Ueber die actuale Bestimmtheit des unendlich Kleinen.

Ein Beitrag zur Metaphysik der höheren Mathematik

Von Prof. Dr. Jos. Pohle in Washington.

Im ersten Bande dieser Zeitschrift[1]) veröffentlichte ich eine Abhandlung unter dem Titel: „Ueber die objective Bedeutung des unendlich Kleinen als der philosophischen Grundlage der Differentialrechnung“ und sagte dort unter Anderem: „Wenn wir nun zunächst, um auf die tiefer liegende Wurzel des Streites zurückzugehen, dem von der Infinitesimalrechnung vorausgesetzten unendlich Kleinen in der Seinsscala eine objective Berechtigung beilegen, so wollen wir dadurch dem öfters wiederholten Versuch, das unendlich Kleine zu einem blosen Gedankending oder ‚ens rationis‘ zu erniedrigen, energisch in den Weg treten. In einer weiteren Untersuchung, welche einer anderen Stelle vorbehalten bleiben soll, werden wir aber auch die actuale Bestimmtheit desselben gegen jene vielverbreitete Anschauung zu verfechten haben, welche mit unbestimmten, potentialen Grössenbestimmungen auszukommen vermeint. Unbekümmert um den möglichen Vorwurf, dass wir Unmögliches zu leisten, Widersprechendes zu vereinbaren, Extreme zu verbinden unternehmen, stellen wir den Doppelsatz auf, dass es wirklich, unabhängig vom erkennenden Verstande, ein unendlich Kleines gibt, und dass dieses unendlich Kleine den Stempel der actualen Bestimmtheit an sich trägt. Weder beruht das ‚Sein‘ desselben auf einer mathematischen Fiction, vermittelst deren der Verstand ein wesenloses μὴ ὄν sich unter der Maske eines vermeintlichen ὄν vortäuscht; noch schlummert das wirkliche Sein, das wir dem unendlich Kleinen zusprechen zu müssen glauben, im nebelhaften Gebiete einer unfassbaren Potentialität, die

[1]) 1888, S. 56—78.

nur das Bequeme an sich hat, dass der rastlos verfolgende Geist bei seiner Jagd auf die letzten Elemente stetiger Grössen immer neue Ruhepunkte findet, auf denen er wie auf gemächlichen Polstern bequem sich zuvor ausruht, ehe er die niemals endende Hatz wieder fortsetzt." [1])

Nachdem im angezogenen Artikel die erstere auf die Realitätsfrage bezügliche Arbeit vollständig geleistet ist, dürfte es sich nunmehr empfehlen, die zweite Aufgabe in Angriff zu nehmen und dem unendlich Kleinen auch eigens noch jene Seinsbestimmtheit zu vindiciren, ohne welche es sich im Gebiete der Wirklichkeit ohnehin kaum zu halten vermöchte, sondern nothgedrungen sich in das Gespensterreich „abgeschiedener Grössen", wie Whewell (glaube ich) sich irgendwo ausdrückt, verflüchtigen müsste. In der That wird der Beweis seiner Realität erst dann ein vollständig erbrachter und abschliessender genannt werden können, wenn es gelungen ist, dasselbe in den festumschriebenen Rahmen actualer Bestimmtheit zu zwängen und so jener flirrenden Nebeldecke zu entkleiden, welche die Potentialphilosophie darüber geworfen hat. Wie in den meisten Fragen dieser Art, so stehen uns auch hier die zwei gewöhnlichen Beweiswege offen: 1) die vernünftige Betrachtung, die aus der Sache selbst schöpft und 2) die Berufung auf die Auctorität angesehener und sachverständiger Mathematiker. Sonach zerfällt unsere Untersuchung naturgemäss in zwei Kapitel, deren erstes mit dem Vernunftbeweis und deren zweites mit dem Auctoritätsbeweis sich befassen wird.

Was insbesondere diesen letzteren betrifft, so wird die Nothwendigkeit einer erschöpfenderen Behandlung die hier gestellte Aufgabe allerdings insofern über ihren ursprünglichen Rahmen hinausheben, als es wünschenswerth erscheint, nicht nur die Actualität, sondern auch die von dieser vorausgesetzte Realität des unendlich Kleinen durch Auctorität ausdrücklich festgestellt zu sehen. Auf diese Weise wird auch unsere frühere Abhandlung erst einen naturgemässen Abschluss sowie eine willkommene Ergänzung erhalten.

---

[1]) A. a. O S. 57 f.

Erstes Kapitel.

Vernunftbeweis aus der unendlichen Theilbarkeit des Stetigen.

§ 1. Schwierigkeit des Problems von der Theilbarkeit stetiger Grössen.

Wir glauben keinen Fehlgriff zu thun, wenn wir den Erweis der actualen Bestimmtheit des unendlich Kleinen an die Erörterung der allerdings überaus verwickelten und heikeln Frage von der Theilbarkeit des Stetigen anknüpfen, indem der Nachweis versucht wird, wie sich sehr wohl auch eine Lösung dieses „Kreuzes der Philosophie“ denken lässt, welche auf wirklich untheilbare und letzte Elemente des Stetigen, also auf unendlich kleine Grössen von bestimmtem Charakter ausläuft. Denn gibt es einmal letzte Elemente im Stetigen, über die hinaus der Versuch noch weiterer Theilungen zum Widerspruch werden müsste, so liegt auf platter Hand, dass so geartete Grössen jedwede im Unfassbaren endigende Potentialität und Unbestimmtheit entschieden von der Hand weisen.

Freilich sind wir uns der erdrückenden Schwierigkeiten, welche dieses Problem fast in alleweg ungangbar machen, in vollstem Maasse bewusst. Aber anderseits fühlt der Geist gerade durch den Widerstand, den er zu überwinden hat, auch wieder seine innerste verborgene Kraft wachsen und schwellen, einem Adler vergleichbar, der mit muthig verachtendem Blick die fast unerreichbare Höhe misst, zu der sein Flug ihn emportragen soll. Uebrigens liegt eine Gefahr geistiger Ueberhebung ohnehin nicht vor, wo die gewichtigsten Zweifel vom schwersten Kaliber sich, wie Bleigewichte, an die Schwingen des Geistes hängen, einen allzu stolzen Flug desselben verhindernd. Vielmehr liegt gerade darin, dass unser Verstand hier, wie nicht leicht in einer anderen Frage, die Grenzen seiner Erkenntnisssphäre gleichsam mit Fingern greifen kann, der vornehmste Nutzen und die lohnendste Frucht dieser metaphysischen Untersuchung. In diesem Sinne äussert sich sehr schön und tief Nicolle also: „L'utilité que l'on peut tirer de ces spéculations (sur la divisibilité du continu) n'est pas simplement d'acquérir ces connaissances qui sont d'elles mêmes assez stériles; mais c'est d'apprendre à connaître les bornes de notre esprit et à lui faire avouer, mal gré qu'il en ait, qu'il y a des choses qui sont, quoiqu'il ne soit pas capable de les comprendre." [1])

Wenn der blose Begriff der Stetigkeit sich dem überlegenden Verstand schon als so launenhaft und unfassbar darstellt, wie nicht leicht ein zweiter Grenzbegriff der Philosophie und Mathematik, so birgt die spitzfindige Frage nach der Theilbarkeit des Stetigen erst recht eine solche Fülle von Untiefen und Geheimnissen, dass wir uns nicht sonderlich zu wundern brauchen, wenn ein Zeno dadurch zur Verwerfung der Wirklichkeit der Bewegung und ein Bayle zur Leugnung körperlicher Ausdehnung getrieben wurden, während andere auf Grund ähnlicher unlösbarer Schwierigkeiten den Begriff der Stetigkeit selbst, namentlich aber denjenigen der Bewegung, mit einem unheilbaren Selbstwiderspruch behaftet sein liessen.[2]) Gleichwohl dürfen wir uns anderseits der Wahrnehmung nicht verschliessen, dass im Boden der Stetigkeit ebenso weitverzweigte wie tiefe Wurzeln metaphysischer Weisheit sich ausbreiten, dass insbesondere die ganze Fülle mathematischer Wahrheit gerade hier, wie in einer goldenen Fundgrube, verborgen liegt.[3]) Denn das Stetige ist nicht nur die Grundlage, auf der das Gebäude der Geometrie ebenso sicher als stolz in die Lüfte ragt, sondern es bildet auch die Wurzel der höheren Mathematik, und nicht an letzter Statt der Infinitesimalrechnung. Es gibt keinen anderen Grössenbegriff, der mit so sanfter Gewalt, mit so treibender Consequenz auf die Vorstellung des unendlich Kleinen hindrängte, wie der Begriff des Stetigen. Schon der tiefblickende Genius unseres grossen Leibniz hatte diesen Zusammenhang durchschaut, als er bemerkte, dass Natur und Wesenheit unendlich kleiner (Infinitesimal-) Grössen — dieser seiner eigensten Geisteskinder — ohne eine metaphysische Erörterung der Zusammensetzung des Stetigen unverstanden bliebe [4]) Auf die gleiche begriffliche Verwandtschaft weist auch Lübsen hin, wenn er schreibt: „Die Vorstellung einer unendlich kleinen Grösse entspringt nothwendig aus dem Begriff der Stetigkeit, den ein jeder Mensch hat. . . . Es

[1]) Nicolle, Art de penser P. IV. ch. 1. p. 394 suiv. bei P. Bayle, Dictionnaire histor. et crit. Tom. IV. p. 2913. Rotterdam 1720.

[2]) Vgl. Hegel, Geschichte der Philosophie I,316 ff. — Ueberweg, Grundriss der Geschichte der Philosophie I,68. Berlin 1880.

[3]) Vgl. Herbart, Sämmtliche Werke, herausg. von Hartenstein. Bd. III S. 384. Leipzig 1851.

[4]) Vgl. Historia et origo Calculi differentialis a G. G. Leibnitio conscripta. Herausg. von Dr. Gerhardt S. 43. Hannover 1846.

ist also das Gesetz der Stetigkeit, welches uns zu der Vorstellung drängt, dass die successiven Zunahmen einer stetig wachsenden Grösse zwar keine absoluten Nullen, jedoch auch keine angebbaren (wirklichen) Grössen, sondern der Stetigkeit halber wahrhaft einfach, d. h. untheilbar sind."[1])

Was nun die Lehre von der Theilbarkeit des Stetigen selber betrifft, so ist dieselbe allerdings seit Jahrhunderten in den meisten philosophischen Schulen in einer Weise behandelt worden, welche unserer nachher zu begründenden Anschauung nichts weniger als günstig erscheinen muss. Wie das Mittelalter im grossen Ganzen sich in dem Gedankengeleise des Aristoteles zu bewegen pflegte, so ging es auch, einige Vertreter der Spätscholastik abgerechnet, in dieser Frage gemeinschaftlich mit seinem Führer.[2]) Der Stagirite lehrte nun aber die Theilbarkeit des Stetigen in's Unendliche, so zwar, dass der endlose Theilungsprocess an ein wirklich Untheilbares oder unendlich Kleines niemals herankomme. Denn wie weit man die Zerlegung auch fortgetrieben haben mag, das Zerlegungsergebniss wird immer wieder ein Stetiges sein; und das endlose Spiel beginnt von neuem. Dies der unverrückbare Standpunkt des Aristoteles und der Scholastiker.

Jedoch wird wohl nicht leicht Einer so kurzsichtig oder befangen sein zu glauben, dass wir es hier mit mehr als einer blosen Hypothese zu schaffen haben, dazu ersonnen, um die schwer auflösbaren Sophismen des Eleaten Zeno auf eine vielleicht mehr geschickte als gründliche Art zu beseitigen. Wenigstens ist die Klasse von Philosophen bis heute noch nicht ausgestorben, welche die Unzulänglichkeit der Widerlegung des Aristoteles offen aussprechen, ja in einem Anflug von Leidenschaftlichkeit dessen Antworten sogar „jämmerlich und abgeschmackt" finden. Zur letzteren Klasse rechne ich z. B. den mehr scharfsinnigen als tiefen Kritiker Pierre Bayle. „Die Theilbarkeit des Stetigen", schreibt er, „ist diejenige Hypothese, die von Aristoteles angenommen und seit mehreren Jahrhunderten von fast allen Philosophieprofessoren auf den Universitäten vorgetragen ward. Nicht als ob man dieselbe in sich selber irgend begründet hätte, oder auf die gemachten Einwürfe eine Antwort wüsste, sondern weil man in der Wahrnehmung, dass mathematische

[1]) Lübsen, Einleitung in die Infinitesimalrechnung. S. 57 ff. Leipzig 1862.

[2]) Vgl. Schiffini, Disputt. metaphys. specialis Vol. I. p. 209. Augustae Taurinorum 1888.

Punkte so gut wie physische Punkte ein Unding seien, einen andern Ausweg nicht auszumitteln vermochte.“ Die Antworten des Aristoteles auf die Argumente Zeno's, der die Unmöglichkeit und folglich Unwirklichkeit realer Bewegung nachzuweisen gesucht hatte, nennt Bayle sodann kurzweg „jämmerlich.“ Dieses Gebahren verräth freilich Spuren leidenschaftlicher Uebertreibungssucht. Aber wahr bleibt immerhin, dass die aristotelische, sowie überhaupt jede Theorie von der Theilbarkeit des Stetigen, mit Schwierigkeiten jeder Art auf Leben und Tod zu ringen hat.

Um nur einige Zeugnisse anzuführen, so gesteht der scharfsinnige Arriaga unumwunden ein, dass er manche gegen die aristotelische Lehre erhobenen Einwürfe unbeantwortet lassen müsse, wenngleich er in Ermangelung einer besseren und widerspruchsfreieren Theorie sich nicht veranlasst fühle, dieselbe durch eine andere, bessere zu ersetzen.[1]) Treffend drückt sich der Thomist Goudin also aus: „Mysterium philosophicum est haec difficultas, in qua ratio plus probat quam possit intelligere, plus obiicit quam possit solvere.“ [2]) Und der Minorit Marius Maffei nennt unser Problem eine „celeberrima et numquam fortasse inter philosophos finienda controversia.“ [3]) Ein ganzes Buch hat dem grossen Räthsel der Gelehrte Libertus Frommondus gewidmet unter dem ominösen Titel: „Labyrinthus seu de compositione continui.“ In neuester Zeit hat sich der feingebildete spanische Priester Jacob Balmes in ähnlicher Weise vernehmen lassen über „das Geheimniss“, wie er es nennt, „das die Philosophie quält.“ Den Fragepunkt, soweit er den physischen Stoff betrifft, legt er bündig und klar dar wie folgt: „Die Materie ist theilbar, eben weil sie ausgedehnt ist; es gibt keine Ausdehnung ohne Theile. Diese werden entweder ausgedehnt sein oder nicht; wenn sie es sind, so sind sie wiederum theilbar; wenn nicht, so sind sie einfach und es folgt, dass wir bei der Theilung

---

[1]) Arriaga, Philos. disputt. XVI. Phys. Sect. XII. n. 256: „Quod autem alia in sententia Aristotelis difficilia valde sint et quae a nobis solvi non possunt, non cogit nos hanc sententiam deserere: materiae enim difficultas est talis, ut ubique aliqua nobis inexplicabilia occurrant.“

[2]) Goudin, Philosophia thomistica I. P. Phys. disp. III. qu. V. art. 1. (ed. Matrit. Tom. II. p. 278. 1782.)

[3]) F. Marii Maffei Theoremata Metaphysicae Tom. II. p 27. Patavii 1786. Cf. Mangold, Philosophia recentior. Monachi et Ingolst. 1765. Tom. I. p. 326.

der Materie auf unausgedehnte Punkte kommen müssen. Wenn man diese Schlussfolge vermeiden will, so muss man sich auf die (potentiale) Theilbarkeit bis in's Unendliche berufen, obgleich diese Ausflucht mehr ein Mittel zu sein scheint, die Schwierigkeit zu umgehen als sie zu lösen." [1])

Auf diese Geständnisse, die sich leicht häufen liessen, legen wir grosses Gewicht. Denn sie beweisen, dass die specifisch aristotelische Lehre von der Theilbarkeit des Stetigen mit nichten ein unantastbares Dogma, sondern lediglich eine wegen ihrer Einfachheit und Bequemlichkeit fast allgemein recipirte Hypothese ist, die natürlich nur so viel Anspruch auf Geltung erheben darf, als die Gründe wiegen, auf die sie sich stützt. Eine Ablehnung derselben mit der Absicht, zwischen Philosophie und Mathematik, welch' letztere in ihrer letzten und höchsten Entfaltung dem Stagiriten überdies unbekannt war, ein freundschaftlicheres Verhältniss zu begründen oder wiederherzustellen, kann demnach nicht wohl zu einem Unterfangen gestempelt werden, das wegen angeblicher Durchbrechung der historischen Continuität einer gesicherten Doctrin die „nota temeritatis" verdiente. Denn jede Hypothese muss es sich am Ende gefallen lassen, durch eine andere gleich gute oder bessere gegebenen Falles verdrängt zu werden.

§ 2. Die Theorie des Aristoteles und deren Schwierigkeiten.

Einer eingehenderen Auseinandersetzung und Beurtheilung der aristotelischen Lehre von der Theilbarkeit des Stetigen können wir hier um so weniger ausweichen, als sie es verstanden hat, ihre Alleinherrschaft durch viele Jahrhunderte hindurch zu behaupten. Ihre Grundzüge lassen sich wohl auf folgende Sätze zusammendrängen: Unter Stetigem verstehen wir das, dessen Extreme eins sind (*συνεχῆ ὧν τὰ ἔσχατα ἕν* = continuum; Phys. IV,1). Dasselbe ist nicht zu verwechseln mit dem Anliegenden, dessen Extreme zusammen sind (*ἁπτόμενα ὧν τὰ ἔσχατα ἅμα* = contiguum). Da nun jedes Stetige Theile hat, so lässt es sich in immer weitere und weitere Theile besonderen. Aber wie lange? In's Unendliche, antwortet er. Denn käme man schliesslich an ein Ende, so dass es einmal eine

[1]) J. Balmes, Fundamente der Philosophie, deutsch von Dr. Lorinser Bd. II. 221 ff.

letzte Theilung gäbe, so würde das Stetige in lauter untheilbare Theile aufgelöst sein, was widersinnig ist. Daher sein berühmter Satz: Das Stetige ist theilbar in's Unendliche (*Εἰς ἄπειρον γὰρ διαιρετὸν τὸ συνεχές.* Phys. I,2. 185b 9 ed. Bekker). Wie weit man in der Zerlegung des Stetigen auch fortgeschritten sein möge, das Ergebniss wird immerfort ein neues Stetiges sein, das sich durch noch so viele Theilungen nun einmal nicht vernichten, nicht zu blosen Punkten oder Nullen verflüchtigen lässt. Ansonst würde ja stetige Ausdehnung sich schliesslich aus lauter Punkten etc. zusammensetzen lassen, was unmöglich ist. Denn dem Auflösungsprocess muss der entgegengesetzte Vorgang der Zusammensetzung entsprechen, indem die rückwärts wiederherstellende Bewegung die ursprüngliche Ausdehnung, welche in Theile aufgelöst worden war, nach ihrem vollen Betrage wiedergewinnen muss. Da also jede stetige (continuirliche) Grösse, ob gross oder klein, theilbar ist bis in's Unendliche, so ist ein Letztes, ein Kleinstes unmöglich, ja widersinnig.[1])

Indes verlegen nicht unerhebliche Einwendungen der stricten Durchführung des aristotelischen Grundgedankens schon gleich am Anfang den Weg. Denn unserem Denken drängt sich unabweislich die Erwägung auf: Wenn die Theilbarkeit des Stetigen in's Unendliche geht, also niemals zu einem Ruhepunkt führt, so haben wir es ja nur mit einer potential unendlichen Theilbarkeit zu thun. Wenn aber dies, so sind auch die Theile im Stetigen selbst nur potentiale, also ganz und gar abhängig vom Theilungsacte selber. Daraus würde aber folgen, dass der Theilungsact der Schöpfer der Theile ist, während doch in Wirklichkeit der Theilungsact die Theile, die er trennt, als bereits gegeben voraussetzt. Wenn man einen Bogen Papier mit der Scheere in immer kleinere Schnitzen zerschneidet, so kann man vollständig überzeugt davon sein, dass die Scheere lediglich schon vorhandene Papierstücke trennt, nicht aber auch hervorbringt. „Die Theilung macht nicht die Theile", bemerkt treffend Balmes, „sondern setzt sie voraus; eine einfache Sache kann nicht

---

[1]) Vgl. Biese, Die Philosophie des Aristoteles in ihrem inneren Zusammenhang. Bd. I. S. 530. Berlin 1835. Bd. II. S. 45 ff. 226 ff. Berlin 1842. — C. Gutberlet, Metaphysik. (2. Aufl.) S. 174 ff. Münster 1890. — R. Stölzle, Die Lehre vom Unendlichen bei Aristoteles. Würzburg 1882. — Herbart behandelt die Lehre vom Stetigen als eine eigene Disciplin, die er „Synechologie" nennt. SS. WW. herausg. von Hartenstein Bd. IV. S. 147 ff. Leipzig 1851.

getheilt werden; in der zusammengesetzten also, die bis in's Unendliche theilbar ist, präexistiren die Theile, in welche man sie zerlegen kann." [1])

Man könnte darauf allerdings antworten: Freilich präexistiren die Theile, aber nur der Möglichkeit, nicht der Wirklichkeit nach (in potentia, non in actu). Aber diese Ausflucht hilft nichts. „Sagen", so argumentirt wieder Balmes, „dass im natürlichen Körper die Theile nicht im Act, sondern in der Potenz vorhanden sind, kann zweierlei bedeuten: entweder dass sie nicht wirklich getrennt, oder dass sie nicht verschieden sind. Das Nichtgetrenntsein hat auf die Theilung gar keinen Einfluss; denn diese kann gedacht werden, ohne die Theile zu trennen. Wenn man sagen will, diese seien unter sich nicht verschieden, so ist in diesem Falle die Theilung unmöglich; denn die Theilung kann nicht einmal gedacht werden, wo keine verschiedenen Dinge sind." [2]) Wir kommen also in keinem Falle am Schluss vorbei, dass entitativ unendlich viele Theile im Stetigen präexistiren, woneben bestehen bleiben mag, dass diese in ihrer gesonderten Existenzweise (formaliter) erst durch den Theilungsact zum Vorschein kommen.[3])

Hier nun ist die Stelle, wo wir auf eine neue grosse Schwierigkeit gerathen. Es erhebt sich nämlich die naheliegende Frage: Können die real präexistirenden unendlich vielen Theile des Stetigen nicht auch wirklich (durch Theilung) gesondert oder getrennt werden? Ist die zugestandene Theilbarkeit in's Unendliche auch ausführbar, wenigstens für den göttlichen Geist? [4]) Die aristotelische

---

[1]) J. Balmes, Fundamente der Philosophie Bd. II. S. 221.

[2]) J. Balmes, a. a. O. Bd. II. S. 223 ff.

[3]) Durch dieselbe Unterscheidung zwischen „partes reales" und „partes formales" sucht auch T. Pesch (Philosophia naturalis p. 22. Friburgi 1880) die obwaltenden Meinungsverschiedenheiten der Scholastiker auszugleichen. Ebenso schon Suarez, Met. disputt. XL. Sect. V. n. 28—34. ed. Mogunt. Tom. II. p. 382 sq.

[4]) Es darf billig Wunder nehmen, wenn noch neuerdings Professor L. Clariana-Ricard in Barcelona an das unendlich Kleine nur den beschränkten Maasstab des menschlichen Könnens anlegt und nicht vielmehr den unendlichen Geist zum objectiven Gradmesser mathematischer Realität erhebt. In einem vor dem internationalen wissenschaftlichen Congress der Katholiken 1891 in Paris verlesenen Aufsatz: „Influence du monde réel et du monde idéal dans l'analyse infinitésimale" erkannte er zwar die Realität des unendlich Kleinen gebührend an, nicht aber dessen Actualität. Er trat mit der Behauptung

Theorie muss es verneinen. Aber eben dadurch vermag dieselbe es zu eigentlichen Infinitesimalgrössen von bestimmtem Charakter, wie sie nach unserer Ansicht im mathematischen Grenzprocess und insbesondere in der (letzten) Grenzgleichung auftreten, nicht zu bringen. Soll die aristotelische Theorie zu Recht bestehen bleiben, so muss sie das unendlich Kleine unbedingt verwerfen. Biese sagt daher ganz consequent im Sinne des Aristoteles: „Es gibt kein Kleinstes, weil jedes Continuirliche in's Unendliche theilbar ist.“ [1]) Es verlohnt sich darum wohl der Mühe, zu untersuchen, ob der dem aristotelischen entgegengesetzte Versuch, es wirklich zu letzten, nicht weiter theilbaren Theilen (Elementen) kommen zu lassen, denn thatsächlich so voll von Widersprüchen und Ungereimtheiten steckt, wie die Anhänger der ersteren Theorie glauben machen wollen.

§ 3. Die Hypothese von wirklich letzten Elementen als Resultat unendlich vieler Theilungsacte.

Um die Sache anschaulich zu machen, nehmen wir eine beliebige Linie AB; sie werde durch den Theilungspunkt b in Ab und Bb halbirt. Die herauskommenden Hälften werden wieder halbirt, und so fort in alle Ewigkeit. Was wird zuletzt herauskommen? Vor allem wird betont werden müssen, dass nach einer blos endlichen Anzahl von Theilungen kein Halt eintreten kann, da ja sonst die Theilbarkeit nicht unendlich und es widersprechend wäre, durch endliche Zwischenstufen auf ein wahrhaft Unendliches, nämlich auf un-

---

hervor, dass man überall an Stelle des „infiniment petit“ mit dem „indéfiniment petit“ auskomme. „L'indétermination“, heisst es, „dans l'idée de l'étendue, quand cette étendue est envisagée sous un état moindre que toute quantité appréciable, quelque minime qu'elle soit, résout parfaitement l'idée exprimée à tort par les mots infiniment petit“ (Compte Rendu du Congrès catholique international VII, 83. Paris 1891). Im II. Kap. dieser Abhandlung werden wir sehen, wie irrig diese Auffassung ist. Wodurch unterscheidet sich nun aber die endliche von der potential unendlichen Grösse (indéfiniment petit)? Antwort: „L'unique différence qui existe entre les quantités finies et les quantités indéfinies, c'est qu'on ne connaît pas les limites de ces dernières et qu'il est impossible de les déterminer.“ (p. 84). Für den menschlichen Rechner trifft dies zweifelsohne zu. Ob wohl auch für den unendlichen Mathematiker?

[1]) Biese, Philosophie des Aristoteles in ihrem inneren Zusammenhang. Bd. II. S. 226.

endlich kleine Grössenelemente kommen zu wollen. Denn nur unter der Voraussetzung, dass wahrhaft Untheilbares, Einfaches herauskomme, hat die Annahme eines schliesslichen Stillstehens überhaupt einen Sinn. Jedenfalls müssten also unendlich viele Theilungen vorgenommen werden, ehe sich sagen liesse: Weiter geht es nicht mehr, die Theilbarkeit ist nun erschöpft.

Damit aber an einer solchen Auffassung von vornherein keine Ungereimtheit hafte, ist von Haus aus gegen das Missverständniss Verwahrung einzulegen, als lasse sich die Theilbarkeit des Stetigen durch eine successive Vornahme fortschreitender Zerlegungshandlungen überhaupt jemals erschöpfen. Denn aus Gründen, die ich an einem andern Ort des näheren dargelegt habe, liegt im Begriffe des successiven Unendlichen allerdings ein unauflöslicher Widerspruch, während ein solcher bei andern Arten von Unendlich, wie ich ebendaselbst gezeigt habe, sich nicht so leicht oder auch gar nicht aufzeigen lässt.[1] Fällt beispielsweise das mit dem Unendlichkeitsbegriff streitende Merkmal der Aufeinanderfolge oder zeitlichen Succession weg, so vermag ich in einer Reihe von Fällen einen klaren Widerspruch in einer unendlichen Menge mit dem besten Willen nicht zu entdecken. So auch nicht in der Annahme von actual unendlich vielen Theilen im Stetigen.[2] Das Moment der Zeitfolge drängt sich ja nicht weiter in's Spiel, sobald wir nur den Theilungsprocess aus unserem befangenen Machtkreis auf den unendlichen Schauplatz göttlichen Wissens und Könnens hinüberspielen, allwo jene kleinlichen Aushülfsmittel, wie z. B. Halbirungstheilstriche, successive Grenzfixirungen u. dgl., natürlich in Wegfall kommen. Denn wie die göttliche Allmacht über alle stoffliche Beschränkung den Sieg davon trägt, so weiss die göttliche Allwissenheit auch im Gebiete des Intelligibeln von keiner Schranke; jede nur mögliche Stoffzersplitterung und Atomverkleinerung unterliegt Gottes Machtgebot ebenso unfehlbar, als es seiner Allwissenheit eigen ist, alle nur möglichen Theile, in die das Stetige sich zerlegen lässt, mit einem einzigen Blicke zu übersehen. Nun sind der Elemente des Stetigen aber, wie dessen unendliche Theilbarkeit beweist, unendlich viele möglich: folglich erkennt der göttliche Geist alle diese Theile,

---

[1] Siehe meine Abhandlung: „Das Problem des Unendlichen“ im Mainzer ‚Katholik‘ 1880, 2. Hälfte.

[2] Vgl. Gutberlet, Das Unendliche, metaphysisch und mathematisch betrachtet S. 93—129. Mainz 1878.

keinen einzigen ausgenommen. Da aber die Annahme, dass nach unendlich vielen (simultan vorgenommenen) Theilungen noch weiter in's Unbestimmte gegangen werden könne, einen Widerspruch einschliesst, so folgt, dass Gott auch die letzten Theile erkennt, über die hinaus weitere Theile (derselben Ordnung) einfach widersinnig sind.

Die landläufige Unterscheidung zwischen distributiver und collectiver göttlicher Erkenntniss, die da bei den scholastischen Disputationen durch ein resolutes „Nego suppositum" den verwickelten gordischen Knoten todesmuthig zerhaut, schlägt in diesem Falle sicherlich nicht durch, weil die Theile des Stetigen naturgemäss im Ganzen wohnen, und alle Einheiten dieses Ganzen unter dem gemeinschaftlichen Gattungsbegriff von Elementen zusammenfassbar sind. Ja, diese Zusammenfassung des Vielen zur Einheit der Menge ist vom Wesen des Stetigkeitsbegriffes geradezu gefordert. Auch lässt sich nicht sagen, dass der unendlichen Menge Unendlichkeit nur äusserlich zukomme, ihr infolge des göttlichen Allwissens gewissermassen aufoctroyirt sei. Denn die Unendlichkeit liegt hier im Stetigen selbst, ist dessen immanentes Prädicat, unabhängig von jedweder, auch der göttlichen Erkenntniss, wenigstens was die Unendlichkeit der Theilbarkeit betrifft.

Auch wende man nicht ein, dass durch die Annahme letzter Theile die unendliche Menge selbst wieder verendlicht werde, insofern ein Letztes nothwendig eine Schranke, einen Abschluss, eine Grenze besage. Denn liegt es nicht gerade im Wesen eines actual Unendlichen, dass es die unter seinen Begriffskreis fallenden Individuen so vollständig abschliessend in sich befasse, dass unter und in dasselbe Alles, ausserhalb nichts falle, was seinem Inhalte und Umfange untersteht? Ein nicht abgeschlossenes, fest umgrenztes Ganzes wäre ja keine unendliche Menge mehr; denn sie hätte noch Dinge ausser ihr liegen, die begrifflich zu ihr gehören. Erst wenn die letzten der zu ihr gehörigen Theile Platz in ihrem unendlichen Schoose gefunden, haben wir ein Recht, von einer actual unendlichen Menge zu reden. Die Voraussetzung von letzten Elementen des Stetigen beweist daher nur die Vollständigkeit und Abgeschlossenheit, mitnichten aber die Begrenztheit und Endlichkeit derselben; über das Letzte hinaus liegt eben nichts mehr und kann nichts mehr liegen.

Im übrigen braucht es uns vor der Theorie, die eine solche Consequenz im Gefolge hat, gar nicht so arg zu grauen, wenn wir sehen, wie selbst Scholastiker von grossem Rufe gestehen, dass bei der Analyse des Stetigen an der Annahme einer actual unendlichen Menge schwer vorbeizukommen sei. Der Lehrer des Suarez, Fonseca, weiss von einer durch Burlaeus, Soncinas und Dominicus Soto verfochtenen These zu berichten, welche die Zusammensetzbarkeit eines Körpers aus actual unendlich vielen Ebenen, einer Linie aus actual unendlich vielen Punkten geradezu unmittelbar ausspricht. Der berühmte Urheber der ‚scientia media' schreibt darüber also: „Itaque aiunt corpus ipsum terminari una aut pluribus superficiebus, finitis tamen numero, e. g. globum una, pyramidem quinque, tesseram sex et sic cetera: partes vero corporis, quas ponunt actu infinitas, copulari infinitis superficiebus. Similiter autem superficiem terminari vel una linea, ut circularem, vel tribus ut triangulum, vel quattuor ut quadrangularem et ita deinceps: partes vero superficiei, quod (quae?) eodem modo infinitae etiam dicendae sint, copulari infinitis lineis. Denique lineam, si terminos habet ut recta, terminari duobus punctis, lineae vero partes .... copulari infinitis punctis iisque non potentia tantum, sed actu existentibus in media linea." [1]) Wenn Fonseca freilich diese Meinung durch die einfache Bemerkung widerlegt zu haben meint: „Opinio haec ponit actu infinita entia in rerum natura, i. e. simul existentia: at infinitum actu non solum naturaliter, ut hi ponunt, sed ne supernaturaliter quidem dari posse, multo est probabilius" [2]), so kann man zwar hierüber anderer Ansicht sein. Aber die Bemerkung lässt sich doch schwer unterdrücken, wie vortheilhaft die nüchterne Unbefangenheit dieses Scholastikers, welcher der aristotelischen Theorie nur eine „grössere Wahrscheinlichkeit" zutraut, von der siegesbewussten und apodiktischen Sprache mancher Neueren absticht. Viel weiter geht Suarez. Er gibt förmlich zu, dass es im Stetigen und in jedem Theile desselben eine unendliche Menge von Punkten gebe und er fügt diesem Zugeständniss beschwichtigend hinzu, dass diese Sorte

---

[1]) Fonseca, Commentar. in libr. Metaphysicor. Aristotelis. Tom. II. Col. 675. Francof. 1599.

[2]) Fonseca l. c. Es möge hier die kurze Bemerkung gestattet sein, dass der Scotist De Rada (Controversiae theol. Coloniae 1620) sogar die Möglichkeit der Erschaffung eines unendlichen Körpers „in utramque partem disputabilis" nennt. Dass auch der hl. Thomas in gewissem Sinne zu den Zweiflern gehört, beweist sein Werk „Contra murmurantes de aeternitate mundi." Durch den Hinweis auf die Summa wird diese wichtige Thatsache nicht beseitigt.

von Unendlichkeit aus dem Grunde nichts verschlagen könne, weil sie ja nur eine relative oder beziehungsweise (nämlich mit Bezug auf eine endliche Linie) sei. „Concedendum est, esse in continuo et in qualibet parte eius infinitam multitudinem punctorum, neque illud esse inconveniens, quia tota illa infinitudo punctorum est tantum secundum quid, cum tota illa finitam lineam componat simul cum partibus lineae." [1]).

Die angebliche oder vorgeschützte Unmöglichkeit einer actual unendlichen Menge scheint mithin keine zwingende Handhabe dafür zu bieten, dass dem Versuche einer völligen, bis zu letzten, untheilbaren Elementen zurückgehenden Zerlegung des Stetigen das Haus- und Wohnungsrecht im Gebäude der Metaphysik verwehrt oder verkümmert werde. Viel eher könnte man gerade in der unendlichen Theilbarkeit des Stetigen einen neuen Beweis für die Möglichkeit einer actual unendlichen Menge erblicken.

§ 4. Die Schwierigkeit mit den Indivisibilien.

Bei weitem ernsteren Bedenken, als die soeben besprochenen, unterliegt indes eine andere Schlussfolgerung, die aus unserer Hypothese unnachsichtlich zu fliessen scheint, nämlich das nothwendige Herauskommen von Indivisibilien als der letzten Elemente des Stetigen. Aus unausgedehnten Punkten kann eine Linie ebensowenig hervorwachsen, als aus blosen Linien sich eine stetige Fläche zusammenkleistern lässt. Wenn unsere Theorie demnach mit logischer Dringlichkeit auf Elemente hinführen müsste, welche zum Aufbau der Stetigkeit sich notorisch als ungeschickt erweisen, so hätte sie sonder Zweifel eben damit ihr eigenes Todesurtheil unterschrieben.

Und dennoch lehrt ein Blick in die Geschichte der Philosophie, dass dieser verzweifelte Weg sogar von ernsten Denkern unbedenklich aufgesucht worden ist, nicht etwa nur um sich von der mathematischen Stetigkeit Rechenschaft zu geben, sondern sogar um das ganze grosse Gebiet der körperlichen Erscheinungswelt dem Denken begreiflich zu machen. Ihnen ist die in der physikalischen Welt

---

[1]) Suarez, Met. disputt. XL. Sect. V. n. 43. ed. Mogunt. Tom. II. p. 390. Hieraus lässt sich ersehen, wie auch das actual Unendliche die Unterscheidung von ‚simpliciter' und ‚secundum quid' zulässt, nach dem bekannten Grundsatz Newton's: „Nicht alle Unendlichen sind einander gleich." Ebenso wahr ist der andere Satz: „Nicht alle Nullen sind einander gleich."

beobachtete Stetigkeit keine reale, sondern nur eine phänomenale, zu deren Erklärung ein System sog. „Kraftpunkte“ vollkommen ausreichen soll. Mit solchen unausgedehnten realen Punkten, als letzten Bestandtheilen der Materie, suchen u. A. der Jesuit Boscovich und der Psychophysiker Th. Fechner auszukommen[1]). Aber selbst zugegeben, ein physikalisches System von Kraftpunkten wäre im stande, die phänomenale Stetigkeit der Körperwelt zu erklären, so könnte doch daraus keine Berechtigung hergeleitet werden, die mathematische (intelligibele) Stetigkeit (z. B. des realen Raumes) dem gleichen Erklärungsprincip zu unterstellen. Zwar lässt die Geometrie aus einem fliessenden oder sich bewegenden Punkt die Linie, aus einer fliessenden Linie die Fläche und aus einer fliessenden, beschreibenden, rotirenden Fläche den (mathematischen) Körper hervorgehen. So sagt z. B. Clavius: „Mathematici, ut nobis inculcent veram lineae intelligentiam, imaginantur punctum . . . . e loco in locum moveri: cum enim punctum sit prorsus individuum, relinquetur ex isto motu imaginario vestigium quoddam longum, expers latitudinis.“ [2]) Aber wir dürfen hierbei den Umstand nicht aus dem Auge verlieren, dass im Begriffe des Fliessens, der gleich anfangs in den Erzeugungsvorgang mit hineingenommen wurde, bereits höhere Dimensionen sich ansetzen, dass z. B. der Punkt durch den Fliessungsprocess sofort aus seiner Unausgedehntheit über sich selbst hinausstrebt und virtuell bereits zum Linienelement geworden ist. Ein fliessender Punkt ist darum streng genommen kein Punkt mehr, da er im Sinne der (Newton'schen) Fluxionsrechnung zur unendlich kleinen Linie geworden.

Wie es überhaupt hat Philosophen geben können, die aus starren Punkten eine stetige Linie oder aus Kraftpunkten ein wahrhaft stetiges Atom zusammensetzen zu können vermeinten, ist nicht leicht einzusehen. Der Widerspruch sticht eben zu grell in die Augen: entweder muss man die Wirklichkeit wahrhaft stetiger Ausdehnung ausserhalb der Anschauung keck hinwegläugnen und so den Stetigkeitsbegriff zu einer blosen Form unseres Denkens herabdrücken, oder aber es bleibt unter der Voraussetzung von der extramentalen

---

[1]) Boscovich, Theoria philos. naturalis p. I. n. n. 7: „Prima elementa materiae mihi sunt puncta prorsus indivisibilia et inextensa.“ — Th. Fechner, Ueber die Atomlehre. Vgl. Th. Harper, The Metaphysics of the School. Vol II. p. 234 ff. London 1881.

[2]) Clavius, In Euclid. Libr. I. n. 2; cf. n. 5.

Realität des Stetigen nur der eine Ausweg, dass man das Stetige wieder nur aus Stetigem ableite.[1])

Dem oben gekennzeichneten Widerspruch glaubten freilich einige Scholastiker dadurch entgehen zu können, dass sie an Stelle von starren, ausdehnungslosen Punkten sogenannte „puncta inflata", d. i. aufgeblasene Punkte treten liessen. Eine Auseinandersetzung dieser sonderbaren Theorie mag bei De Benedictis und Palmieri nachgelesen werden [2]). Wie jedoch aus der eigenen Darstellung dieser Männer deutlich hervorgeht, ist die gedachte Theorie auf mathematische Stetigkeit überhaupt gar nicht anwendbar, sondern nur auf körperliche Ausdehnung. Wir wollen nun nicht gerade läugnen, dass unter Voraussetzung von virtuell ausgedehnten, formell einfachen Elementen, die man allerdings sehr ungeschickt „aufgeblasene Punkte" nennt, reale Ausdehnung mit wahrhafter Stetigkeit begreiflich wird. Fasst man die Atome als wahrhaft einfache, aber virtuell ausgedehnte Wesen, welche einen bestimmt abgegrenzten Raum mit dem Kugelradius R stetig erfüllen und für andere Wesen ihres Gleichen undurchdringlich machen, so ist nicht leicht einzusehen, warum die primären wie die abgeleiteten Gesetze der Körperwelt nicht ebenso sicher begründet werden können, als wenn man streng formale Ausdehnung zur Grundlage des Stoffes macht. Wenigstens verdient das auf dieser Basis aufgebaute philosophische Körpersystem der „elementa simplicia, virtualiter extensa", wie es mit grossem Geschick von Palmieri verfochten worden ist, eine grössere Beachtung, als ihm bis jetzt zu Theil geworden [3]).

Man könnte sogar auf den naheliegenden Einfall gerathen, die letzten Bestandtheile des Stoffes unmittelbar nach Weise von (Körper-) Differentialen zu fassen, wie denn z. B. Lübsen geradezu meint: „Die Mathematik geht weiter als die Chemie, die bis jetzt noch immer bei materiellen Atomen stehen geblieben ist" [4]). Er beruft

---

[1]) Vgl. Schiffini, Disputt. metaphys. specialis. Vol. I. p. 26—30. Augustae Taurinorum 1888. — Vgl. Kleutgen, Die Philosophie der Vorzeit. Bd. II, S. 281 ff. (2. Aufl.) Innsbruck 1878.

[2]) De Benedictis, Phys. disputt. XV. Sect. I. — Palmieri, Institutiones philos. Vol. II. p. 20. Romae 1875.

[3]) Vgl. jedoch die scharfe Kritik, die Dr. M. Glossner (Das Princip der Individuation nach der Lehre des heil. Thomas und seiner Schule, 1887) an diesem System übt.

[4]) Lübsen, Einleitung in die Infinitesimalrechnung S. 58. Leipzig 1862.

sich dabei auf einen Ausspruch Herbart's, der irgendwo in seiner Metaphysik bemerkt: „Noch ehe man durch den vorliegenden Klumpen (eines Stoffes) den ersten bestimmten Schnitt hindurchgeführt, liegt die unendliche Möglichkeit am Tage, dass man diesen nämlichen Schnitt auf unendlich vielfache Weise anders hindurchführen könnte. Hiermit ist wirklich die ganze unendliche Theilung auf einmal vollzogen; und man hat die letzten Theile erreicht, nämlich in Gedanken, worauf es allein ankam. Diese letzten Theile können keine Materie sein ..... Daraus sollte man nun sogleich schliessen, wie schon Leibniz schloss: Es ist falsch, dass die Materie zuletzt wieder aus Materie bestehe; ihre wahren Bestandtheile sind einfach (einfache Substanzen, Monaden)". Nicht blos die ungeheure Elasticität und Gewichtslosigkeit des Weltäthers, der als Träger der optischen und nach den neuesten Entdeckungen von Hertz auch der elektrischen Erscheinungen ein unermesslich verfeinertes Medium sein muss, sondern auch vor allem die merkwürdigen Erscheinungen von Crook's „leuchtender Materie" (radiant matter) könnten vielleicht zu Gunsten einer solchen, bis auf unendlich kleine Differential-Elemente hinabreichenden Stoffzerstäubung geltend gemacht werden; womit denn auch die philosophische Hypothese von einer metaphysischen Untheilbarkeit der letzten Stoffelemente, die meines Wissens zuerst von Dmowski aufgestellt worden ist, nicht ohne physikalische Unterlage wäre. Indessen getraue ich mir in einer so schwierigen Sache kein abschliessendes Urtheil zu. Nur will mir scheinen, als ob ausserhalb des Stetigen von Differentialen im Sinne von Infinitesimalgrössen keine Rede sein könne. Isolirte Differentiale, die aus dem natürlichen Verbande, in welchem sie wohnen, herausgelöst und frei für sich hinausgestellt wären, erscheinen mir nämlich ganz und gar unmöglich. Selbst wenn wir mit Dellingshausen, diesem Todfeind der Atomistik und Moleculartheorie, eine „continuirliche Raumerfüllung" annehmen und damit die atomistische Zusammensetzung des Aethers läugnen wollten, könnten wir dennoch kaum von materiellen Differentialen reden. [1]) Als physikalische Theorie erscheint darum die Lehre von Differential-Elementen gänzlich unbrauchbar, um nicht zu sagen widersinnig. In der Frage nach dem Wesen des Körperlichen sollten wir, meine ich, im Grunde nur unsere eigene Unwissenheit bescheiden eingestehen, so sehr auch

[1]) Dellingshausen, Das Räthsel der Gravitation S. 51 ff. Heidelberg 1880.

zugegeben werden muss, dass die aristotelisch-scholastische Theorie vom Urstoff und den Wesensformen unter allen bisher hervorgetretenen Versuchen immer noch die grösste Wahrscheinlichkeit für sich hat.

Wie immer sich aber die Sache bezüglich körperlicher Stetigkeit und realer Ausdehnung auch verhalten möge, so viel ist gewiss, dass auf dem Gebiete mathematischer Stetigkeit oder idealer Ausdehnung mit blosen Indivisibilien im Sinne *heterogener* Bildungsbestandtheile in keinem Falle auszukommen ist. Nur homogenen Gebilden kann die Leistung zugetraut werden, die Zusammensetzung des Stetigen zu vermitteln. Nicht Punkte, sondern nur unendlich kleine Linien sind imstande, eine endliche Linie zu formen, gleichwie Flächen nur aus infinitesimalen Flächen, elementare Körper nur aus infinitesimalen Körperelementen sich aufbauen lassen. Mit einem Worte: stellen die Elemente des Stetigen zwar das *Letzte* der Ausdehnung dar, so bleiben sie doch selber immer etwas *Ausgedehntes*. Hieraus ergibt sich aber ein Schluss von der weittragendsten Bedeutung, nämlich: *Zwischen einem Punkt und einem Liniendifferential besteht ein himmelweiter Unterschied*. Beide stimmen nur in *einem* Merkmal überein, dem der *Untheilbarkeit*; in anderer Beziehung haben sie nichts miteinander gemein. Ein Punkt ist untheilbar, *weil* er gar keine Ausdehnung hat; eben deswegen aber erweist er sich auch als unfähig, eine stetige Linie aufzubauen. Ein Liniendifferential ist untheilbar, *trotzdem* es noch eine, wenn auch unendlich kleine (Längen-) Ausdehnung hat, welche es eben darum innerlich geschickt dazu macht, einer stetigen Linie das Dasein zu geben. Allerdings ist die Vorstellung einer unendlich kleinen Ausdehnung für unsere *Einbildungskraft* unfassbar; aber unserem *Verstande* kann es keine allzu absonderliche Mühe machen, ihre Realität und Bestimmtheit aufzufassen und anzuerkennen. Nicht ohne Witz und Scharfsinn zugleich hat ein englischer Gelehrter das unendlich Kleine als „den Geist der abgestorbenen ~~Materie~~ Quantität“ definirt: „The infinitesimal is the ghost of the departed quantity“. Im Bilde hat er so die Sache drastisch und treffend ausgedrückt.

Gegen vorstehende Beweisführung liesse sich noch die Einrede erheben, dass die Annahme von letzten, aber noch stetig ausgedehnten Elementen das Gespenst der unendlichen Theilbarkeit, das man gebannt zu haben glaubte, muthwillig wieder heraufbeschwöre. Wenn das letzte Element einer Linie noch stetige Ausdehnung hat, gleichviel ob eine endliche oder unendlich kleine, wie könnte man verhindern, dass die Theilbarkeit in's Unendliche wieder von vorne anfängt? Denn von einer methaphysischen Untheilbarkeit, wie beim Punkt, kann hier schon darum keine Rede sein, weil es im Wesen jedweder, wie immer beschaffenen Ausdehnung liegt, ohne Ende in Theile zerlegt werden zu können. Folglich sind wir mit nichten bei wirklich letzten Elementen, wie die Infinitesimaltheorie vorgibt, angekommen. Die Möglichkeit der Theilung beginnt ja auf's neue, und zwar in's Unendliche.

Der Einwurf ist gewichtvoll, ja im Grunde genommen zugleich auch das einzige Argument der ganzen aristotelischen Theorie. Liegt nun aber in Wahrheit ein Widerspruch darin, dass ein Grössenelement zwar untheilbar, aber doch noch stetig ausgedehnt sein soll? Wir antworten: ja, in allen Fällen — einen einzigen ausgenommen. Untheilbarkeit und Stetigkeit hören auf, zwei widersprechende Prädikate zu sein, wenn sie im Letzten der stetigen Ausdehnung zusammentreffen. Den letzten (Infinitesimal-) Elementen muss das Moment der Untheilbarkeit zukommen, weil es nach einer unendlichen Anzahl von Theilungen selbst einen hellen Widerspruch bedeuten würde, die Theilung noch fortsetzen zu wollen; über ein unendlich Kleines kann etwas Kleineres derselben Ordnung überhaupt nicht mehr liegen. [1] Aber ein solches unendlich Kleines muss zu gleicher Zeit auch noch Stetigkeit besitzen, weil es aus Stetigem gewonnen wurde und weil aus Unstetigem nichts Stetiges entstehen kann; das Merkmal der Stetigkeit ist dem Stetigen nach dessen ganzer metaphysischen Natur und Constitution ein wesentliches, unverlierbares Attribut. So wenig die Vernunft zur Unvernunft werden kann, ebenso wenig kann das Stetige jemals in Unstetiges übergehen.

Aus diesen Prämissen ergibt sich mit zwingender Logik das wahre Verhältniss des Punktes zur unendlich kleinen Linie. Beide sind metaphysisch untheilbar, aber in verschiedener Weise. Die Untheilbarkeit des Punktes kann man als eine negative auffassen, insofern als der Grund dafür in der totalen Ausdehnungslosigkeit des Punktes liegt. Hingegen darf man die Untheilbarkeit einer unendlich kleinen Linie als eine positive fassen, die ihre Wurzeln in dem Widerspruch findet, ein unendlich Kleines in derjenigen Ordnung, worin es ist, noch kleiner machen zu wollen; kleiner als unendlich

[1]) Ueber die philosophische Bedeutung und Deutung der Differentiale verschiedener Ordnung vergl. Gutberlet, Das Unendliche S. 120 ff. Mainz 1878.

klein kann eine Linie doch nicht sein. Die Absurdität wäre gerade so gross, als wenn jemand einer actual unendlich grossen Menge noch einige Einheiten mehr hinzufügen wollte. Die Aufwerfung des Problems ist eben schon in sich ein plumper Selbstwiderspruch. Durch ähnliche Betrachtungen lässt sich das Verhältniss zwischen einer Linie und einem Flächen-Differential sowie dasjenige zwischen einer Fläche und einem Körper-Differential festsetzen.

§ 5. Weitere Erläuterung und Begründung.

Vorstehende Hypothese, die in neuester Zeit von Dr. Gutberlet mit grossem Scharfsinn vertheidigt worden ist,[1] dürfte vielleicht auch aus dem Umstande einige Berechtigung herleiten, dass dieselbe in der Mitte zwischen Extremen steht. Dieselbe scheint in der That zwischen der früher behandelten Theorie des Aristoteles und der Monadentheorie von Leibniz, Boscowich, Herbart, Fechner u. A. eine versöhnende Mittelstellung einzunehmen. Von Aristoteles entlehnt sie zwar die Theilbarkeit bis in's Unendliche, weicht aber darin von ihm ab, dass letztere nach einer unendlichen Anzahl von Theilungen in wirklich letzte und darum actual bestimmte Elemente ausmündet Mit der Monadentheorie und deren verschiedenen Schattirungen hat sie zwar den Satz gemein, dass die unendlich kleinen Elemente, auf welche die Theilung des Stetigen zuletzt stossen muss, einfache und untheilbare Gebilde darstellen, entfernt sich aber sofort von ihr, wenn sie zugleich betont, dass diese Gebilde trotz ihrer Einfachheit und Untheilbarkeit immer noch stetige Grössen von der gleichen Beschaffenheit bleiben, wie diejenigen waren, durch deren Zerlegung sie gewonnen wurden. Mit anderen Worten: Durch Summirung solch' unendlich kleiner Grössen (Elemente) erhält man die ursprüngliche endliche Grösse wieder. Wenn wir den Vorgang in die mathematische Sprache übersetzen wollen, so dürfen wir sagen: dem philosophischen Zerlegungsprocess entspricht in der Mathematik die Differentialrechnung, dem philosophischen Wiederherstellungsvorgang die Integralrechnung.

Hiemit ist aber ein weiterer Grund berührt, der unserer Auffassung von der Theilbarkeit des Stetigen nur zur Empfehlung gereichen kann. Es darf nämlich als ein für unsere Haltung geradezu

---

[1]) C. Gutberlet, Das Unendliche. S. 93 ff. Mainz 1878. Derselbe, Metaphysik (2. Aufl.) S. 174—194. Münster 1890.

ausschlaggebendes Motiv der wichtige Umstand bezeichnet werden, dass keine andere Anschauung mit den Grundsätzen einer consequent durchgeführten analytischen Geometrie und höheren Analysis so sehr in Einklang steht, als die oben vorgetragene und begründete Theorie. Ohne Uebertreibung darf gesagt werden, dass ohne die Fortschritte, welche die Mathematik in den letzten zwei Jahrhunderten gemacht hat, weder an eine Metaphysik des unendlich Kleinen noch an eine veränderte Auffassung von der Theilbarkeit des Stetigen auch nur im entferntesten gedacht worden wäre. Die philosophische Theorie, die oben vertheidigt wurde, hat von der Mathematik eben ihren ersten Anstoss empfangen, ja ist von ihr geradezu inspirirt worden. Geschieht es doch nicht zum ersten Male, dass eine subalterne Wissenschaft der subalternirenden die trefflichsten Handlangerdienste geleistet und derselben neue Wege gewiesen hat. Warum sollte auch die Metaphysik die Dienste verschmähen, welche die höhere Mathematik ihr anbietet? Auf alle Fälle ist das Bestreben, die Metaphysik von unten nach oben auf sicherem Thatsachen-Boden aufzubauen, anstatt mit vornehmem Stolze die unter ihr stehenden Wissenschaften von oben herab zu meistern und in ihren berechtigten Eigenthümlichkeiten zu beschränken — was diese sich übrigens ohnehin nicht gefallen lassen — von lohnenderen Aussichten auf Erfolg begleitet, und dem Berufe des Philosophen, der das Gegebene erklären, nicht aber nach apriorischen Schablonen zurechtstutzen soll, auch angemessener. Die Metaphysik des unendlich Kleinen ist eben nichts Anderes als die in ein philosophisches Gewand gehüllte Differential- oder Infinitesimalrechnung selber, und diese letztere ist es wieder, welche auch zu einer Revision des Problems von der Theilbarkeit des Stetigen Anlass gab.

Soweit ich die Sache historisch zurückverfolgen konnte, hat das Bedürfniss dieser Revision schon ziemlich bald nach der Verbreitung der Infinitesimalmethode in philosophischen Kreisen sich geltend gemacht. Der schon citirte Minorit F. M. Maffei lässt auf Grund der neuen Entdeckungen auf dem Felde der Mathematik bereits im vorigen Jahrhundert die Theilbarkeit des Stetigen in letzte, und zwar unendlich kleine (Infinitesimal-) Grössen auslaufen. Er schreibt also: „Bifariam divide lineam, dimidium iterum biseca, habebis quartam totius lineae partem, qua etiam bisecta ad octavam lineae partem ventum erit. In assidua hac divisione partes imminuuntur ac tantem infinite parvae fiunt. Partes infinite parvae dicuntur infinitesimae, quae comparate ad sui generis finitam magnitudinem habent rationem quavis data minorem.“ [1]) Dass der Autor aber diese unendliche Kleinheit sich nicht, wie aus den letzten Worten gefolgert werden könnte, als eine blos potentiale, unbestimmte gedacht habe, geht aus seinen weiteren Ausführungen klar hervor. Nachdem er nämlich darauf aufmerksam gemacht, dass infolge einer weniger genauen Ausdrucksweise sowohl das unendlich Kleine wie das unendlich Grosse häufig nur bezugsweise gefasst, z. B. ein Berg im Vergleich zu einem Sandkorn als unendlich gross, dagegen im Verhältniss zum Weltall als unendlich klein angesehen werde, beeilt er sich, diese falsche Vorstellung vom wahren Wesen des unendlich Kleinen zu berichtigen und zu sagen: „At exempli tantum causa diametros arenae, mundi montisque posuimus; nam cum inter se finitam rationem habeant, non sunt infinitesimae, sed finitae.“ [2]) Der wahre Sachverhalt wird vielmehr durch folgende Erläuterung klar gelegt: „Duarum inaequalium linearum minor semper augeatur; utriusque differentia assidue minuetur; sed infinitesima erit, non priusquam lineae aequentur nec postquam aequales factae sunt, sed tum quum ad ipsam aequalitatem accedunt.“ [3]) Hiemit ist die absolute Bestimmtheit der Infinitesimalgrössen deutlich ausgesprochen.

Nachdem die metaphysische Seite des Problems genugsam gewürdigt worden ist, erhebt sich die wichtige Frage, ob und wie weit die Urtheile unserer Mathematiker mit den hier vorgetragenen Anschauungen übereinstimmen. Hierüber soll das folgende Kapitel Aufschluss gewähren.

(Schluss folgt.)

---

[1]) F. Mar. Maffei, Theorem. Metaphys. Tom. II. p. 27 sq. Patavii 1786.

[2]) A. a. O.

[3]) A. a. O. Bekanntlich hat schon Newton selber den gleichen Satz ausgesprochen, wie im Laufe des folgenden Kapitels sich herausstellen wird.