Ueber die actuale Bestimmtheit des unendlich Kleinen.

Ein Beitrag zur Metaphysik der höheren Mathematik.

Von Prof. Dr. Jos. Pohle in Washington.

(Schluss.)

Zweites Kapitel.

Auctoritätsbeweis oder Urtheile der Mathematiker.

Da es nicht selten sogar gefeierten Koryphäen der Mathematik an der hinreichenden philosophischen Schulung gebricht, wie umgekehrt zahlreiche Philosophen bei ihrer verhängnissvollen Abneigung gegen das „Rechnen“ sogar der für ihren Beruf allernothwendigsten Kenntnisse in der Mathematik entbehren: so gestaltet sich natürlich die Sichtung und Klarstellung der zahlreichen Aussprüche und Darlegungen aus dem Munde von Mathematikern zu einer schwierigen Aufgabe. In verhältnissmässig wenigen Fällen dürfte es gelingen, wörtliche Anführungen aus mathematischen Werken zu bringen, die in ebenso vielen Worten unsere im ersten Kapitel gewonnenen Resultate klipp und klar zum Ausdruck brächten. Vielfach sehen wir uns vielmehr auf die Methode der Schlussfolgerungen angewiesen, insofern eine streng logische und consequente Entfaltung und Ausbildung der leitenden Grundsätze, auf welche die grossen Mathematiker sich stützen, nothwendig zu den Anschauungen führt, welche oben ihre ausgiebige Erörterung gefunden haben. Am meisten fällt hier wohl die Auctorität gerade jener Mathematiker in's Gewicht, welche es sich zur besonderen Aufgabe machten, durch eigens ersonnene Rechnungsmethoden des lästigen Begriffes des Unendlichen ganz und gar loszuwerden, dadurch dass sie an Stelle der unendlich kleinen Grössen lauter endliche Grössen auf's Brett zu setzen und bei ihrem wunderbaren Rechenspiel damit auszukommen versuchten. Denn die bemerkenswerthe Thatsache, dass derartige Eliminirungsversuche noch immer mit einem Triumphe des unendlich Kleinen, statt mit seiner Niederlage, geendigt haben, trägt gewiss eine Beweiskraft in sich, gegen welche tausend ausdrückliche Versicherungen von seiner Realität und Bestimmtheit nicht in Vergleich kommen. — Es ist uns nun vorerst darum zu thun, unsere grossen Mathematiker über die Realität des unendlich Kleinen zu Gericht sitzen zu lassen. Dadurch wird dann ihrem Verdict über dessen actuale Bestimmtheit die nöthige Grundlage geschaffen und zugleich der Weg geebnet werden.

§ 1. Directe Zeugnisse für die Realität der unendlich kleinen Grössen.

Zu den wenigen Mathematikern, die sich von Haus aus für die Realität des unendlich Kleinen entschieden haben, gehört an erster Stelle unser grosser Leibniz selber, der Erfinder der Infinitesimalrechnung. Schon in seinen allerersten Aufzeichnungen, die aus einer Zeit stammen, wo sein erfinderischer Geist sich noch nicht zum vollen Licht der neuen, die ganze Welt umwälzenden Rechnung durchgerungen hatte, erscheint das unendlich Kleine als eine Macht und unsichtbare Gewalt, die wie ein verkleideter Riese die Welt gleichsam aus ihren Angeln zu heben versprach.[1]) Doch vermied Leibniz es wohlweislich, — durch die herrschenden Schulmeinungen wahrscheinlich beeinflusst, — bei der ersten Bekanntmachung seines kostbaren Fundes in den Leipziger *Acta eruditorum* (1684) die Vorstellung des unendlich Kleinen schon jetzt in Vorschlag, geschweige denn in Fluss zu bringen. Was uns noch mehr in Erstaunen versetzen muss, der Erfinder ging vielmehr seit dem Jahr 1695, in welchem der Niederländer Nieuwentiit die neue Rechnung mit schwerem Geschütz angriff,[2]) von der Auffassung der Differentiale als unendlich kleiner Grössen nach mannigfachen Schwankungen wieder ab, da er sich zur Stunde ausser stande sah, die von seinem Widerpart erhobenen Einwürfe gegen die Berechtigung des unendlich Kleinen zu entkräften. Diese Einwendungen gipfelten in dem Satze,

---

[1]) Vgl. Gerhardt, Entdeckung der höheren Analysis 1855; derselbe, Entdeckung der Differentialrechnung durch Leibniz. 1848. Vgl. auch meinen Beitrag zur Geschichte des unendlich Kleinen im ‚Mainzer Katholik' 1881, Erste Hälfte.

[2]) Vgl. *Acta eruditorum*. Lips. 1695 p. 272 squ.

dass weder Leibniz noch Newton noch Barrow, bei welch' letzteren ebenfalls unendlich kleine Grössen vorkämen, einen Unterschied zwischen dem Differential und der Null anzugeben wüssten, sowie dass für die Differentiale zweiter, dritter und höherer Ordnung sich absolut keine Berechtigung nachweisen lasse. Zwar liess Leibniz sich herbei, mit einer warmen Vertheidigung seiner Methode zu antworten; aber diese Antwort war nach der Bemerkung Weissenborn's „ziemlich schwach", zumal die Einreden des Niederländers eine durchaus schlagende und siegreiche Widerlegung zuliessen.[1])

Waren auch bei Leibniz noch Unklarheiten und Zweifel vorhanden, die er zu beseitigen nicht imstande war, so bemächtigten sich gleichwohl andere Analysten sehr bald der ebenso bequemen wie fruchtbaren Vorstellung, um sie bis in ihre kleinsten Züge auf's liebevollste auszubilden. An erster Stelle und in vorderster Reihe standen in diesem Wettlauf die genialen Brüder Jakob und Johann Bernouilli, die sich hernach leider in bitterster Leidenschaft und heftigster Eifersucht öffentlich zu befehden und zu verfolgen begannen. Ein weitgreifender und in gewissem Sinne durchschlagender Einfluss in der schnellen Verbreitung der Leibniz'schen Infinitesimalrechnung kommt auch dem Baron De l'Hopital, einem Schüler Joh. Bernouilli's, zu, welcher die neue Methode sofort auf Curvenbestimmungen anwandte.[2]) In der Ueberzeugung, dass die Differentialrechnung mit wirklich unendlich kleinen Grössen operire, wurden die Franzosen durch Fontenelle bestärkt.[3]) Und obschon D'Alembert als Gegner auftrat und das unendlich Kleine verwarf, so ist es dennoch gerade seine neue s. g. Grenzmethode gewesen, welche dessen objective Bedeutung erst recht in's Licht stellte.

In Deutschland war es namentlich die Wolff'sche Schule, welche den räthselhaften Grössen auf länger denn ein Jahrhundert die unbestrittene Herrschaft sicherte. Erst mit dem Hervortreten der

---

[1]) Weissenborn, Principien der höheren Analysis von Leibniz bis auf Lagrange. Halle 1856. S. 98 ff. — Später sah Leibniz, wie aus seiner *Historia et origo Calculi differentialis* (p. 17) hervorgeht, die reale Bedeutung höherer Differentialquotienten, die Nieuwentiit bestritten hatte, sehr wohl ein. Ueber die erste Schwierigkeit des Niederländers vgl. oben Kap. I. § 4.

[2]) Vgl. Klügel, Mathematisches Wörterbuch Bd. I. Leipzig 1802. S. 855. — De l'Hopital, Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes. Paris 1696.

[3]) Fontenelle, Élémens de la géometrie de l'infini. Paris 1727. Vgl. Baldinotti, Metaphysica generalis n. 631—634.

„Grenzmethode" glaubten auch deutsche Analysten der ebenso lästigen wie schwer verständlichen Vorstellung des Unendlichen sich entledigen zu sollen, bis in neuerer wie neuester Zeit die Stimmen zu dessen Gunsten sich wieder zu mehren anfingen. Schon zu Anfang unseres Jahrhunderts erklärte Klügel das unendlich Kleine für einen „reinen Verstandesbegriff, der sich nicht sinnlich darstellen lässt, aber doch intellectuelle Realität hat." [1]) Und jüngstens hat Lübsen nicht nur den Begriff, sondern auch die Methode des Rechnens mit unendlich kleinen Grössen bei uns in Deutschland wieder zu Ehren zu bringen gesucht.

Sogar in England, wo doch nationale Eifersucht die Einbürgerung der Leibniz'schen Infinitesimalmethode wesentlich erschwerte und der Newton'schen Fluxionsmethode den Vorrang erkämpfte, hat die unmittelbare Hantierung mit Infinitesimalgrössen einen geschickten Vertheidiger an B. Price gefunden, und in beschränkter Weise auch an J. Todhunter.[2]) Ersterem zufolge entstehen die unendlich kleinen Grössen durch Theilung des Stetigen in's unendliche, nämlich: „Wenn die Zahl der Theile unendlich gross wird, so wird jeder Theil für sich unendlich klein (*infinitely small*), und je näher diese Zahl der Unendlichkeit rückt, desto mehr nähert sich jedweder Theil demjenigen, was wir die Gattungs-Null (*the zero of its kind*) nennen dürfen; nachdem irgend eine endliche Grösse in dieser Weise zerlegt ist, wird jeder einzelne Theil ein Infinitesimal genannt." [3])

Um zuletzt noch einige deutsche Auctoritäten zu Worte kommen zu lassen, so schreibt Hoppe treffend: „Jeder, der mit der Mathematik hinlänglich vertraut ist, weiss bekanntlich bündige Schlüsse mannigfacher Art in Betreff unendlicher Grössen und von diesen auf endliche zu machen, kurz mit ihnen zu rechnen. Man braucht daher nur die Bündigkeit in gehöriger Allgemeinheit zum Bewusstsein zu bringen und in feste Form zu kleiden, um einen ebenso richtigen Begriff der unendlichen Grössen aufstellen zu können, über dessen Existenz demnach gar kein Zweifel übrig bleibt. Daraus folgt, dass die Ansicht von der Unmöglichkeit eines solchen Begriffs irrig ist." [4])

---

[1]) Klügel, Mathematisches Wörterbuch Bd. I. (1802.) S. 815.

[2]) B. Price, Treatise on the differential Calculus and its application to Geometry, founded chiefly on the method of infinitesimals. London 1848. — J. Todhunter, Differential calculus. Cambridge 1852.

[3]) Price, op. cit. p. 12: „When a finite quantity is thus resolved, then each part is called an infinitesimal."

[4]) Hoppe, Lehrbuch der Differentialrechnung. Berlin 1865. S. 1.

Aehnlich drückt sich Ohm aus: „Die Existenz der unendlich kleinen Zahl (Grösse) kann, so lange wir eine Stetigkeit der Grössen zulassen, nicht bezweifelt werden, wenn uns auch der Ziffernausdruck fehlt.“ [1]) Mit grosser Entschiedenheit tritt von Busse für die Wirklichkeit und Bestimmtheit des unendlich Kleinen ein, die er namentlich in den „mechanischen Wirkungen der statischen Naturkräfte“ wieder zu finden glaubt. „Nachdem ich“, so heisst es in der Vorrede, „durch ein genaueres Studium der höheren Mechanik inne wurde, wie äusserst deutlich man die mechanischen Wirkungen der statischen Naturkräfte, von ihrem Nichts in dem ersten Zeitpunkt ihres Entstehens anfangend, durch die unendlich kleinen Zeitverläufe dieser Wirksamkeit sie verfolgend und durch deren Summator, die Trägheit, zum endlichen Integral vollendet, rein calculatorisch durch Leibnizens Infinitesimal-Calcul sich darstellen kann .... wie hätte ich nunmehr mich irgend entschliessen können, mit Lagrange nur an den Calcul mit endlichen Grössen mich halten zu wollen, die unendlich kleinen Grössen während ihres allmählichen Entstehens und Verschwindens gleichsam zu perhorresciren und somit darauf Verzicht zu thun, jene mechanischen Wirkungen auch während ihres Entstehens schon dem Calcul zu unterwerfen!“ [2])

§ 2. Indirecte Zeugnisse für die Realität der unendlich kleinen Grössen.

Einen weitaus grösseren Werth legen wir jedoch auf das Ansehen jener Mathematiker, welche es als ihre Hauptaufgabe ansahen, das unendlich Kleine aus der mathematischen Betrachtung mit Gewalt zu entfernen, dabei aber das Missgeschick erfuhren, dass sie durch ihre eigenen Eliminirungsmethoden wieder auf die verhassten Grössen zurückgeführt wurden. Diese jämmerlich missglückten Versuche bilden in unseren Augen den wirksamsten und bündigsten Beweis für die Existenz des unendlich Kleinen.

---

[1]) Ohm, Geist der mathematischen Analysis Bd. II. S. 67. Ebenso spricht J. J. Littrow, Anleitung zur höheren Mathematik. Wien 1836. S. 14 f. S. 43. Vgl. auch Duhamel, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. Deutsch von Wagner. Braunschweig 1855. S. V.

[2]) Von Busse, Bündige und reine Darstellung des wahrhaften Infinitesimal-Calculs. 3 Bde. Dresden 1825—1827.

A. Exhaustionsmethode, Residual-Analysis und Substitutionsmethode *versus* Infinitesimal- u. Fluxionsmethode.

Bekanntlich wurde die Differentialrechnung in Deutschland gleich anfangs in der Leibniz'schen Infinitesimalmethode, in England aber in der Newton'schen Fluxionsmethode erfunden.[1]) Während erstere mit unendlich kleinen Grössen unmittelbar operirt, setzt letztere das unendlich Kleine zum mindesten als eine Realität voraus: ein Umstand, der schon für sich allein hinreichen sollte, der Berechtigung dieses Begriffs keine Steine in den Weg zu legen. Allerdings suchte schon Mac Laurin die Newton'sche Fluxionsmethode durch eine den Alten nachgebildete Art von Exhaustionsmethode derart umzugestalten, dass die von Bischof Berkeley beanstandeten unendlich kleinen Grössen wegfallen sollten. Aber vergeblich. Wie Weissenborn unwiderleglich darthut, fiel er über seinem löblichen Bestreben gerade in die Leibniz'sche Infinitesimalmethode, die er doch gerade bekämpfen wollte, unbarmherzig zurück. Ein anderer Engländer Namens Landen versuchte darum einen andern Weg, der zum gleichen Ziele führen sollte. Behufs Wegschaffung der unendlich kleinen oder verschwindenden Grössen führte er die s. g. „Residual-Analysis" ein, welche „anstatt der unendlich kleinen oder ganz verschwindenden Differenzen der veränderlichen Grössen zuerst verschiedene Werthe dieser Grössen ansetzt, darauf dieselben gleich nimmt, nachdem der Factor, der durch diese Gleichstellung Null werden musste, durch die Division weggeschafft ist." [2]) Wer indessen in den Geist dieser neuen Analysis näher einzudringen sucht, wird finden, dass er es thatsächlich nur mit alten Fluxionen in neuem Gewande zu thun hat. Ein Mitarbeiter der englischen *Penny Cyclopaedia* sagt daher ganz richtig von der Landen'schen Methode: „This new branch of the algebraic art was only old fluxions in a new dress." [3])

[1]) Vgl. A. Arneth, Geschichte der reinen Mathematik in ihrer Beziehung zur Geschichte des menschlichen Geistes. Stuttgart 1852. S. 261 ff.

[2]) So Klügel, Mathem. Wörterbuch Bd. IV. 1823. S. 294.

[3]) Penny Cyclopaedia of the Society for the diffusion of knowledge. Vol. VIII. London 1837. p. 489. Auch als eine andere Wendung der Grenzmethode lässt diese Analysis sich charakterisiren: „It is the limit of d'Alembert supposed to be attained, instead of being a terminus which can be attained as nearly as we please." (l. c.).

Sogar dem Entdecker der Infinitesimalgrössen, Leibniz, scheint es gegen Ende seines Lebens ob der unendlich kleinen Grössen ganz unheimlich geworden zu sein, so dass er dieselben von sich abzuschütteln beschloss. Darum suchte er dieselben durch angebbare oder endliche Grössen zu ersetzen, indem er den Differentialen im Verschwindungszustand endliche Grössen, die jenen proportional waren, substituirte. Diese vielleicht gar nicht bekannt gewordene oder wieder schnell vergessene s. g. „Substitutionsmethode“ wurde erst neuerdings durch Snell consequent durchgeführt.[1]) Ist man nun aber die Geister, die man rief, durch diese Methode los geworden? Mit nichten. Denn da auch die Substitutionsmethode einen Verschwindungszustand der veränderlichen Grössen thatsächlich anerkennt, hat sie im Princip das unendlich Kleine von vornherein anerkannt. Durch eine nachträgliche Manipulation, darin bestehend, dass man wie zur Verschleierung und Vertuschung einer unliebsamen Thatsache hurtig assignabele Grössen auf's Brett setzt, kann der unbequeme Gast doch nicht aus der Welt geschafft werden.

Gleich hier wollen wir die Bemerkung einschalten, dass auch der Versuch Euler's unglücklich ausfiel. Um das unendlich Kleine zu umgehen, ging er von endlichen Differenzen aus und suchte überhaupt die ganze Differentialrechnung nur für einen bestimmten Fall der endlichen Summen- und Differenzenrechnung auszugeben. Das Differential selbst hielt er freilich für Null und folglich den Differentialquotienten für ein Verhältniss von zwei Nullen, das jedoch selbst im Verschwindungszustand immer noch ein angebbares, endliches bleibe.[2]) Aber mit diesem Zugeständniss hatte Euler im Grunde nicht nur die Realität, sondern auch die actuale Bestimmtheit der Differentiale im Sinne unendlich kleiner Grössen ausgesprochen. Ein Verhältniss von zwei absoluten Nullen ist ja schlechterdings undenkbar; jene Nullen müssen daher im Gebiete des unendlich Kleinen noch Etwas sein, um ein Verhältniss zu einander eingehen zu können. Und mit welchem Rechte durfte Euler mit diesen Differentialen, als absoluten Nullen, auch ausserhalb des Verhältnisses rechnen, wie er doch thut? An eine völlige Be-

---

[1]) Vgl. Weissenborn, Principien der höheren Analysis von Leibniz bis auf Lagrange S. 104. 112. 113.

[2]) Euleri Introductio in Analysim infinitorum. Lausanne 1748; Idem, Institutiones calculi differentialis cum eius usu in analysi finitorum. Petropoli 1755.

seitigung des unendlich Kleinen aus unserer Begriffswelt ist mit solchen Mitteln nicht zu denken.[1])

B. Die Compensationsmethoden.

Als ein recht ansprechender und geschickter Versuch, den Unendlichkeitsbegriff aus der höheren Analysis zu entfernen, muss die s. g. „Theorie der Fehlercompensation“ betrachtet werden. Dieselbe geht von der Beobachtung aus, dass bei der ersten Zustandsänderung der Function durch das Hinzufügen von Incrementen ein Fehler gemacht werde, welcher durch das spätere Weglassen der Differentiale höherer Ordnung in Ansehung der niederen (Leibniz'scher Kanon) wieder compensirt oder ausgeglichen werde. Dabei sucht sie im einzelnen nachzuweisen, wie in der That der Ueberschuss der nach dem Leibniz'schen Kanon zu tilgenden Glieder ganz genau dem Anfangsfehler, mit dem der Calculus eingeleitet ward, gleichkomme. Unter den Ersten, welche durch Einschlagung dieses neuen Verfahrens dem unendlich Kleinen den Todesstreich versetzt zu haben glaubten, figurirt der anglicanische Bischof Berkeley von Cloyne, ein Sensualist und „Anpreiser des Theerwassers“, wie Klügel ihn nennt.

Dieser heftige Gegner der neuen Rechnung gibt uns über das Wesen des Calculs folgenden Aufschluss. „Zwei Irrthümer“, sagt er, „die gleich und entgegengesetzt sind, zerstören einander. Der erste Irrthum *de defectu* wird berichtigt durch einen zweiten Irrthum *de excessu*. Einmal hat man den Divisor um z zu klein genommen, dann um z zu gross. Die Conclusion ist richtig, nicht weil das Weggelassene unendlich klein war, sondern weil dieser Irrthum durch einen anderen entgegengesetzten und gleichen Irrthum aufgewogen wird.“[2]) Jedoch gibt es gegen die Berkeley'schen Ausflüchte Verschiedenes zu erinnern.

---

[1]) Vgl. Weissenborn, Principien etc. S. 155.

[2]) [Berkeley], The Analyst or a discourse addressed to an infidel mathematician. London 1734. Eine Analyse dieser sonderbaren, anonym herausgegebenen Abhandlung siehe bei Baumann, Die Lehren von Raum, Zeit und Mathematik in der neueren Philosophie Bd. II. Berlin 1869. S. 443 ff. Widerlegt wurde der streitlustige Bischof zunächst von Middleton und Smith, Professoren in Cambridge, in der Gegenschrift: „Geometry no friend to infidelity“ (London 1734), sowie später von Wilson, Professor in Dublin und von Benjamin Robins in dessen Werk: „Discourse concerning the nature and certainty of Sir J. Newton's method of fluxions.“ Vgl. Klügel, Mathemat. Wörterbuch Bd. I. S. 857.

Was ist es wohl, was den anglicanischen Bischof eigentlich zum Gegner unendlicher Quantitäten machte? Wo liegt der treibende Grund für seine Opposition? In seinem falschen Sensualismus, mit welchem naturgemäss der Begriff des unendlich Kleinen noch mehr als der des unendlich Grossen in schneidendstem Widerspruch steht. „Jede Vorstellung“, bemerkt treffend Baumann, „muss für Berkeley ein sinnlich anschaubares Bild geben, also in der Mathematik von endlicher, bestimmter Grösse sein, sonst ist sie nichts; von da aus fällt das Rechnen mit Fluxionen und Infinitesimalen von selbst, ausser sofern es als ein geschickter und, man weiss nur nicht wie so, auch erfolgreicher Kunstgriff betrachtet wird. . . . . Er hat sich auch die Frage nicht gestellt, so nahe sie lag, ob es so zufällig sei, dass jene Rechnungsart gerade zu der Zeit entstand, wo sie entstand. Man hätte früher von den blosen Anschauungen des Geistes auch auf sie kommen können; aber es zeigt sich hier wieder, wie eng die Beziehung der Mathematik zur Praxis des Lebens stets gewesen ist. Man kam erst darauf, als die Erfahrungskenntniss erstens durch das Mikroskop die Welt des Kleinen und immer Kleineren als thatsächlich vorhanden erschloss, und als zweitens die Bewegung geworfener Körper gleichsam handgreiflich als aus zwei geradlinigen von verschiedener Richtung zusammengesetzt erfunden wurde. Beide Erfahrungen legten den Gedanken nahe, dass das unendlich Kleine in Raum, Zeit und Bewegung nicht blos gedacht werden könne bei der Bearbeitung der in der einfachen Anschauung gegebenen Vorstellungen, sondern auch wohl seine Realität in der Natur habe, und dass z. B. aus solchen unendlich kleinen geraden, aber in der Richtung stets wechselnden Bewegungen das Krummlinige in der Natur vielfach wirklich erzeugt sei. . . . Allerdings ist das Verfahren nicht anschaulich im Sinne Berkeley's, es geht nicht um Vorstellungen, die sich dem Auge malen und für das Getast fassbar machen lassen. Aber diese Art von Anschaulichkeit ist überhaupt in der Mathematik nicht die Hauptsache.“ [1])

Um die Absurdität der Berkeley'schen Grundanschauung noch in ein helleres Licht zu stellen, möchten wir den letzteren Passus von Baumann noch dahin verschärfen, dass jene Art von Anschaulichkeit, welche nur das Sinnliche als allein maasgebend und real gelten lässt, die unmittelbare Vernichtung aller wahren Mathematik,

[1]) Baumann, a a O. S. 449 f.

sogar der Geometrie, zur Folge haben müsste. Sind ja die sinnlich angeschauten oder vorgestellten Figuren und Symbole blose Hilfsmittel oder Krücken des Geistes, um die allgemeine Wahrheit, die unter dem Bilde ruht, nur lebhafter aufzufassen, und ohne Zweifel würde jene Mathematik die vollkommenste sein, die solch' äusserer Vehikel für den Verstand am wenigsten oder gar nicht bedürfte.

Uebrigens vermochte es nicht einmal der Sensualist in einem Augenblicke gesunderen Denkens über sich zu gewinnen, die von ihm bekämpften Infinitesimalen, Fluxionen, Momente einer ausgemachten und evidenten Widersinnigkeit zu bezichtigen, wie er vom Standpunkte seines philosophischen Systems doch hätte thun müssen. Zu unserer grössten Ueberraschung sieht er sich vielmehr widerwillig gezwungen, solche unendlich kleine Grössen geradezu als möglich zuzulassen. „Wenn man mit einem (Newton'schen) *momentum*", schreibt er selber, „mehr meint als die Anfangsgrenze, so muss es entweder eine endliche Quantität sein oder eine infinitesimale. Aber alle endlichen Quantitäten sind ausdrücklich ausgeschlossen aus dem Begriffe eines *momentum*. Demnach muss das *momentum* ein Infinitesimal sein. Und allerdings, wiewohl viel Kunst aufgewendet wird, der Zulassung unendlich kleiner Quantitäten zu entgehen oder sie zu vermeiden, so scheint das unwirksam. Denn wenn ich recht sehe, kann man keine Quantität als Mittelding zwischen endlicher Quantität und Null zulassen, ohne Infinitesimale zuzulassen. Ein Increment, das in einem endlichen Zeittheilchen erzeugt wird, ist selbst ein endliches Theilchen und kann demnach kein *momentum* sein. Man muss also einen infinitesimalen Zeittheil nehmen, um das *momentum* zu erzeugen." [1]) Diese Selbstwiderlegung des anglicanischen Bischofs ist so schlagend und so überzeugend, dass wir für ihn nur die Worte übrig haben: ‚Ex ore tuo te iudico.'

Höher ausgebildet erscheint die Compensationstheorie bei dem scharfsinnigen Franzosen Carnot. Derselbe erklärte den unendlich kleinen Grössen den Krieg, indem er den Beweis antrat, dass der Leibniz'sche Kanon, demzufolge die Differentiale höherer Ordnung gegen solche niederer Ordnung zu vernachlässigen sind, auf einer

[1]) Berkeley citirt bei Baumann, a. a. O. Bd. II. S. 440. Zum Verständniss dieser Stelle sei bemerkt, dass eine Newton'sche Fluxion nur eine unendlich kleine Geschwindigkeit (also noch kein Differential) bedeutet. Das *momentum* aber ist das Product aus der Grösse (Fluente) und Geschwindigkeit (Fluxion).

blosen Fehlercompensation beruhe. Und er lieferte für diesen Satz sogar einige exacte Beweise.[1])

Aber ganz abgesehen von dem Umstande, dass Carnot seine neue Theorie nur im Umfange der analytischen Geometrie (Curven) — und hier nicht einmal unumschränkt — zur Geltung bringen konnte, hat derselbe die Leibniz'sche Infinitesimalmethode in ihrem innersten Sein und Wesen fast gänzlich verkannt und missverstanden. Denn diese letztere betrachtet die Raumgrössen, z. B. ein Dreieck, nicht mehr nach endlichen Gesichtspunkten, unter denen allein ein Anfangsfehler unvermeidlich ist; sondern sie fasst lediglich den Verschwindungszustand, oder was dasselbe ist, den Entstehungszustand des betreffenden Gebildes in's Auge. Nur in diesem Sinne will Leibniz sein „charakteristisches Dreieck," wie er das Dreieck im Momente des Verschwindens nennt, aufgefasst wissen, nämlich als ein Gebilde, das die äusseren Hüllen und Grössenverhältnisse gewissermaassen bis zur vollständigen Verflüchtigung abgestreift hat und darum nur noch in seiner begrifflichen Form vom Geiste allein festgehalten werden kann. In einem solchen Verschwindungszustand aber ist, wie dies die strengere Grenzmethode heute nachweist, die Möglichkeit gänzlich ausgeschlossen, die Incremente oder stetigen Unterschiede zu gross zu nehmen und solchergestalt den Calcul von Haus aus fehlerhaft anzulegen. Es hat aber auch schon von vornherein die Annahme alle Wahrscheinlichkeit gegen sich, dass man nöthig habe, eine von den wunderbarsten Erfolgen gekrönte Rechnungsart erst falsch anzulegen und hinterher die begangenen Missgriffe wieder zu verbessern. Niemals kann der Irrthum nothwendig sein als ein Mittel, um zur Wahrheit zu gelangen.[2]) Und dennoch wäre man nach der Auffassungsweise Carnot's zum Geständniss genöthigt, dass dieser angebliche Anfangsfehler als die unumgängliche Existenzbedingung, ja als die Wurzel der ganzen Differentialrechnung anzusehen sei, da an ihm ja die Einleitung und Fortführung des ganzen rechnerischen Verfahrens, wie an einem Faden, hängt. Das heisst aber mit anderen Worten: Ohne diesen Fehler würde der höhere Calcul überhaupt gar nicht existiren können; denn vermeidet man denselben, so kommt man über den ersten Anfang überhaupt

---

[1]) Carnot, Réflexions sur la Métaphysique du Calcul supérieur. Basle 1795. Beispiele von Carnot's Methode s. bei Weissenborn, a. a. O. S. 158ff.

[2]) Vgl. hierüber von Busse, Bündige und reine Darstellung etc. Bd. I. Dresden 1825. Vorrede.

gar nicht hinaus, man bleibt in der gemeinen Geometrie und Algebra stecken — für immer. Wie absurd! In der That vermag denn auch die jetzt vorwiegend angewandte neuere Grenzmethode mit Leichtigkeit zu zeigen, dass die Differentialrechnung nichts weniger als fehlerhaft angelegt, lediglich ein Compromiss zwischen Irrthum und Wahrheit sei.

C. Die Grenzmethode und die Theorie der derivirten Functionen.

Als den eigentlichen Vorläufer der Grenzmethode dürfen wir wohl Newton selbst ansehen, der ausser der nach ihm benannten Fluxionsmethode auch noch eine andere s. g. *method of prime and ultimate ratio* aufgestellt hat. Nachdem der Franzose D'Alembert dieselbe weiter ausgebildet hatte, ist sie insbesondere durch die von der Berliner Akademie gekrönte Preisschrift des Genfer Mathematikers L'Huilier: *Principiorum Calculi differentialis et integralis expositio elementaris* (1795) bald zur stehenden Methode geworden.

Wie wenig aber auch die Grenzmethode am unendlich Kleinen vorbeikommt, lässt sich unschwer aus der Art und Weise entnehmen, wie sie die Hauptregeln der Differentiation für die verschiedenen Functionen ableitet.[1]) An der Realität unendlich kleiner Grössen lässt dieselbe auch nicht den geringsten Zweifel übrig; wohl aber könnten noch immer Meinungsverschiedenheiten darüber obwalten, ob diese (Infinitesimal-) Grössen nur potential oder auch actual unendlich (bestimmt) sind. Das Verhältniss der Grenzmethode zur Fluxionsmethode bestimmt Lardner richtig wie folgt: „Es ist nicht schwer einzusehen, dass diese (Grenz-) Methode denselben Zweck wie diejenige Newton's erreicht; aber indem sie die mechanischen Begriffe von Zeit und Bewegung (die der Fluxionsmethode zu Grunde liegen) verwirft, führt sie unendlich kleine Grössen oder Incremente ein.“ [2]) Um keinen Preis also lässt sich das unendlich Kleine aus der Analysis verdrängen; vielmehr dringt es, wie die frische Luft,

---

[1]) Näheres bei Gutberlet, Das Unendliche. Mainz 1878. S. 81—89. Gegen das unendlich Kleine ist T. Pesch, Institt. Philosophicae naturalis. Friburgi Brisgoviae 1880. p. 466 sq.

[2]) D. Lardner, An elementary treatise on the differential and integral calculus. London 1825. p. 4.

durch jede Ritze des mathematischen Gebäudes, aus dem es hinausgeschafft werden sollte, mit Gewalt wieder ein.

Hatten die bisher in Scene gesetzten Eliminirungsversuche nur mit ebenso vielen Niederlagen geendigt, so war es endlich an der Zeit, ganz neue Kunstgriffe und gewaltsamere Mittel anzuwenden, um zum so heiss ersehnten Ziele zu gelangen. Lagrange war ganz der Mann dazu. Seine genial angelegte und durchgeführte „Theorie der derivirten Functionen“ schien in der That nicht nur Grenzverhältnisse, sondern auch Differentiale zu vermeiden. Die ganze Differentialrechnung erscheint nur als eine Rechnung mit endlichen Differenzen. War man endlich am Ziele? Die richtige Antwort liegt in einem Vergleich aus der Bakterienkunde. Dem Biologen wird es niemals glücken, von seinem Laboratorium jene unendlich kleinen Lebewesen fernzuhalten, die man Mikroben, Bacillen, Bakterien etc. nennt; mit einer an Starrsinn grenzenden Zähigkeit kommen sie immer wieder und selbst an die Reagenzgläser, Tuben, Stöpsel, ja Hände, die dazu bestimmt waren, sie zu vertreiben oder zu vernichten, setzen sie sich lustig an und erfreuen sich dem gefoppten Biologen zum Trotz ihres unzerstörbaren Daseins. Gerade so ist es mit den unendlich kleinen Gebilden in der Mathematik gegangen; sogar ein Lagrange war ausser stande, sie aus ihrem Standquartier zu vertreiben.

In der That, die derivirten Functionen müssen von Lagrange durch unendliche convergirende Reihen dargestellt werden: nun kann aber das letzte Glied derselben doch nichts anders als unendlich klein sein. Da er ferner eine beliebig grosse Annäherung an die Grenze zur Pflicht macht, so ist er ebendadurch wieder in das unendlich Kleine, dem er ausweichen wollte, zurückgefallen.[1]) Mit Recht sagt daher H. Schwarz über den Zusammenhang, den Lagrange zwischen den derivirten Functionen als Coefficienten der Entwickelung auffand: „Hätte er den logischen Charakter dieser Abhängigkeit festzustellen versucht, so dürfte er auf die Begriffe der Grenzen und des unendlich Kleinen, die er mit solcher Sorgfalt vermeidet, wieder zurückgekommen sein.“ [2]) So ist es, um mit Gru-

[1]) Näheres bei Klügel, Mathemat. Wörterbuch Bd. I. S. 821 verglichen mit „Supplement zu Klügel von Dr. Grunert“ 1. Abtheil. Leipzig, 1833. S. 698. Vgl. Gutberlet, Das Unendliche S. 90.

[2]) H. Schwarz, Versuch einer Philosophie der Mathematik. Halle 1853. S. 163. S. 166 ff. Auch Barfuss (Lehrbuch der Differentialrechnung. Weimar 1854.) S. 56 ff. bezeichnet den Umgehungsversuch von Lagrange als verfehlt.

nert zu reden, allerdings „überaus merkwürdig, dass Lagrange, welcher durch seine Functionentheorie die Betrachtung der Grenzen umgehen und vermeiden wollte, durch die ebenfalls von ihm zuerst gegebene Bestimmung des Fehlers bei der Taylor'schen und Maclaurin'schen Reihe die Differentialrechnung wieder zur Betrachtung der Grenzen zurückgeführt hat." Mit dem schliesslichen Siege der Grenzmethode, die seit Cauchy's epochemachenden Arbeiten in allen Ländern immer mehr an Ansehen und Boden gewann, war auch der Sieg des unendlich Kleinen mitentschieden.

Fast ganz unbekannt oder doch unbeachtet scheint der neuere Versuch Slomann's geblieben zu sein, welcher im Wesen der Subtraction die eigentlichen Grundlagen der Differentialrechnung sucht und dabei zur Läugnung des unendlich Kleinen gelangt. „Zur Unendlichkeit", sagt er, „haben alle Zahlen ohnehin kein Verhältniss. Nicht einmal additorisch erreicht das Eins das Unendliche, während additorisch oder subtractivisch — nur nicht divisorisch oder multiplicatorisch — die Eins in der Regel zum anderen Ende des Gedankens der Vielheit, zur Null, allerdings in Beziehung tritt. Dieses additorische oder subtractive Verhältniss zur Null genauer zu untersuchen, ist eben die Aufgabe der Differentialrechnung." [1])

Aber selbst zugegeben, dass das unendlich Grosse aus dem mathematischen Gesichtskreis durch diese Betrachtung hinweggeschafft sei, wäre dadurch dem unendlich Kleinen gleicherweise der Abschied gegeben? Oder erschiene es nicht vielmehr im Gewande der Null wieder auf der Bühne? Denn die Null muss im Sinne Slomann's doch etwas mehr sein als ein reines Nichts, wenn sie zur Eins noch ein „Verhältniss" eingehen kann. Wie wenig es in der That Slomann gelungen ist, das unendlich Kleine vor die Thüre zu weisen, beweist schlagend folgende Auslassung: „Das Messen der Zahl an der Null, das Erzwingen des Hinangehens auch der geometrischen Gesetzlichkeit an dieses ihr unerreichbar scheinende Nichts ist wichtig, und die Differentialrechnung erzwingt diese allgemeine Messung an der Null, sie ist also jedenfalls tiefer als eine Divisionalrechnung

---

[1]) H. Slomann, Versuch, die Differentialrechnung auf andere, als die bisherige Weise, zu begründen. Paris 1856. S. 110. — Tegethoff (Compendium der Differential- und Integralrechnung. Triest 1869. Vorrede.) erwähnt den Privatversuch eines „Freundes", worin das unendlich Kleine eliminirt sei. Ob dies wirklich gelungen, ist nie bekannt geworden, dürfte aber den stärksten Zweifeln ausgesetzt sein.

sein würde, die alle verschiedenen Relativitäten auf den gemeinsamen Nenner der geometrischen Relation bringen wollte.“ [1]) Aber die Frage ist hier gewiss erlaubt: Was ist denn „das Hinangehen der geometrischen Gesetzlichkeit an die Null“ anders als der geradeste Weg zu verschwindend kleinen (Infinitesimal-) Grössen? Oder ist der wirkliche Uebergang zur Null nicht eben dadurch ein Uebergang zum unendlich Kleinen? Ist letzteres nicht wenigstens eine nothwendige Durchgangsstation?

So sehen wir denn, wie alle Methoden der Differentialrechnung mit verblüffender Consequenz und Hartnäckigkeit wieder in den geheimen Eingang münden, der in die weiten Hallen des Unendlichen führt. Alle Mathematiker ohne Ausnahme sahen sich gezwungen, die Existenz des unendlich Kleinen schliesslich zuzugeben, wenn nicht willig, so zuletzt widerwillig. Eine ganz widersinnige Annahme aber wäre es, dass der menschliche Geist sogar unter Sträuben auf einen Begriff gewaltsam hingetrieben werde, der zu guter letzt sich dennoch nur als eine schmähliche Täuschung entpuppen sollte. Einer Idee, von der es ein Entrinnen nicht gibt, kann doch wohl nur ihre eigene Realität und Wahrheit zu Grunde liegen.

§ 3. Zeugnisse für die actuale Bestimmtheit der unendlich kleinen Grössen.

Allerdings ist mit der Anerkennung der Realität des unendlich Kleinen die Frage nach seiner Actualität noch nicht ohne weiteres mitentschieden. Man könnte zur Noth eine unendlich kleine Grösse sich denken, die nur im Zustand der Annäherung an die Null begriffen wäre, also potential unendlich. Nun lässt sich aber die actuale Bestimmtheit insofern auch durch Auctorität entscheiden, als sich nachweisen lässt, dass die Auffassung der Differentiale als blos potentialer Grössen in den verschiedenen Lehrbüchern nur auf Kosten der Klarheit und Folgerichtigkeit möglich ist, während in der Annahme von bestimmten Differentialen sich hingegen sofort eine widerspruchsfreie und consequente Durchführung eines festen Princips herausstellt. Es genügt nämlich nicht, die Differentiale blos unendlich klein zu nennen, man muss sie auch wirklich als unendlich klein nehmen, d. h. als so klein, dass sie kleiner sich nicht mehr

[1]) H. Slomann, a. a. O. S. 53.

denken lassen. Wenn dieselben nur unendlich klein scheinen, ohne es auch zu sein, so führen sie eben nur einen missbräuchlichen Namen, der ihnen erlaubtermaassen nicht zukommt. Einige concrete Beispiele mögen die Sache klarstellen.

Jos. Ph. Herr schreibt: „Da eine veränderliche Grösse im allgemeinen jedes beliebigen Werthes fähig ist, so kann man sich den Zahlenwerth derselben fort und fort wachsend vorstellen, so dass er endlich grösser wird als jede denkbare, noch so grosse Zahl; man sagt in diesem Falle, die Grösse wachse unendlich oder sie werde unendlich gross. Ebenso kann man sich vorstellen, dass der Zahlenwerth einer variabeln Grösse fort und fort abnehme, so dass er endlich kleiner wird, als jede beliebige noch so kleine Zahl; die Grösse heisst in diesem Zustande eine unendlich abnehmende oder unendlich klein werdende Grösse. Der Kürze wegen nennt man gewöhnlich Grössen, welche im Zustand des unendlichen Wachsens oder Abnehmens begriffen sind, schlechthin unendlich grosse und unendlich kleine Grössen." [1]) Aber wenn eine „im Zustande des unendlichen Abnehmens begriffene Grösse" schon deswegen den Namen einer unendlich kleinen Grösse verdient, weil sie „im Abnehmen begriffen" ist, so wäre ja überhaupt jede noch so grosse Zahl, wofern sie nur gegen die Null hin abnimmt, schon unendlich klein. Wie reimt sich dieser Widerspruch? Die gegen die Null convergirende Grösse kann doch erst dann —, und nicht blos „der Kürze wegen", — unendlich klein genannt werden, wenn sie es wirklich ist, d. h. wenn sie mit der Null, die sie zur Grenze hat, zusammenfällt.

Ganz handgreiflich aber folgt die actuale Bestimmtheit des unendlich Kleinen aus den Erklärungen, die Herr über den Differentialquotienten gibt. Er gibt nämlich zu, dass „der Werth des Verhältnisses $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ unbestimmt bleibt, so lange der der Grösse Δx beigelegte Werth willkürlich ist", und dass dieses Verhältniss ebendadurch „unfähig würde, eine völlig bestimmte Grösse, nämlich die Geschwindigkeit des Wachsthums der Function bei einem bestimmten

[1]) Jos. Ph. Herr, Lehrbuch der höheren Mathematik. Bd. I. Wien 1857. S. 13. Vgl. S. 16. Ebenso Carnot in „Geometrie der Stellung" I, S. 19: „Eine unendlich kleine Grösse ist nicht eine Grösse gleich Null, sondern eine Grösse, welche Null zur Grenze hat." Dazu fragt Gutberlet: „Hat nicht jede Zahl die Null zur Grenze?"

Werthe von x, auszudrücken." [1]) Dann fügt er hinzu: „Diese Unbestimmtheit wird beseitigt, wenn wir Δx unendlich klein werden lassen." Nun lässt sich aber folgendes Dilemma aufstellen: Entweder nimmt Herr hier ein actual oder ein potential unendlich Kleines an. Im ersteren Falle wird seine eingangs gegebene Definition des unendlich Kleinen falsch; im zweiten Falle aber dauert die Unbestimmtheit des Verhältnisses, welche Herr doch beseitigen will, ungeschmälert fort.

Da drückt sich J. Wenck doch viel sachlicher und folgerichtiger aus, wenn er sagt: „Unter einer unendlich kleinen Veränderung versteht man eine so kleine Veränderung, dass sie kleiner als jeder noch so kleine angebbare Werth ist. Man versteht auch unter einem unendlich kleinen Werth einen solchen, welcher in Null übergeht, ohne aber absolut gleich Null zu sein; er kann nur einem jeden endlichen, auch noch so klein gedachten Werthe gegenüber als verschwindend klein, also als Null angesehen werden. Eine solche unendlich kleine Veränderung oder einen solchen unendlich kleinen in Null übergehenden Werth nennt man ein Differential." [2]) Nur möchten wir bemerken, dass Wenck wegen der Annäherung an die Null nicht so ängstlich zu sein brauchte, da ja die Anwendung der Differentialrechnung auf Curven ein völliges Zusammenfallen mit der Grenze Null ohnehin nothwendig macht. Schon das Tangentenproblem weist uns unverkennbar auf die Unumgänglichkeit der wirklichen Grenzerreichung hin. [3]) Darum kann keine Differentialmethode auch das Grenzverfahren nicht, mit der blosen potentialen Unendlichkeit auszukommen suchen, ohne sich der Inconsequenz und Ungenauigkeit schuldig zu machen.

Mit Recht bemerkt daher J. J. Littrow in betreff des Differentialquotienten, er sei „die Grenze von dem Verhältnisse der Aenderung der Function zu der Aenderung ihrer Stammgrösse, welcher Grenze sich nämlich dieses Verhältniss immer mehr nähert, je kleiner die Aenderung dx der Stammgrösse wird, bis es endlich für ein

---

[1]) Jos. Ph. Herr, a. a. O. Bd. II. Wien 1864. S. 98. Es ist zu bemerken, dass Herr den Differentialquotienten auf Navier's Begriff der verschiedenen Geschwindigkeit im Wachsen einer Function gründet (a. a. O. S. 97).

[2]) J. Wenck, Grundlehren der höheren Analysis. Leipzig 1872. S. 40.

[3]) Vgl. L. B. Francoeur, Vollständiger Lehrcurs der reinen Mathematik, übersetzt von Dr. Edm. Külp. Bd. II. Buch III. Abtheilung I. Bern, Chur und Leipzig 1843. S. 4.

unendlich kleines dx diese Grenze selbst erreicht.“ [1]) Durch diese Grenzerreichung aber wird das unendlich Kleine aus seiner unsicheren, hin- und herschwankenden (potentialen) Seinsweise herausgerissen und zur bestimmten, festen Grösse fixirt.

Wir geben zu, dass die Actualität des unendlich Kleinen auf Zweifel stossen kann, so lange wir uns nur innerhalb der reinen Analysis bewegen, obschon auch hier schwer einzusehen ist, warum die Annäherung einer Veränderlichen an die Null, die als eine feste und bestimmte Grenze doch anerkannt wird, nicht bis zum vollen Zusammenfallen mit derselben getrieben werden könne. Wenn nun Schlömilch zum Erweise der Unmöglichkeit dieses letzteren Verfahrens sich auf die unendliche Theilbarkeit der Dinge beruft, infolge deren „man bei der successiven Theilung einer Grösse niemals auf einen letzten untheilbaren Theil stösst,“ [2]) so sieht man auf der Stelle, wie im Grunde nur ein metaphysisches Vorurtheil ihn auf eine Deutung des Grenzverfahrens hinführte, welche in der algebraischen Analysis sich vielleicht noch vertheidigen lässt, sofort aber als unhaltbar und unzureichend sich erweist, wenn es sich um die Bestimmung stetiger Grössen handelt.

Ja noch mehr. Wie H. Schwarz schlagend ausführt, läuft der Zweck der Grenzmethode gerade darauf hinaus, bis zu den einzelnen Verflussacten einer Function, als ebenso vielen in alleweg bestimmten und festgelegten Momenten, vorzudringen. Das Grenzverhältniss selbst ist nichts Anderes als „eine dem Verflussacte zukommende wesentliche Bestimmtheit.“ [3]) Alle Begriffsbestimmungen des unendlich Kleinen, welche das Zusammenfallen der Veränderlichen mit der Grenze Null entweder leugnen oder im ungewissen lassen, sind darum vom Standpunkt der Logik als unhaltbar zu verwerfen. Anstatt mit Duhamel zu sagen: „Jede variable Grösse mit der Grenze Null wird eine unendlich kleine Grösse genannt,“ [4]) müssen wir vielmehr genauer so sagen: „Jede variable Grösse in der Grenze Null ist eine unendlich kleine Grösse.“ Denn so lange ich die Veränderliche nur als abnehmend, nicht aber als bis zur Null abgenommen

---

[1]) J. J. Littrow, Anleitung zur höheren Mathematik. Wien 1836. S. 40.

[2]) O. Schlömilch, Handbuch der algebraischen Analysis. Jena 1851. S. 20.

[3]) H. Schwarz, Versuch einer Philosophie der Mathematik. Halle 1853. S. 68 ff.

[4]) Duhamel, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. Bd. I. Braunschweig 1855. S. 13. Vgl. Slomann, a. a. O. Paris 1856. S. 55.

mir denke, besitzt sie ja noch einen angebbaren Werth. Darum beginge ich einen groben Irrthum, wenn ich bei Ableitung des Differentialquotienten alle Differentiale auf der rechten Seite der Gleichung gleich Null setzte, wenn sie nicht factisch zur Null geworden wären. Aus diesem Grunde hat von Busse mit vollem Recht neben dem „werdenden“ auch ein „vollgewordenes“ Unendliches angenommen, und zwar im Gebiete des unendlich Grossen so gut wie in dem des unendlich Kleinen. „Ebenfalls völlig ausgemacht ist“, sagt er, „dass es sehr viele Grössen gibt, welche nicht nur anfangs immer kleiner werdend, sondern auch am Ende $=0$ werdend und geworden sind“, weswegen ihm auch der Werth des Differentialquotienten „ein wirklich gewordener letzter Werth“ ist.[1]) Durch diese wichtige Unterscheidung kommt nicht nur das actuale, sondern auch das potentiale Unendliche zu seinem Recht; beide haben in der Mathematik wie in der Philosophie ein Hausrecht.

Nicht minder führt eine andere Begriffsbestimmung, die in vielen Lehrbüchern gang und gäbe ist, auf die actuale Bestimmtheit der unendlich kleinen Grössen. Man definirt so: Unendlich klein heisst diejenige Grösse, welche kleiner ist als jede angebbare noch so kleine Grösse. Aber wie schon einmal hervorgehoben worden ist, muss man nicht jede Grösse, die von der Null noch entfernt liegt, für angebbar und messbar ansehen, folglich für nicht unendlich klein? Sicherlich hat der anonyme Verfasser eines wenig beachteten, aber bemerkenswerthen Schriftchens Recht, wenn er einschärft: „Die Erklärung des Unendlichen als *quantitas omni dabili maior vel minor* kann nur dann als richtig angenommen werden, wenn *dabili* jede begrenzte Grösse bezeichnet.“ [2]) So lange nämlich die Veränderliche die Null nicht wirklich erreicht hat, liegt eben zwischen beiden noch ein messbarer Abstand, der durch eine entsprechende Grösse ausgefüllt werden kann; die Veränderliche ist folglich nicht eher unendlich klein geworden, als bis kein solcher Abstand mehr vorhanden ist, d. h. als bis die Veränderliche mit der Null wirklich zusammenfällt.

---

[1]) von Busse, Bündige und reine Darstellung etc. Bd. I. S. XLII. Als Beispiel für eine „unendlich klein werdende Grösse“, im Gegensatz zur „gewordenen“ dient ihm die immerfort übrig bleibende Luftmenge im Recipienten der Luftpumpe, welch' erstere niemals völlig $=0$ werden kann (a. a. O.).

[2]) Theorie des mathematisch Unendlichen nach Schulz und Bendavid von T. S. Passau 1808. S. 4.

Nur Missverständniss der Sachlage könnte in dieser Darlegung einen Widerspruch entdecken wollen. Denn der allerdings naheliegende Einwand, die Zusammenschweissung der Begriffe Null und Grösse zur ungetheilten Vorstellung des unendlich Kleinen laufe auf eine Verbindung zweier sich aufhebender Bestimmungen hinaus, schlägt nicht mehr durch, sobald man sich nur daran erinnern will, dass weder alle Nullen noch alle Unendlichen einander gleich sind. Wie man im Gebiete des unendlich Grossen einen Unterschied zwischen dem absolut und relativ Unendlichen machen muss, so gibt es auch einen Unterschied zwischen der absoluten und relativen Null. Die absolute Null allein ist rein Nichts, womit sich nicht mehr rechnen lässt; die relative Null hingegen ist nur nach einer Seite hin Nichts, während sie nach einer anderen noch einen Ansatz von Realität sich wahrt. Aber eben infolge dieses Ansatzes von Realität ist eine solche Null noch eine, wenn auch unmessbare, so doch wirkliche, unendlich kleine Grösse, welche nur die Differentialrechnung zu behandeln imstande ist. Dass man eine solche reale Null durch den Gedanken noch aufzufassen vermöge, hat Newton sehr scharf und wahr also bewiesen:

„Obiectio est, quod quantitatum evanescentium nulla sit ultima proportio: quippe quae, antequam evanuerunt, non est ultima, ubi evanuerunt, nulla est . . . . Similiter per ultimam rationem quantitatum evanescentium intelligendam esse rationem quantitatum, non antequam evanescunt non postea, sed quacum evanescunt. Pariter et ratio prima nascentium est ratio quacum nascuntur.“

Hätte Barfuss diese Newton'sche Philosophie besser beherzigt, so würden sonder Zweifel seine Auslassungen an Klarheit und Consequenz nur gewonnen haben. Zwar tritt er mit Entschiedenheit für das Dasein des unendlich Kleinen in die Schranken und versteht dessen Vorkommen in verstellter Form sogar bei Euler und Lagrange schlagend nachzuweisen. Aber die Definition, die er selber gibt, steht mit seiner eigenen Methode in Widerspruch. „Eine Grösse“, sagt er, „welche wir als Bruch mit gleichbleibendem Zähler, aber beständig wechselndem Nenner denken, nennen wir unendlich klein. Eine unendlich kleine Grösse hat demnach eigentlich gar keinen bestimmten Werth, sondern ist nur eine Figur *(sic)*, durch welche der Uebergang zur 0 mit Hülfe fortwährender Theilung und daher stetiger Abnahme vermittelt wird. Deshalb aber gelten für unendlich kleine Grössen dieselben Rechnungsgesetze wie für die 0, obschon sie niemals 0 sind, da durch Theilung einer Grösse die 0 nie erreicht wird." [1]) Jeder wird sogleich die Frage an Barfuss richten: Aber wie können für eine Grösse dieselben Rechnungsgesetze gelten wie für die Null, wenn erstere nicht wirklich zur Null geworden ist? Sagen, die unendlich kleine Grösse sei zwar nicht Null, sondern vermittle nur den Uebergang zur Null, heisst doch wohl mit Begriffen spielen. Allerdings lässt sich durch fortgesetzte Theilung das Stetige nicht vernichten, nicht in lauter Nullen auflösen. Aber daraus folgt doch nur, dass der Theilungsprocess nicht auf absolute Nullen führen dürfe. Die letzten Theile vermitteln nicht nur den Uebergang zur Null, sondern sind selber relative Nullen, welche nach Newton'scher Auffassung noch etwas sind im Gebiete des unendlich Kleinen. Die Gefahr, vor der Barfuss zurückschrickt, als wenn der Theilungsvorgang schliesslich zu lauter „Nichtsen" führen müsste, beruht daher nur auf Einbildung; denn die Unterscheidung zwischen absolutem und relativem Nichts (= unendlich klein) trägt logisch und ontologisch ihre Berechtigung in sich selbst, wie sie denn auch im Gebiete des unendlich Grossen ihr Analogon besitzt.

Der Faden unserer Erörterungen bricht hier ab. Zwar ist mit unseren Untersuchungen über die Realität und Actualität des unendlich Kleinen die Metaphysik desselben noch nicht erschöpft; es bliebe nämlich noch die subtile Frage zu erörtern übrig, unter welche Seinskategorie im aristotelischen Sinne der Differentialquotient denn streng genommen zu subsumiren sei, ob unter diejenige der Relation, oder der Qualität, oder der Quantität u. s. w.: ein Problem, das nicht so einfach liegt, als es auf den ersten Blick den Anschein hat, und das daher von verschiedenen Philosophen und Mathematikern auch in verschiedener Weise gelöst worden ist. Jedoch gestatten die Grenzen dieser Abhandlung die weitere Verfolgung dieses ebenso interessanten wie schwierigen Gegenstandes nicht. Vielleicht wird eine passende Gelegenheit sich noch bieten, um auch dieses Problem zur Discussion zu stellen und so die tiefsten Wurzeln und die untersten Grundlagen der Metaphysik des unendlich Kleinen bloszulegen. Nach unseren bisherigen Darlegungen dürfte sich inzwischen die Ueberzeugung immer mehr befestigt haben, dass die metaphysischen Grundlagen der Differentialrechnung völlig sichere und zuverlässige sind,

---

[1]) Barfuss, Lehrbuch der Differentialrechnung. Weimar 1854. S. 2 f. Vgl. S. V. ff.

dass insbesondere kein Vorwurf unbegründeter sein kann als der, die Mathematik rechne nur mit Hirngespinnsten und führe ihr imponirendes Gebäude auf morschem Fundamente auf. Solche Redensarten sollten wohl endlich für immer verstummen.

Die Philosophie und Mathematik, beide herrliche Töchter des Himmels, sollten sich nicht mehr entfremdet gegenüberstehen, sondern friedlich einander in die Hände arbeiten und so die im Alterthum und Mittelalter so warm gepflegte Freundschaft wieder herstellen, die eigentlich nie hätte gestört werden sollen. Der Philosoph vergibt sich nichts, wenn er mit der Mathematik auf gutem Fuss sich hält; denn Gott selbst ist ja ein Mathematiker, und zwar der grösste, nach dem tiefsinnigen Ausspruch Platon's: Ὁ θεὸς ἀεὶ γεωμετρεῖ.