, weniger der Philosophie, was bei Existenzialsätzen in einem Beweisgange zu beachten ist. Aehnlich sind die in der Mathematik gebräuchlichen Aussagen „es gibt", „haben", „vorhanden sein", „Tatsachen". Dies klingt wie actus, und doch handelt es sich um ein Potenziales. Der Ausdruck „existiert" kann aber auch bedeuten: dieses oder jenes ist nachgewiesen. Die Aktualität, die in diesem Satze eingeschlossen liegt, bezieht sich aber nicht auf die Existenzweise der Objekte, die ja ihrem Wesen nach potenzial bleiben, sondern auf die Entwickelung der menschlichen Erkenntnis, die von der Möglichkeit zu einem Ergebnisse gelangt ist. Zu der ganzen Auffassung der potentia und des Existenzbegriffes vergleiche man Hessenberg (a. a. O. 174): „Und doch ist es klar, dass es keinen Satz geben kann, der für alle ganzen Zahlen gilt, wenn nicht alle diese ganzen Zahlen als existierend angesehen werden. Und es kann nicht im Ernst behauptet werden, dass die Zahl Zehn erst zu existieren begonnen habe, als man zum erstenmale alle Finger der beiden Hände zu zählen gelernt habe, noch wird man einen Menschen finden können, der schon bis zu einer Billion gezählt hat. Welchen anderen Sinn aber soll es haben, wenn man das Zählprinzip als ein Erzeugungsprinzip bezeichnet? Es ist eine unter vielen Methoden und unter diesen logisch die erste, uns eine bestimmte Zahl vor das Bewusstsein zu stellen; die Zahl wird aber dadurch nicht erzeugt". Die Existenz, welche Hessenberg hier verficht, ist identisch mit der oben geschilderten Existenz im ordo idealis. Was Geltung hat, hat ewige Geltung, unabhängig von der logischen Erzeugung durch uns[1]).

Nun kommen aber in der Mathematik noch entia rationis im engeren Sinne, reine Gedankendinge hinzu, die „uneigentlichen Gebilde", z. B. die unendlich fernen Punkte und die unendlich ferne Gerade. Auch diese werden als „existierend" behandelt, gelegentlich sogar bezeichnet. Wegen der Wichtigkeit scharfer Unterscheidungen sei daher eine Mahnung zitiert (Killing-Hovestadt, Handbuch des mathematischen Unterrichts, 1910, I 160): „Die Schüler sollen mit den uneigentlichen Gebilden so operieren, als ob sie existierten, und doch daran festhalten, dass ihre Einführung nur auf einer Fiktion beruht. . . . Wie schwer es aber ist, sich von Fehlern frei zu halten, geht aus zahlreichen Beispielen hervor. So glaubte ein tüchtiger Mathematiker versichern zu können, er besitze eine klare Anschauung von den uneigentlichen Gebilden. Auch wurde es vor nicht zu langer Zeit bei Besprechung eines Schulbuches als Fehler bezeichnet, dass darin parallelen Geraden kein Schnittpunkt beigelegt werde, während sie sich doch im Unendlichen schnitten; und der Verfasser erwiderte nicht etwa, seine Definition sei die richtige, und der Rezensent habe eine falsche Ansicht über das Wesen der unendlich fernen Punkte, sondern er gestand zu, einen Fehler gemacht zu haben und suchte ihn nur zu entschuldigen. Derartige Beispiele sind wohl geeignet, zur Vorsicht zu mahnen". Für die Metaphysik ist der gekennzeichnete Sprachgebrauch

[1]) Den Begsiff der „transsubjektiven Existenz" verwenden wir nicht, weil er dasselbe und auch den actus bezeichnen kann.

an sich nicht massgebend, anderseits auch nicht zu beanstanden, so lange eine mathematische Erwägung ihren logisch-mathematischen Charakter beibehält. — Dazu gesellt sich eine andere Schwierigkeit. Da es nämlich mehrere Geometrien in der Form von hypothetisch-deduktiven Systemen gibt, die nicht alle zugleich wahr sein können, obwohl jedes einzelne System in seinem Aufbau logisch richtig ist, so ist die Philosophie unter Umständen vor die Frage gestellt, ob eine Folgerung aus einem der Lehrgebäude mit der Wirklichkeit übereinstimmt oder überhaupt übereinstimmen kann. In diesem Sinne ist die Mathematik nicht mehr sicherste Wissenschaft, und dies meint auch Couturat (Die philosophischen Prinzipien der Mathematik [Deutsch von Dr. Carl Siegel 1908] 315), wenn er sagt, dass die Geometrie aufhört „eine analytische Wissenschaft und reine Mathematik zu sein, und zwar sobald sie sich auf einen besonderen einzelnen Gegenstand, den wirklichen Raum, bezieht und dessen Existenz einschliesst. Von diesem Gesichtspunkte aus gibt es nur eine annehmbare Geometrie, und man muss notwendigerweise zwischen sämtlichen logisch möglichen Geometrien eine Wahl treffen". Die Widerspruchslosigkeit der Mathematik darf also nicht ohne weiteres der philosophischen gleichgesetzt werden. Dies sei im Interesse der Methodik zum Begriff der potentia hinzugefügt.

Die Termini in actu und in potentia [1]) geben bei Thomas in der oben dargelegten Bedeutung disjunktiv den Existenzbereich oder die Existenzweise an und beziehen sich, was nicht scharf genug hervorgehoben werden kann, nur auf die Dinge, die dem Mengenbegriff „unendlich" unterliegen, nicht auf diesen Begriff selbst. Wie eine Prüfung der Texte lehrt, gilt dies auch dann, wenn die Wörter actu und infinitus zufällig neben einander stehen. Die Methode des hl. Thomas unterscheidet sich in dieser Beziehung auf das vorteilhafteste von der Gepflogenheit neuerer Schriftsteller, sogar ein actualiter oder potentialiter infinitus ohne Bedenken zu handhaben, ein Sprachgebrauch, der sich in deutschen wie in lateinischen Abhandlungen findet. Was bedeutet überhaupt in einem solchen Falle das Adverbium? Häufig stösst man auch auf die unbestimmte Fassung „das aktual (oder potential) Unendliche" oder „aktual unendlich". Wenn hier nicht wieder das Adverbium vorliegt, so mag sie eine etwas lässige Abkürzung für die unendliche Menge aktualer oder potenzialer Dinge sein, in den meisten Fällen aber führt die Ausdrucksweise zu Irrtümern, indem in das Mengenwort die Nebenbegriffe „fertig" und „werdend" eingeschleppt werden, was unter allen Umständen zu verwerfen ist. „Unendlich" ist wie „viel", „jede", „alle" ein Ausdruck, der seinen vollständigen Sinn erst in Verbindung mit einem substantiven Begriff, z. B. Gegenstand, Ding, Mensch, erhält. Oder mit anderen Worten: Wie das Zahlwort „tausend" zu seinem

[1]) Beim ersten fehlt die Präposition zuweilen, beim zweiten selten; also kein ablativus limitationis.

Begriff den Zusatz „aktual" oder „potenzial" nicht zulässt, so auch das „unendlich" nicht.

III.

Das Unendliche und das Erkenntnisvermögen.

Nach der Definition hat das Unendliche keine Grenze. Aus der Analyse dieses Satzes folgt, dass ein unendliches Objekt niemals durch sukzessive Akte, auch nicht durch Denkakte erschöpft werden kann, was die Scholastik nach dem Vorgange des Aristoteles durch den Grundsatz ausdrückte: Infinitum transiri [1]) non potest. Hieraus geht dann die aristotelische Definition hervor. Nun erhebt sich die Frage, ob es Denkobjekte gibt, auf welche die angegebene Definition sich anwenden lässt, ohne mit irgend welchen Tatsachen in Widerspruch zu geraten. Um allen Schwierigkeiten möglichst vorzubeugen, begrenzen wir die Frage auf das Gebiet des Potenzialen, noch enger, auf Abstraktionen mathematischer Art. Der eine Satz schon: Infiniti ratio congruit quantitati (5 ad 1), um von den bereits zitierten Stellen der Uebersicht zu schweigen, beweist, dass Thomas bei der Zahlenmenge und der Ausdehnung ein Unendliches als widerspruchsfrei angesehen hat, und zwar ein Unendliches ohne jeden denaturierenden Zusatz. Dass man nach Aristoteles die Widerspruchslosigkeit anzweifeln könne, konnte dessen bedeutendster Kommentator nicht gut voraussehen, und so bietet er keine weitere Begründung. Dass es widerspruchslos ist, erhellt schon aus der Entstehung der Grundbegriffe [2]). Sobald wir ein Ding und ein davon verschiedenes und ein anderes erkannt und die Begriffe „eins", „zwei" nebst dem Begriff der Ordnung (vorher, nachher, grösser, kleiner u. dgl.) als geltend erfasst haben, ist auch jede folgende Zahl, hinter jedem n ein $n+1$, als **begrifflich gegeben** zu betrachten, und es lässt sich kein logisches Mittel ausfindig machen, um gegen die Natur der allgemeinen Begriffe einen Abschluss herzustellen. Die unendliche Zahlenreihe ist ebenso axiomatisch und ebenso sicher wie die „zwei". Dasselbe gilt von der Ausdehnung, sobald der Begriff der Ausdehnung und der Ordnung in ihr eben als Begriff feststeht. Die Verneinung der Grenze erzeugt also das Unendliche nicht, sondern beruht auf einem Urteil über die Beschaffenheit des Denkobjektes, nachdem die Reflexion eingesetzt hat.

Für das Verhältnis eines **dargebotenen** Unendlichen zum Erkenntnisvermögen ist massgebend der an die Definition sich anschliessende Hauptsatz: Infinitum transiri non potest. Zur Erläuterung seien zunächst folgende Stellen herangezogen:

a) Infiniti ratio congruit quantitati. De ratione autem quantitatis est ordo partium. Cognoscere ergo infinitum **secundum modum infiniti** est cognoscere partem post partem. Et **sic nullo modo**

[1]) Statt dessen auch pertransiri, exhauriri und das inhaltschwere consummari.

[2]) Vergl. S. 81 Anm. 1.

contingit cognosci infinitum, quia, quantacumque quantitas partium accipiatur, semper remanet aliquid extra accipiendum (5 ad 1).

b) Transitio importat quandam successionem in partibus. Et inde est, quod infinitum transiri non potest, neque a finito neque ab infinito. Sed ad rationem comprehensionis sufficit adaequatio (die Zuordung des Erkenntnisaktes zum Objekt als Ganzem), quia id comprehendi dicitur, cuius nihil est extra comprehendentem. Unde non est contra rationem infiniti, quod comprehendatur ab infinito. Et sic, quod in se est infinitum, potest dici finitum scientiae Dei tamquam comprehensum, non tamen tamquam pertransibile (5 ad 2).

c) Si huiusmodi infinitum (das infinitum in quantitate, das Unendliche der „Menge“ im weitesten Sinne des Wortes) cognosci debeat secundum modum ipsius cogniti, impossibile est quod cognoscatur. Est enim modus ipsius, ut accipiatur pars eius post partem . . . Et hoc modo verum est quod eius quantitatem accipientibus, scilicet parte accepta post partem, semper est aliquid extra accipere (7 c).

Nach dem voraufgehenden ist der Leitsatz nicht lediglich eine Umschreibung oder Erläuterung des Begriffs „unendlich“, sondern gleichzeitig Kriterium, was die aristotelische Definition[1]) besonders zum Ausdruck bringt, und — Warnungstafel. Das Voranschreiten des Erkenntnissubjektes von Element zu Element kann niemals zur Erschöpfung des Unendlichen führen, denn dieses hat seinem Wesen nach nie und nimmer eine Grenze. Und mag man auch mit noch so starken Gewaltleistungen des Denkens und der Phantasie voraneilen, selbst wenn einem unendliche Geisteskräfte zur Verfügung ständen, immer bliebe ein Rest mit der wesenhaften Eigentümlichkeit, noch unendlich zu sein; der durchmessene Weg wäre selbstverständlich stets endlich. Damit ist eigentlich das sogenannte indefinitum, „ein an sich stets Endliches, aber doch ohne Ende Vermehrbares“, als zum mindesten überflüssig schon abgetan. Seine Entstehung verdankt es offenbar einer Verwechselung des subjektiven Voranschreitens von einem Element des Unendlichen zum andern mit dem objektiven Charakter der Menge selbst. Das nicht begrenzbare Voranschreiten des Denkens wird dann als eine besondere Potenzialität gefasst, so dass das indefinitum auch dem potentialiter infinitum als durchaus gleichwertig und vertauschbar zur Seite gestellt wird. Streng genommen besagt es nur, dass man noch nicht zu einer Grenze gelangt ist; dabei bleibt die Hauptfrage, ob das untersuchte

[1]) *Οὐ γὰρ οὗ μηδὲν ἔξω, ἀλλ' οὗ ἀεί τι ἔξω ἐστίν, τοῦτο ἄπειρόν ἐστιν . . . Ἄπειρον μὲν οὖν τοῦτ' ἔστιν, οὗ κατὰ τὸ ποσὸν λαμβάνουσιν ἀεί τι λαβεῖν ἔξω ἐστίν. Οὗ δὲ μηδὲν ἔξω, τοῦτ' ἔστι τέλειον καὶ ὅλον.* Physic. III, c. 6. — Das *τέλειον*, im klassischen Latein bereits absolutum, führt zum Begriff des schlechthin Vollkommenen weiter.

Objekt unendlich oder nur sehr gross ist, an sich unentschieden. Gelegentlich stösst man auf den Hinweis, bei dem ein Unterton des Bedauerns mitklingt, die alte Scholastik habe das indefinitum noch nicht gekannt. Allerdings, aber das hat seine guten Gründe.

In diesem Zusammenhange können wir auch das Gegenstück behandeln, nämlich die vielgebrauchte Definition: „Der Wirklichkeit nach ist dasjenige unendlich, was so gross ist, dass es gar nicht mehr grösser sein, ja nicht einmal grösser gedacht werden kann". Ueber die „Wirklichkeit" in Verbindung mit dem Begriff ist schon das Notwendige gesagt worden, Dass Thomas insbesondere dieser Definition nicht beigepflichtet haben würde, geht schon daraus hervor, dass er den Satz „Infinito non potest esse aliquid maius" (7 ad 3) in seiner Allgemeinheit unzweideutig bestreitet, in demselben Sinne, wie die Mathematik es tun muss. Aber noch mehr: die Definition verwechselt das Unendliche mit dem Vollkommenen und passt auch auf den Begriff des Ganzen, worauf bereits Aristoteles mit aller Entschiedenheit aufmerksam gemacht hat. Seine Vorgänger hatten nämlich das Unendliche als ein alles Ueberragendes, alles Enthaltendes, unübertrefflich Grosses definiert, als etwas so Grosses, dass man „ausserhalb" nichts mehr anfügen oder bei der Quantitätsbetrachtung nichts mehr „ausserhalb" finden kann. Demgegenüber drückt er sich etwa so aus: „Mit dem Unendlichen verhält es sich gerade umgekehrt, denn das Unendliche ist nicht etwas, in welchem sich bei der Betrachtung der Quantitätsverhältnisse kein weiteres Element ergibt, — dies wäre das Vollendete (*τέλειον*) oder das Ganze (*ὅλον*) — sondern in welchem es stets noch ein weiteres zu nehmen gibt" [1]).

Die Unmöglichkeit des transire ist Kennzeichen für das Unendliche. Sobald wir erkennen, es liegt im Wesen einer Menge, dass trotz aller Grenzverschiebung immer noch ein Rest übrig bleiben muss, haben wir gemäss der aristotelischen Definition ein Unendliches vor uns. — Aber widerspricht sich Thomas nicht, wenn er (4 ad 2) von einer multitudo infinita numerabilis spricht? Die Zusammenstellung ist für den Augenblick allerdings verblüffend, aber es ist keineswegs zu übersetzen „von uns abzählbar". Man erinnere sich nur des Ausdrucks distinguibilis secundum numerum in der Einteilung der quantitas. Gemeint ist eine unendliche Menge, deren Elemente ihrem Wesen nach dem Zählen unterliegen, im Gegensatz etwa zur räumlichen Ausdehnung [2]). — Auch eine unendliche Erkenntniskraft kann das Unendliche nicht erschöpfen: Transiri non potest neque a finito neque ab infinito [3]).

---

[1]) Physic, III, c. 6. — [2]) Wir werden auf die Sache noch zurückkommen.

[3]) Eine jede Zahl, alle Zahlen im distributiven Sinn (*πάντες οἱ ἀριθμοί*) sind einer endlichen Darstellung durch Wort oder Schriftzeichen fähig, aber nicht alle Zahlen im kollektiven Sinne (*οἱ πάντες ἀριθμοί*), weil dies ein Erschöpfen des Unendlichen durch sukzessive Akte bedeuten würde. Das „Para-

Aber auf welche Weise bewältigt denn unser Verstand das Unendliche? Die Lösung bietet uns die S. 88 unter b) angeführte Stelle und besonders 7 ad 1. Gegenüber jedem Versuche des Erschöpfens bleibt das Unendliche an sich ein „ignotum“. Sed sicut materialia possunt accipi ab intellectu immaterialiter et multa unite, ita infinita possunt accipi ab intellectu non per modum infiniti (d. h. parte accepta post partem), sed quasi finite: ut sic ea quae sunt in se ipsis infinita, sint in intellectu cognoscentis finita. Et hoc modo anima Christi scit infinita, (dies ist die These des Artikels; uns interessiert an dieser Stelle mehr die Erläuterung:) inquantum scilicet scit ea non discurrendo per singula, sed in aliquo uno. Durch eine einigende, zusammenfassende Tätigkeit also bezwingt der Intellekt das Unendliche. Worin dieses Einigende besteht, wird nicht näher angegeben, ist aber unschwer einzusehen. Wenn die Erkenntnis über die unendliche Folge hinweg (discurrendo per singula) unmöglich ist, dann bleibt nur der Weg über das durch allgemeine Begriffe zu erfassende Wesen der Menge übrig. Sogar eine ganz allgemein gehaltene Erkenntnis, wenn sie nur richtig ist, genügt für den Zweck des Zusammenfassens[1]). Dieses letztere ist sozusagen restlos, wenn wir neben dem Anfang der unendlichen „Menge“ das Bildungsgesetz sämtlicher Elemente in ihr kennen, worauf ja auch die Möglichkeit beruht, den endlichen Summenwert gewisser unendlicher Reihen zu bestimmen. Je weniger Stoff unser „Vorstellen“ bei dem Zusammenfassen findet, desto schwieriger wird das begriffliche Denken, am schwierigsten wohl beim absoluten Raum. Und doch haben wir auch hier mit der Kenntnis der dreidimensionalen stetigen Ausdehnung und mit der absoluten Gewissheit, dass es nirgendwo und niemals anders sein kann, die Erkenntnis eines allumfassenden Bildungsgesetzes. Je mehr wir uns der „durchgehenden“ Phantasie, die uns immer in die Dinge hineinzuziehen sucht, entledigt haben, desto eher gewinnen wir den Standpunkt einer Art Intuition gegenüber der Fülle des Objektes und erfassen in einem geistigen Bilde — mehr oder minder schöpferisch oder gewalttätig — quasi finite das Unendliche, selbst dann, wenn uns über seine innere Struktur nur sehr wenig bekannt ist. Uebrigens haben wir dieselbe Geistesarbeit gegenüber sehr grossen, aber endlichen Mengen zu leisten; man denke z. B. den Inhalt der Begriffe Trillion, Menschheit, Natur.

Angesichts der zuletzt besprochenen Stellen darf man wenigstens für die thomistische Philosophie ein Urteil Hessenbergs wohl einschränken.

doxon der endlichen Darstellung“ verdient also seinen Namen nicht. — Eine ἁπάντων τῶν πληθῶν ἅπαν (oder ὅλον) τὸ πλῆθος (ἄπειρον) wäre in der alten Philosophensprache schlechterdings undenkbar.

[1]) Die konsequente Handhabung des Grenzwertbegriffes beseitigt das Unendliche nicht, ist aber das beste Beispiel für das „non discurrendo per singula, sed in aliquo uno“.

Es lautet (a. a. O. 148): „Die Operation des Zusammenfassens galt vor der Entdeckung der Mengenlehre nur für eine endliche Anzahl von Individuen als zulässig. Unendliche Mengen hielt man für schlechtweg paradox. Diese einfache Scheidung ist heute hinfällig geworden". (Zu dem zweiten Satz lese man nur Artikel 7 bei Thomas.)

Der Satz transiri non potest lässt auch eine Art Umkehrung zu. Wenn es nämlich unmöglich ist, ein gegebenes Unendliches durch eine Folge von Schritten zu erschöpfen, dann ist es umgekehrt ebenso aussichtslos, durch sukzessive Wiederholung ein und derselben Operation ein Unendliches aufbauen zu wollen. Anders aber, wenn der Verstand auf Grund eines bestimmten Bildungsgesetzes alles, was diesem unterliegen kann, zusammenfasst und so durch eine Art schöpferischer Tätigkeit eine unendliche Menge begrifflich erzeugt.

Die durchsichtigsten Beispiele für eine zusammenfassende Tätigkeit gegenüber dem Unendlichen liefern uns jene unendlichen Reihen der Mathematik, deren Glieder dem Grenzwert Null ohne Ende zustreben und die gleichzeitig konvergent sind, d. h. einen endlichen Summenwert haben. Einer eigenartigen Verwertung einer solchen Reihe begegnen wir im sogenannten Sophisma des Zenon. Bekanntlich konnte der „schnellfüssige" Achill die langsame Schildkröte, die ihm eine gewisse Strecke voraus war, niemals einholen, obwohl er zwölfmal so schnell lief. Denn wenn er die Strecke zurückgelegt hatte, war ihm die Schildkröte ein Zwölftel voraus, und wenn er diese zweite Strecke hinter sich hatte, befand sie sich wieder ein Zwölftel dieser vor ihm und so in infinitum; immer blieb sie ihm ein gewisses Stück voraus. — Nun lässt sich noch eine kleine „Verbesserung" anbringen. Wenn er z. B. ein Fünftel der ganzen Strecke zurückgelegt hat, so hat sie ein Zwölftel dieses seines Weges durchlaufen und nun wiederholt sich bezüglich dieses Stückes und der folgenden Reste dasselbe Spiel wie oben. Danach behält die Schildkröte stets einen Vorsprung von mehr als vier Fünfteln der ursprünglichen Strecke. — Der Fehler steckt darin, dass der bis zum Einholen tatsächlich durchmessene Weg in die geometrische Reihe $1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{12^2} + \cdots$ verwandelt und nun für die endliche Strecke $1\frac{1}{11}$ die unendliche Reihe eingeschoben wird, die natürlich nicht „durchlaufen" werden kann. Bei der Variation handelt es sich ausserdem noch um eine arge Verschiebung, weil durch die Annahme vier Fünftel von vornherein aus dem Problem ausgeschaltet wurden.

Mit den einfachsten Mitteln kann man beliebig viel unendliche Folgen erzeugen. Der Bruch $^1/_9$ z. B. ist gleich 0,1111 .... oder in anderer Schreibweise $\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^4} + \ldots.$ Die Dezimalzahl bzw. die geometrische Reihe hat auf Grund des stetig wirkenden Bildungsgesetzes unendlich viele Stellen, wir können beliebig viel Stellen durch Ziffern ausdrücken[1]), gelangen aber auch beim gewagtesten Tempo des pertransire nie zu einem Ende. Definiert man nun: „Der Möglichkeit nach unendlich ist jenes Endliche, welches ohne Ende vermehrt wird oder vermehrt werden kann“, so gilt dies für die Zahl der Stellen, die wir durch Schriftzeichen fixieren oder sukzessiv durchdenken können, nicht aber für die unendliche Folge selbst, die ja begrifflich so fertig und geschlossen dasteht, dass jedes Zufügen unmöglich ist. Ebenso sieht man sofort, dass unter Festhalten des indefinitum obiger Definition die Summierung immer unter dem eigentlichen Werte bleiben müsste. Die unendliche Reihe wird aber summiert „quasi finite“ und „in aliquo uno“, durch das Prinzip des Zusammenfassens, welches in der bekannten Summenformel seinen abschliessenden Ausdruck findet.

Ein sehr empfindliches Bildungsgesetz hat folgender Ausdruck:
$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - + \ldots$ mit dem Wert 0,69315 ...

„Man kann (der genannten Reihe) durch geeignete Umordnung der Glieder jede beliebige Summe verschaffen. Endlich viele Zahlen dürfen wir in jeder beliebigen Reihenfolge summieren und erhalten immer dieselbe Summe (Kommutativgesetz der Addition). Bei einer unendlichen Reihe aber kann ... die Reihenfolge der Glieder die Summe beeinflussen. Man muss sich deshalb hüten, Eigenschaften endlicher Reihen ohne weiteres auf unendliche zu übertragen“ (Kowalewski, Die klassischen Probleme der Analysis des Unendlichen [1910] 83). Der obige Ausdruck $\ln 2 = 0{,}69315\ldots$ stellt (als wirkliche Gleichung, nicht als Abkürzung aufgefasst) in seinen Dezimalstellen eine unendliche Folge dar, in welcher keine Periode, überhaupt keinerlei äusserliche Gesetzmässigkeit erscheinen kann. Genau so steht es mit der Zahl π oder mit $\sqrt{2}$ und mit beliebig vielen anderen arithmetischen Forderungen. Man darf aber nicht annehmen, dass deshalb das zusammenfassende Prinzip fehle. Es ist nämlich in der jeweiligen mathematischen Forderung mit ihren sämtlichen logischen Konsequenzen enthalten.

Ein gewisses Analogon der mathematischen Summation unendlicher Reihen zu einem endlichen Werte ist die metaphysische Summation (hypothetischer) unendlicher Mengen secundum essentiae rationem oder auch nach einer wesentlichen Beziehung. Man vergleiche folgende thomistische Gedanken: Dato autem quod essent aliqua infinita actu secundum numerum, puta infiniti homines; vel secundum quantitatem continuam, ut si aër esset infinitus, ut quidam antiqui dixerunt; tamen manifestum est, quod haberent esse determinatum et finitum; quia esse eorum esset limitatum ad aliquas determinatas naturas (5 ad 3). Eine ähnliche Stelle 7 ad 2 und S. c. G. I 67.

[1]) Dies ist unsere Potenzialität; die Folge selbst ist ein unendliches potenziales Gebilde, aber nicht potentialiter unendlich.

Sehr beachtenswert für die bisherigen Gedankengänge sind auch die Ausführungen Couturats (a. a. O. 66 f.): „Die Leugner des Unendlichen nehmen . . . an, dass man die endlichen Zahlen nur einzeln und nach einander behandeln könne, als ob ihre Gesamtheit nur mit Hilfe einer vollständigen Aufzählung gekannt und gefasst werden könnte. Es liegt hier übrigens eine Eigenschaft aller allgemeinen Begriffe vor, dass sie nämlich auf einmal alle Objekte, die zu ihrem Umfang gehören, zu behandeln gestatten, auch wenn diese Objekte in unendlicher Anzahl vertreten wären. In der Tat kann ein Begriff einen endlichen Inhalt und einen unendlichen Umfang besitzen, und eben auf diese Art können wir uns unendliche Mengen denken. Gewisse Argumente gegen das Unendliche verkennen anscheinend diese Wahrheit und involvieren, dass ein Begriff, der eine Unendlichkeit von Objekten darstellt, auch eine Unendlichkeit von Kennzeichen einschliessen müsse, was ihn in seiner Totalität augenscheinlich undenkbar machen würde“.

IV.

Vielheit und Merkwürdigkeiten des Unendlichen.

Nach Couturat[1]) beruhen alle Argumente gegen die Widerspruchslosigkeit des Unendlichen auf zwei durchaus irrigen Voraussetzungen, nämlich, dass die unendliche Zahl die grösste von allen Zahlen sei und dass alle unendlichen Zahlen einander gleich seien. Beide Annahmen kommen auf dasselbe hinaus; denn wenn alle unendlichen Zahlen gleich sind, so kann es nur eine einzige geben, und diese ist dann die denkbar grösste. Dass der Verfasser des Werkes „De l'infini mathématique“ bei Thomas keinen Widerstand gefunden haben würde, sollen einige Auszüge dartun, die zum grössten Teil dazu bestimmt sind, den Satz „infinito non potest esse aliquid maius“ richtigzustellen. Zuvor aber kehren wir zu unserem Leitsatz zurück und knüpfen daran einige Folgerungen mathematischer Art, die für das Verständnis der Texte wünschenswert sind.

Aus der Analyse des Grundsatzes, der das Durchschreiten des Unendlichen verneint, hatten wir das Ergebnis gewonnen, dass nach einer beliebig grossen (natürlich nicht unendlichen) Anzahl von Schritten immer ein Rest bleibt, der die wesenhafte Eigentümlichkeit besitzt, stets noch unendlich zu sein. Man nehme von der Reihe der ganzen Zahlen zwei, drei Stellen weg oder auch eine Anzahl, die einer „eins“ mit hundert oder einigen Millionen Nullen entspricht, immer haben wir noch eine unendliche Menge ganzer Zahlen vor uns, quia post quamlibet multitudinem potest sumi alia multitudo in infinitum (4 ad 𝔈). Unendlich ohne jeden Nebenbegriff und ohne jede Einschränkung! Analoges gilt vom geometrischen (Halb-)Strahl. Die erste Folgerung ist also: Es gibt im Zahlenreiche und in der geradlinigen Ausdehnung beliebig viele Gebilde, die sich in ihrem

[1]) Welchem sich Gutberlet, Allgemeine Metaphysik (1906) 230 anschliesst.

Aufbau um ein endliches Stück unterscheiden, die aber alle unendlich sind. Nun ist es ohne weiteres klar, dass wir zurückkonstruierend das Weggenommene ganz oder zum Teil zu den unendlichen Gebilden wieder hinzufügen können, woraus sich die zweite Folgerung ergibt, dass (wenigstens gewisse) unendliche Dinge auch vermehrt werden können, ebenso wie sie vorhin vermindert wurden und doch unendlich blieben. Wir schliessen also drittens: Die genannten Gebilde (im Zahlenreich und in der Ausdehnung je für sich) sind in demselben Sinne unendlich, in ihrer Unendlichkeit, d. h. wenn wir die reine Anzahl der Elemente ins Auge fassen und von der Struktur und Ordnung absehen, sind sie einander gleich, besser: gleichwertig oder äquivalent[1]). Dürfen wir nun sagen, dass das eine der beschriebenen unendlichen Dinge grösser sei als das andere? In gewissem Sinne ist das richtig, denn das eine besitzt eine Reihe von Zahlen bzw. Strecken, die in dem andern nicht enthalten ist. Wir dürfen aber nicht behaupten, dass das eine mehr Elemente (Zahlen, Längeneinheiten) besitzt als das andere, da sich an dem Charakter der Unendlichkeit durch Abschneiden nichts ändern lässt. Das Unendliche ist derart unempfindlich, dass es in seiner Unendlichkeit, in seiner Mächtigkeit durch Wegnehmen oder Hinzufügen eines Endlichen gar nicht berührt wird, oder in der Sprache der Mengenlehre seit Georg Cantor: Eine Menge ist unendlich, transfinit, wenn sie einem Teile ihrer selbst äquivalent ist. Dies ist bei Cantor sogar die Definition des Unendlichen, aus der sich in etwas herausfordernder Formulierung die Folgerung ziehen lässt: Der Satz, dass das Ganze grösser ist als der Teil, gilt beim Unendlichen nicht mehr. Dass dies paradox klingt, dass es nicht „vorstellbar" ist, liegt darin begründet, dass wir alle unsere Begriffe zunächst am Endlichen bilden; solange das Akkommodationsvermögen das Einstellen auf „unendlich" nicht geübt hat, sind Missverständnisse oder wenigstens das Gefühl der Befremdung wohl zu begreifen. — Statt der Bildung von Abschnitten wählen wir jetzt eine andere Betrachtungsweise. Die Menge der geraden Zahlen ist unendlich, weil sich ebensowenig wie bei der Gesamtheit der ganzen Zahlen ein logisches Verbot entdecken lässt, den begrifflichen Aufbau fortzusetzen. Die Menge der ganzen Zahlen ist offenbar grösser, wenn man den Aufbau, die innere Struktur der Reihen im Auge behält; hinsichtlich der Wertstufe der Unendlichkeit, der Mächtigkeit, sind beide äquivalent. Dasselbe gilt von der

[1]) Da der Ausdruck „Anzahl" bei unendlichen Mengen der Missdeutung fähig ist, weil die Grenze nicht ausschliessend, so gebraucht man dafür das umfassendere „Mächtigkeit". — Zwei Mengen heissen äquivalent, gleichwertig, gleichmächtig, wenn es möglich ist, sie in eine eineindeutige Zuordnung zu setzen, d. h. sie so auf einander zu beziehen, dass jedem beliebigen Element der einen Menge ein entsprechendes der anderen zugewiesen wird und umgekehrt. Dies geschieht nicht durch sukzessive Einzelhandlungen, sondern auf Grund eines Beziehungsgesetzes.

anderen Hälfte, den ungeraden Zahlen. Addiert man die beiden Teilmengen, also ∞ zu ∞, so erhält man die Grundmenge, die in jedem Vergleichsabschnitt doppelt so viel Elemente enthält, aber keine grössere Mächtigkeit besitzt. In der Arithmetik der unendlichen Mächtigkeiten [1]) gilt also $\mathfrak{a} + \mathfrak{a}$ oder $2\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$; allgemeiner $n \,.\, \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$. Das eine Unendliche kann also sehr wohl grösser sein als das andere und bedeutet in der Rangstufe der Unendlichen doch nicht mehr.

Vielleicht liegt dem Leser die ungeduldige Frage auf der Zunge, ob denn Thomas derartige oder ähnliche Anschauungen vertreten haben könne. Wir lassen die Ausführungen in 7 ad 2 und 3 darauf antworten. Zunächst heisst es: Nihil prohibet aliquid esse infinitum uno modo, quod est alio modo finitum; sicut si imaginemur in quantitatibus superficiem, quae sit secundum longitudinem infinita, secundum latitudinem autem finita, z. B. der Flächenstreifen zwischen zwei parallelen Strahlen, die Fläche eines Winkels mit unbegrenzten Schenkeln oder eine körperliche Ecke mit solchen Winkelflächen. Der erste Satz gilt nicht bloss von geometrischen und arithmetischen Denkobjekten, sondern als allgemeiner Grundsatz, denn Thomas fährt fort: „Wenn es daher unendlich viel Menschen gäbe, so besässen sie die Eigenschaft der Unendlichkeit nur in einer Beziehung, nämlich hinsichtlich der Menge; unter dem Gesichtspunkte der Wesenheit aber wären sie endlich, da ja die logische Spezies »Mensch« einen begrenzten Sachinhalt hat". — Ad tertium (nämlich auf das Scheinargument „infinito non potest esse aliquid maius") dicendum, quod id quod est infinitum omnibus modis, non potest esse nisi unum. So, wie der Satz dasteht, möchte man ihn zunächst und ausschliesslich auf das infinitum simpliciter sive per essentiam beziehen, also auf Gott. Trotzdem geht er weiter und wird, wie der Zusammenhang lehrt, auch auf das zweite Anwendungsgebiet, die Ausdehnung, bezogen. Die Gesamtheit der modi dieser besteht in der Dreizahl der Dimensionen. In der ein- und zweidimensionalen Ordnung kann es demnach beliebig viel unendliche Dinge geben, ein Dreidimensionales kann aber nur in der Einzahl bestehen [2]). Unde et Philosophus dicit quod, quia corpus est ad omnem partem dimensionatum, impossibile est esse plura corpora infinita. Man beachte, dass Thomas, wie schon die Art der Anführung ankündigt, sich nur die aristotelische Dialektik zu eigen macht, denn einen unendlichen Körper nimmt er, wie wir noch sehen werden, nicht an, da ein solcher den absoluten Raum ausfüllen müsste. Aber wenn er existierte, dann würde er aus diesem Grunde keinen zweiten neben sich haben können und so in der Einzahl existieren müssen. — Das einzige „Ding" der dreidimensionalen Ordnung

[1]) Siehe dazu Schönfliess a. a. O. 20 ff. — Die vorstehenden Ausführungen können in ihrer Kürze natürlich keine mathematischen Beweise liefern. Die Bezugsetzung des Aequivalenzbegriffes zur aristotelischen Definition und zu dem Satze infinitum transiri non potest soll aber mehr als ein Plausibelmachen bedeuten.

[2]) Für das dritte Anwendungsgebiet, das arithmetische, fehlt jede Andeutung, da der modi der Unendlichkeit zu viele sind; auch die kühnste Konstruktion der Mengenlehre kann das Zahlenunikum nicht zu Wege bringen.

welches omnibus modis infinitum genannt werden darf, ist der absolute Raum. — Si tamen aliquid esset infinitum uno modo tantum, nihil prohiberet esse plura talia infinita: sicut si intelligeremus plures lineas infinitas secundum longitudinem protractas in aliqua superficie finita secundum latitudinem, z. B. Scheitelstrahlen in der Winkelfläche oder Parallele zu einem Schenkel. — Nach den Ausführungen über die Vielheit, werden die Unterschiede zwischen unendlich und unendlich erörtert. Der Begriff der Gleichwertigkeit liegt weit vom Thema ab; das Hauptziel des Aufsatzes ist, nachzuweisen, dass das eine Unendliche grösser, ja bedeutend grösser sein kann als ein anderes, das Nebenziel, unter welchen Einschränkungen dabei von einem grössten Unendlichen die Rede sein kann. Quia igitur infinitum non est substantia quaedam, sed accidit rebus quae d i c u n t u r infinitae, . . . sicut infinitum multiplicatur secundum diversa subiecta, ita necesse est quod proprietas infiniti multiplicatur, ita quod conveniat unicuique illorum secundum illud subiectum. Est autem quaedam proprietas infiniti quod infinito non sit aliquid maius. Das infinitum ist keine Substanz, sondern ein Akzidens der Dinge, welche unendlich genannt werden. Wie nun dieses Akzidens infolge der Verschiedenheit seiner Träger in vielen Formen auftritt, so werden auch besondere Eigentümlichkeiten des Unendlichen je nach der Art des Trägers auftreten müssen und sind nach dieser zu beurteilen, u. a. der besondere Umstand, dass ein Unendliches kein Grösseres neben sich kennt. Sic igitur, si accipiamus unam lineam infinitam, i n i l l a non est aliquid maius infinito. Ein Strahl ist in dem Sinne das grösste Unendliche, dass i n i h m kein grösseres Gebilde vorhanden ist als er selbst. Und wenn wir den Halbstrahl AX in den Punkten B, C . . . teilen, so sind BX, CX u. s. w. unendlich, aber ein Grösseres als das Unendliche AX kann es in dem angegebenen Bereiche nicht geben. Et similiter, si accipiamus quancumque aliarum linearum infinitarum, manifestum est quod uniuscumque earum partes sunt infinitae. Oportet ergo, quod omnibus illis partibus infinitis non sit aliquid maius i n i l l a linea (denken wir uns einen Halbstrahl in Kilometerstrecken zerlegt, so erhalten wir eine unendliche Menge von Teilstrecken, und eine grössere Menge ist a u f G r u n d d e r D e f i n i t i o n nicht denkbar); tamen in alia linea et in tertia (die wir z. B. in Meter- und in Millimeterstücke geteilt denken) erunt p l u r e s p a r t e s e t i a m i n f i n i t a e. (Abgesehen von dem Schlussatz ist das mathematische Ergebnis recht trivial, aber Thomas muss den strittigen Definitionssatz nun einmal behandeln und stellt in lückenloser Systematik fest, in welchen Fällen er philosophische Berechtigung hat.) Et hoc (nämlich dass die eine unendliche Menge „grösser" ist als die andere) videmus etiam in numeris accidere, nam species numerorum parium (die einzelnen geraden Zahlen) sunt infinitae, et similiter species numerorum imparium; et tamen numeri pares et impares sunt plures quam pares; wozu man die Ausführungen über den Aequivalenzbegriff vergleiche. — Sic igitur dicendum est quod infinito simpliciter et quoad omnia (= Gott) nihil est maius.[1], infinito autem s e c u n d u m a l i q u i d d e t e r m i n a t u m (in einer

[1]) Und für die reine Ausdehnung dürfen wir noch den absoluten Raum hinzufügen.

genau umschriebenen Beziehung) non est aliquid maius in illo ordine (in dem jeweiligen Definitionsbereich); potest tamen accipi aliquid aliud maius extra illum ordinem. Also kurz: Zwischen den Anfangselementen kann ein bedeutender Abstand vorhanden sein, und im Aufbau der Mengen können tiefgreifende Unterschiede obwalten, das schliesst aber nicht aus, dass die betreffenden Gebilde sämtlich unendlich sind; das eine Unendliche kann also grösser sein als das andere. — Die angeführten mathematischen Voraussetzungen sind nur dazu bestimmt, den Vorwurf des Widerspruchs von dem theologischen Schlussatz fernzuhalten: Per hunc igitur modum infinita sunt in potentia creaturae; et tamen plura sunt in potentia Dei quam in potentia creaturae. Et similiter anima Christi scit infinita scientia simplicis intelligentiae; plura tamen scit Deus secundum hunc scientiae vel intelligentiae modum.

Mit diesem strammen Paradoxon schliesst Thomas seine grundsätzlichen Ausführungen über das Unendliche. Leider —, so möchte man sagen — verrät er dabei zu wenig über seine mathematischen Anschauungen; denn was er anführt, wird nicht bewiesen, sondern als bekannt vorausgesetzt. Den Begriff der Aequivalenz stellt er zwar nicht formell auf, aber wenn man nichts weiter als das Beispiel von den unendlichen Mengen der geraden und der ungeraden Zahlen, die in der Grundmenge als Teilmenge enthalten sind, und die Wendung plures partes etiam infinitae sich vor Augen hält, so darf man das Sachliche des Begriffes doch bei ihm annehmen. Und wenn ferner ein Denker wie Thomas zu den angeführten Sätzen über das Unendliche noch lehrt, dass das endliche wie unendliche Kontinuum in unendlich viel Teile zerlegt werden kann, und dass von jedem dieser Teile dasselbe in infinitum gilt [1]), wenn jeder Allgemeinbegriff nach ihm quodammodo habet infinitatem, in quantum potest de infinitis praedicari (7 ad 2), und wenn in der Ideenwelt unendlich viele allgemeine Begriffe ewige Geltung haben, wenn er der menschlichen Erkenntnis Christi ein faktisches Erkennen unendlich vieler (potenzialer) Objekte, Gott aber, dessen Intellekt ja die Menge aller Dinge umfassen muss, mehr als Christus zuweist, dann wird es vom Standpunkt des Historikers aus kein vermessenes Unterfangen sein, anzunehmen, dass der genannte Denker die verschiedenen Unendlichkeiten mit einander verglichen und auch wohl Wertklassen der Unendlichkeit angenommen hat. Wir wollen uns jedoch mit dem durchaus sicheren Mindestmass begnügen, indem wir feststellen, dass die Theorie des hl. Thomas mit der Mengenlehre nicht in Widerspruch steht und zum Teil ohne diese kaum verständlich ist. Die Darlegungen des hochberühmten Vertreters der „spekulativen Theologie" werden bei mehr als einem Leser einen überraschenden Eindruck hervorrufen, ob auch „bezweckte" Eindrücke, die das Anrühren eines religiösen Dogmas verhüten sollen, das möchte ich billig bezweifeln.

[1]) Vorläufig sei auf die Stellensammlung in Abschn. I. verwiesen.

(Schluss folgt.)