Die mathematischen Schriften des Nik. Cusanus.

Von Dr. Joh. Uebinger, Prof. der Philosophie in Posen.

(Fortsetzung.)[1]

Dieses mustergültige Subsumtionsverfahren behufs Lösung der ersten Aufgabe aber erinnert einen sofort an das, was oben zuletzt[2]) aus der „Quadratur des Kreises“ mitgetheilt ward, so zwar, dass sich zum so und so vielten Male, bedürfte es dessen noch, ein sachlicher Zusammenhang zwischen den in Rede stehenden Schriften nachweisen liesse. Nicht eine beliebige Gerade, sondern die Peripherie eines Vieleckes wird nämlich gleich von vornherein als gegeben angenommen und die Peripherie eines Kreises gesucht, welche weder grösser noch kleiner, sondern ihr völlig gleich ist.[3]) Manche freilich zweifelten daran, eine solche angeben zu können, doch bestreite niemand die Möglichkeit einer solchen Curve von gleichem Umfange, darum solle ein neuer Versuch, sie zu finden, gemacht werden.

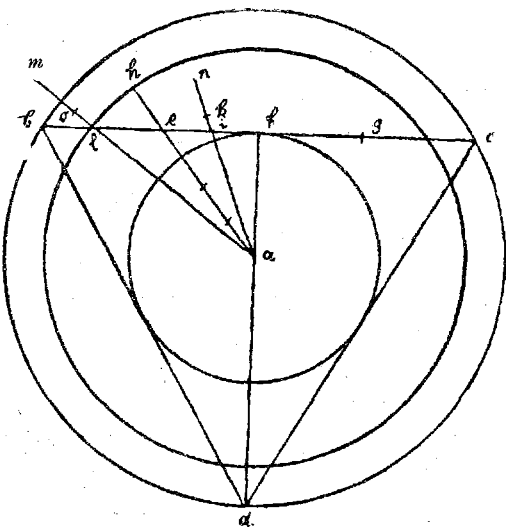
Der einem regulären Vielecke umschriebene Kreis sei, womit für uns lediglich an bereits aus der „Quadratur“ Bekanntes erinnert wird, grösser und der ihm eingeschriebene stets kleiner als das Vieleck. Daher könne auch niemand leugnen, dass ein jeder einem regulären Vielecke eingeschriebene Kreis kleiner, und jeder umbeschriebene grösser als der Kreis, der gleichen Umfang mit dem Vielecke hat. Der letztere besitze demnach einen Halbmesser, welcher grösser als jeder Halbmesser eines eingeschriebenen und kleiner als der eines umbeschriebenen Kreises sei. So weit waren wir, wie bekannt, bereits in dem ersten Theile der „Quadratur des Kreises“ fortgeschritten, und im zweiten handelte es sich für den Verfasser vor allem darum, die wirkliche Länge des gesuchten Radius innerhalb der angegebenen Grenzen zu bestimmen. Eine sinnreiche aber umständliche, eine an-

[1]) Vgl. ‚Phil. Jahrb.‘ 8. Bd. (1895) S. 301 ff. u. 403 ff. — [2]) Jahrg. 1895, S. 413. — [3]) Vgl.: „Potest . . peripheria datae polygoniae circuli alicuius peripheria nec maior nec minor esse, ut sit isoperimeter“, fol. 36ª (gedruckt steht durch Versehen XXXI anstatt XXXVI).

schauliche aber schwerlich überzeugende Construction musste damals dazu verhelfen. Jetzt ist dieselbe über Bord geworfen, sie gehörte sicherlich mit zu den vielen ziemlich schwierigen Versuchen, welche bislang gemacht, aber nunmehr überflüssig geworden sind. Ein Satz nämlich ist jetzt glücklich entdeckt, aus welchem sich das, wonach wir suchen, ohne jede Schwierigkeit als Folgerung ergibt.[1]) Der fragliche Satz aber lautet dahin, der Halbmesser eines Kreises, welcher mit einem gleichseitigen Dreiecke gleichen Umfang besitzt, verhalte sich zu der vom Mittelpunkte nach einem Viertel der Dreiecksseite gezogenen Linie wie 5:4.[2])

Beispielsweise sei (Fig. 2) ein Kreis um *a* als Mittelpunkt beschrieben, diesem das Dreieck *bcd* eingeschrieben, die Seite *bc* durch die Punkte *e, f* und *g* in vier gleiche Theile getheilt. Zieht man alsdann von *a* nach *e* eine gerade Linie, verlängert diese um ein Viertel ihrer selbst bis *h*, so wird diese der Halbmesser des Kreises sein, dessen Peripherie den drei Seiten des Dreieckes gleich kommt. Dieser Satz lasse sich sehr leicht als richtig nachweisen. Die von *a* nach *f* gezogene Linie werde offenbar der Halbmesser des dem Dreiecke eingeschriebenen Kreises, welcher unter all den Radien derjenigen

Figur 2.



[1]) Vgl.: „Manifestabitur autem id, quod quaerimus, post multos difficiliores modos facili consequentia ex hac propositione", fol. 36b. — [2]) Etwas umständlicher besagt das Original: „Semidiameter circuli isoperimetri trigono inscripto se habet ad lineam a centro circuli, cui trigonus inscribitur, ad quartam lateris ductam in proportione sesquiquarta"; mit Absicht, um keine Verwirrung zu veranlassen, ward im Obigen das Adjectiv „inscripto" und der Relativsatz „cui trigonus inscribitur" nicht weiter beachtet; den fraglichen Mittelpunkt kann man sich ebenso zutreffend auch als Mittelpunkt des regulären Dreieckes sowie des Kreises von gleichem Umfange denken.

Kreise am kleinsten ist, welche Vielecken von gleichem Umfange eingeschrieben sind; auf gleiche Weise sei die von *a* nach *b* gezogene Linie der Halbmesser des umgeschriebenen Kreises, welcher unter all den Radien von Kreisen am grössten ist, die Vielecken gleichen Umfanges umbeschrieben sind. Zieht man nun von *a* beispielsweise nach *i* nahe bei *f* eine gerade Linie, welche man nach dem Verhältnisse *if* : *bc*, d. i. des abgegrenzten Theiles zu dem Ganzen der Seite, zu verlängern hat, und die verlängert *ak* sei, so ist *ak* offenbar kleiner als der Halbmesser des Kreises gleichen Umfanges; denn der Halbmesser des letzteren ist unter allen Radien der Kreise, die Vielecken gleichen Umfanges eingeschrieben sind, am grössten. Zieht man auf gleiche Weise von *a* etwa nach *l* nahe bei *b* eine gerade Linie, verlängert diese nach dem Verhältnisse *lf* : *bc*, d. i. ebenfalls des abgegrenzten Theiles zu dem Ganzen der Dreiecksseite, und sei diese verlängerte Linie *am*, so ist klar, dass diese grösser als die gesuchte ist; denn die gesuchte ist unter allen Radien der Kreise, die Vielecken gleichen Umfanges umgeschrieben sind, am kleinsten. Man kann demnach zu irgend einem Punkte *x* zwischen *l* und *i* eine Linie von *a* aus ziehen, welche, nach dem Verhältnisse *xf* : *bc*, d. i. des abgegrenzten Theiles zu dem Ganzen der Dreiecksseite, verlängert, der gesuchten Linie gleich kommen wird. Auf gleiche Weise wird, falls man die Linie *ai* nach dem Verhältnisse *ib* : *bc* bis *n* verlängert, diese Linie *an* handgreiflich kleiner als die gesuchte sein; und ähnlich ist, wenn man *al* nach dem Verhältnisse *lb* : *bc* bis *o* verlängert, *ao* sicherlich grösser als die gesuchte. Es wird demnach zwischen *l* und *i* ein Punkt *x* fallen, an den man von *a* aus eine Linie so wird ziehen und nach dem Verhältnisse *xb* : *bc* verlängern können, dass sie der gesuchten gleich kommt. Somit findet sich also ein Punkt z. B. *i*, an welchen man von *a* eine Linie ziehen, nach dem Verhältnisse der beiden abgegrenzten Theile *ib* oder *if* zu dem Ganzen der Seite *bc* verlängen kann, doch bleibt die fragliche Linie zu klein; und ein anderer Punkt findet sich z. B. *l*, an welchen man von *a* eine Linie ziehen, nach dem Verhältnisse des einen oder anderen abgegrenzten Theiles d. i. *lb* oder *lf* zu dem Ganzen der Seite *bc* verlängern kann, stets wird die fragliche Linie gegen die gesuchte zu gross: so wird es denn wohl auch einen dritten Punkt *x* geben, an welchen man von *a* eine Linie ziehen, nach dem Verhältnisse einer jeden der Theilstrecken zu der ganzen Dreiecksseite verlängern kann, und die fragliche Linie wird weder grösser noch kleiner als die gesuchte. Und dies kann offenbar kein anderer als der Punkt e sein; nur bei ihm kann, gleichviel ob man nach dem einen oder anderen Verhältnisse verlängert, das nämliche Ergebniss herauskommen.

Man wird auf gleiche Weise sagen können: Verlängert man die Linie ai nach dem Verhältnisse $if : bc$, so ist sie kleiner, und verlängert man sie nach dem Verhältnisse $if^2 : bf^2$, so ist sie kleiner, verlängert man al[1]) nach dem Verhältnisse $lf : bc$, so ist sie grösser, und verlängert man sie nach dem Verhältnisse $lf^2 : bf^2$, so ist sie ebenfalls grösser. Es wird also zwischen l und i einen Punkt geben, an welchen man vom Mittelpunkte eine Linie ziehen und nach den bereits genannten Verhältnissen verlängern kann, die alsdann weder grösser noch kleiner als die gesuchte sein wird. Und dieser Punkt ist nothwendig e.

Auch noch ein drittes Verhalten wird man heranziehen können: Verlängert man ai nach dem Verhältnisse $if^2 : bf^2$, $if : bc$ und $ib : bc$, so ist die Linie stets kleiner; verlängert man al nach jenen Verhältnissen, so ist sie grösser. Es wird demnach einen Punkt geben, an welchen man von dem Mittelpunkte a eine Linie ziehen und so verlängern kann, dass sie weder grösser noch kleiner als die gesuchte ist, und das ist der Punkt e, welcher von dem Punkt b und f gleich weit absteht.

Beweisen aber lässt sich eben dieser Satz auf folgendem Wege. Offenbar ist in jedem Vielecke von gleichem Umfange die vom Mittelpunkte nach der Mitte einer Seite gezogene[2]) Linie Halbmesser des eingeschriebenen Kreises und nähert sich in dem Verhältnisse, wie der Inhalt oder die Fläche des Vieleckes grösser ist, mehr und mehr der Gleichheit mit dem Halbmesser des Kreises von gleichem Umfange. Auf gleiche Weise ist die vom Mittelpunkte nach der Ecke einer Seite gezogene Linie Halbmesser des umbeschriebenen Kreises und wird stetig um so kleiner, als das Vieleck inhaltreicher sein wird. Daher wird zwischen jene beiden Punkte, den End- und den Mittelpunkt der Seite, ein Punkt x fallen, an welchen sich vom Mittelpunkt eine Linie ziehen und nach dem Verhältnisse $xf^2 : bf^2$ oder $xf : bc$ verlängern lässt, die dann ihrerseits dem Halbmesser des Kreises, von gleichem Umfange wird gleich sein. Darüber wenigstens herrsche kein Zweifel. Es treffe sich aber, dass dieser Punkt in allen Viel-

---

[1]) Gedruckt steht „*ab.*“ — [2]) Anstatt „auctam“ lies „ductam“.

ecken von den zwei anderen Punkten, dem End- und dem Mittelpunkte der Seite, verschiedenen Abstand hat, sich mehr dem Mittelpunkte derselben nähert und von dem Endpunkte entfernt, wenn das Vieleck inhaltreicher wird. Wie demnach der fragliche Punkt sich stetig dem Mittelpunkte in den inhaltreicheren nähert, bis es in dem inhaltreichsten (dem Kreise) zu einem Zusammentreffen jener drei Punkte kommt: ebenso entfernt sich naturnothwendig in minder inhaltreichen jener Punkt von der Mitte, bis er in dem inhaltärmsten von jenen zwei Punkten den grössten Abstand hat.[1]) Daher liegt *e* auf der Mitte gleich weit von den äussersten Enden entfernt; hiermit hat man in dem, wie bekannt, inhaltärmsten Dreiecke das Gesuchte.[2]) Deswegen läuft jeder Halbmesser eines umgeschriebenen Kreises von dem Mittelpunkte *a* zu irgend einem Punkte *x* der Strecke *be* und bildet so eine Gerade, welche man noch über *be* hinaus nach den vorbesagten Verhältnissen von *xb* zu verlängern hat[3]); *ae* also verlängert, ist unter all jenen

[1]) „Sicut igitur hic punctus continue accedit ad medialem in capacioribus, quousque in capacissima (gedruckt steht „capacissimam", was indessen sinnlos ist) cum illis duobus coincidat, ita necessario in minus capacibus recedit punctus ille a mediali, quousque in minime capaci ab illis duobus punctis maxime distet", fol. 36b. Nach diesem Satze zu schliessen, hat Cusanus wohl nicht, wie Schanz S. 23 annimmt, geglaubt, „dass das Verhältniss $ae : eh = bc : ef$ für alle Mittelwerthe constant bleibt." — [2]) „Quare *e* est medius punctus aequaliter maxime ab extremis distans, in quo in incapacissimo trigono habetur quaesitum", l. c. Gedruckt steht nicht „**in incapacissimo**", sondern das Gegentheil „**in** capacissimo"; dass diese Lesart aber nicht richtig, das ist klar; ein „incapacissimo" ist unbedingt erforderlich und könnte, wenn man die beiden Ablative absolut fasst, genügen. Allein eine solche Deutung erscheint etwas gesucht, entspricht nicht der vorangehenden Ausdrucksweise und erklärt nicht so einfach den Druckfehler. — [3]) „Ob hoc omnis semidiameter circuli circumscripti cadit de *a* centro ad aliquem punctum lineae *b e* secundum praefatas habitudines portionis versus *b* extensae", steht fol. 36b gedruckt. Was die Stelle besagen will, das ergibt sich zwar ganz klar aus dem Zusammenhange, aber deren Wortlaut ist nicht klar. Die letzte Wortform verursacht die Unklarheit; „extensae" darf man weder mit „portionis" noch weniger mit „lineae" verbinden; zu „portionis" könnte man sich nach der sonst üblichen Ausdrucksweise der Deutlichkeit halber einen Genitiv „cadentis" hinzudenken; der Begriff „extensa" aber ist auf ein fehlendes „recta *ax*" zu beziehen; stände dort „ . . . cadit . . . lineae *be* itaque efficit rectam . . . extensam", noch besser „extendendam", so wäre nichts unklar. So wie die Stelle jetzt lautet, muss man „extensa" lesen und diesen Nominativ auf „semidiameter" beziehen; das ist freilich eine so nachlässige und logisch so wenig zu rechtfertigende Ausdrucksweise, dass ich sie ohne weiteres dem Autor gar nicht zutraue.

am kleinsten.[1]) Darum ist sie Halbmesser des Kreises von gleichem Umfange; eben dessen Halbmesser ist ja unter allen Halbmessern umschreibbarer Kreise solcher Art am kleinsten, und mit ihm trifft der grösste Halbmesser einschreibbarer zusammen. Daher findet in dem Punkte e ein Zusammentreffen der Zunahmen von f bis e der Halbmesser einschreibbarer Kreise und der Abnahmen von b bis e der Halbmesser umschreibbarer Kreise statt, Verlängerungen natürlich vorausgesetzt, welche man nach den Verhältnissen der Theilstrecken gegen b in dem einen und gegen f in dem anderen Falle gemacht hat.

Diese Lösung der ersten Aufgabe glaubte ich in ihrer ganzen Ausführlichkeit, nur hie und da ein wenig modernisirt, zu dem Ende hierselbst wiedergeben zu müssen, um an einem lehrreichen Beispiele zu zeigen, wie sich der Autor das neue Verfahren und namentlich das Zusammentreffen der Gegensätze, welches demselben zur Unterlage dient, gedacht, wie er dasselbe verwerthet hat. Verglichen mit dem gleichnamigen Verfahren und Princip in dem „gelehrten Nichtwissen", ist zwischen beiden ein himmelweiter Unterschied wohl nicht zu leugnen. Gewiss, ein Zusammentreffen von Gegensätzen findet hier wie dort statt; aber die Bedingungen, unter denen dasselbe erfolgt, sind sehr verschieden. Dort erfolgt das Zusammentreffen erst in dem nebelhaft Unendlichen, hier dagegen in dem greifbar Endlichen; symbolisch-mathematische Phantasiegebilde dort, nüchterne Verstandesgebilde hier. Und das Verfahren selbst, fraglos so nüchtern, so verstandesmässig wie nur möglich gestaltet, soll dem Verfahren der Alten in dieser Hinsicht augenscheinlich in nichts nachstehen. Ihrem Verfahren entsprechend wird, da ein directer Beweis, wie es scheint, sich nicht erbringen lässt, der indirecte versucht. Die von a nach e gezogene und entsprechend verlängerte Gerade ist weder grösser noch kleiner als die gesuchte, mithin dieser gleich. Neu ist nur, was nun weiter folgt. Weil die gesuchte Gerade ihrerseits dem kleinsten Radius der umschreibbaren und dem grössten der einschreibbaren Kreise gleich ist, so sind die letzteren auch unter sich gleich, oder der kleinste Radius trifft mit dem grössten zusammen. Aehnlich wie in dem „gelehrten Nichtwissen" liegt also auch hier ein Zusammentreffen der Gegensätze vor. Doch übersehe man über der vom Autor betonten Aehnlichkeit der Erscheinung deren Unterschied

[1]) „Et ae sic extensa est omnium illarum (sc. semidiametrorum; gedruckt steht „illorum") minima", l. c.

hier und dort nicht! Genau so sehr, wie das Endliche vom Unendlichen, das Relative vom Absoluten verschieden ist, unterscheidet sich das Zusammentreffen hier von der gleichnamigen Erscheinung dort. Dies also wäre das 1450 von unserem Autor in die Mathematik eingeführte Zusammentreffprincip und das auf demselben beruhende Zusammentreffverfahren.[1])

Auf Grund des nämlichen Principes und Verfahrens löst er dann, während die dritte und vierte Aufgabe naturgemäss keine besondere Schwierigkeit bereiten, auch die zweite sehr schwierige. Nachdem er aber auch dies geleistet, hat er „die Vollendung des Verwandlungsverfahrens“ [2]), wonach er so eifrig und so lange vergeblich forschte, endlich glücklich zuwege gebracht. Nunmehr macht es ihm keine Schwierigkeiten mehr, alle möglichen geometrischen Dinge, nicht etwa blos Kreise, zu verwandeln. Ganz methodisch geht er dabei zu Werke. Das gesammte Verwandeln in Hinsicht auf geometrische Figuren ist nämlich das einer Linie in eine Linie oder einer Fläche in eine Fläche oder endlich eines Körpers in einen Körper.[3]) Drei Kapitel sind es demzufolge, welche wir der Reihe nach behufs mustergültiger Anleitung schicklicherweise berühren.[4])

Demgemäss gibt das erste der drei Kapitel Fingerzeige, aber auch nicht mehr, darüber, wie man eine gerade Linie in eine krumme Kreislinie [5]), eine gerade in den aliquoten Theil einer solchen, eine gerade in den vierten Theil einer solchen, eine gerade in einen Theil einer gegebenen Kreislinie und endlich umgekehrt eine krumme in eine gerade verwandelt. Bei dem letztgenannten Verfahren hätten sich fast alle geirrt, findet der Autor [6]) und gibt darum hier ausnahmsweise eingehendere Anweisungen.[7])

Das zweite Kapitel übergeht, um überflüssige, weil sattsam-

[1]) Die oben gewählte Uebertragung der lateinischen Bezeichnung „coincidentia“ mag vielleicht manchem nicht gefallen; auch mir gefällt dieselbe, weil noch nicht kurz genug, nicht ganz; allein ich fand keine bessere. Was ich dagegen bereits vorfand, das war das beibehaltene Wort „Coincidenz“, und doch erheischt dieses dringend, schon um des leichteren Verständnisses willen, eine Verdeutschung. — [2]) Vgl. zu Anfang der Erörterung über das „secundum praemissum“, fol. 38b, die Worte: „Ut sequentia ostendent, perfectio transmutatoriae artis, quam inquirimus, non poterit hoc ignorato adipisci.“ — [3]) „Omnis .. transmutatio in geometricis figuris est vel lineae in lineam vel superficiei in superficiem aut corporis in corpus“, fol. 43a. — [4]) „Tria igitur sunt capita, quae seriatim pro exemplari manuductione tangi convenit“, l. c. — [5]) „Si lineam rectam in circumferentialem curvam vertere cupis . . .“, l. c. — [6]) „. . . in qua re pene omnes errasse comperio“, l. c. — [7]) fol. 43a—43b.

bekannte, Dinge auszuscheiden, gänzlich die Verwandlung geradliniger Flächen unter einander [1]); denn es beabsichtigt nicht etwa, längst breitgetretene Dinge zu wiederholen, sondern den gewussten neue hinzuzufügen.[2]) Demgemäss beschäftigt sich dasselbe, gleichfalls blos andeutungsweise, lediglich mit den Fragen, wie man eine Kreisfläche in eine geradlinige, umgekehrt eine geradlinige in eine Kreisfläche, ferner einen Kreisausschnitt [3]) und einen Kreisabschnitt [4]) in eine geradlinige Fläche, endlich eine beliebige Fläche in beliebig mehrere andere verwandelt.

Endlich das dritte Kapitel enthält Anweisungen darüber, wie man ein vierseitiges Prisma in einen Würfel, einen Cylinder in einen Würfel, einen Würfel in eine Kugel, mehrere Würfel in einen einzigen, ein hohes Prisma in ein niedriges oder ein niedriges in ein hohes, mehrere gleiche oder ungleiche Prismen in ein einziges von gegebener Höhe, eine Kugel in eine Pyramide, zwei Kugeln, von denen die grössere doppelt so gross wie die kleinere, in einen Cylinder verwandelt.

3. *De arithmeticis complementis.*

„Bester Paul, ein paar Worte der Ergänzung über arithmetische Verhältnisse!“ [5]) Gleich dieser Anfang der neuen Abhandlung deutet auf eine nahe Beziehung zwischen ihr und den vorangegangenen „geometrischen Verwandlungen“ und, was unmittelbar darauf folgt, das vermag uns nur in dieser Deutung zu bestärken. Streng genommen ist die Ergänzung nicht einmal nöthig. Für den Angeredeten und überhaupt für alle Sachverständige ergebe sich dieselbe mit voller Deutlichkeit eigentlich schon aus den Aufschlüssen, welche in der Abhandlung „über die geometrischen Verwandlungen“ enthalten seien.[6]) Trotzdem sei dieselbe ungesäumt beigefügt worden.[7])

Aus diesen Worten lässt sich in erster Reihe eine nahe zeitliche Beziehung folgern. Ergibt sich die fragliche Ergänzung

[1]) „. . . ut . . . superflua resecentur, rectilinealium superficierum versionem uti notam praetergredior“, fol. 45a. — [2]) „. . . cum intendam adiicere scitis, non replicare trita“, l. c. — [3]) „Si vero quaeris quamcunque portionem superficiei circularis inter sectores cadentem . . .“, fol. 45b; „sector“ ist darnach nicht, wie heute, mit Kreisausschnitt, sondern mit Radius gleichbedeutend. — [4]) „Si abscissionem ex chorda et arcu in rectam superficiem redigere conaris . . .“, l. c. — [5]) „Paule optime, pauca quaedam complementa de arithmeticis habitudinibus . . .“, fol. 54a. — [6]) „. . . quamvis tibi atque omnibus nota esse possint ex iis, quae in tractatu geometricarum transmutationum enodavi . .“, l. c. — [7]) „. . . impigre tamen ea subieci“, l. c.

eigentlich von selbst, so bedurfte es dazu offenbar nicht eines viel Zeit beanspruchenden Nachdenkens, und ward diese ungesäumt beigefügt, so verstrich zwischen beiden auch nicht viel Zeit unbenützt, sondern die zweite folgte der ersten auf dem Fusse. Dahin dürfte weiterhin wohl auch ein sonst nicht leicht zu erklärendes Futurum zu deuten sein, welches vorhin, obgleich es in dem dort angezogenen Satze steht, für's erste unberücksichtigt blieb. Darnach hat Toscanelli bisher noch keine Zeit gefunden, die „geometrischen Verwandlungen“ zu verbessern, sondern muss dies erst noch künftighin thun.[1]) Für die nämliche Ansicht lassen sich endlich ganz wohl einige anderweitig festgestellte Thatsachen aus dem Leben des Autors geltend machen. Gar bald, nachdem „Die geometrischen Verwandlungen“ am 12. Juli 1450 zum Abschlusse gekommen waren, wandte sich derselbe einem zwar verwandten, aber doch wesentlich anders gearteten Wissenschaftsgebiete zu, vollendete zu Rieti am 15. Juli 1450 das erste, zu Fabriano am 8. August das zweite Gespräch „Ueber die Weisheit“, im Camaldulenserkloster bei Fabriano am 23. August dasjenige „Ueber den Geist“, und endlich ebendort am 13. September das Gespräch „Ueber die statischen Beobachtungen“, um dann binnen kurzem bis in das Jahr 1452 hinein die deutschen Gaue reformirend von einem Ende zu dem andern ohne Ruhe und ohne Rast zu durchziehen. Angesichts dieser Thatsachen bleibt bei reiflichem Ueberlegen für „Die arithmetischen Ergänzungen“ füglich nur mehr ein Spielraum von zwei Tagen. Dieselben genügen uns für die Abfassung derselben angesichts der hohen geistigen Spannkraft, welche deren Verfasser gerade in jenen Tagen bekundete, vollkommen. Doch, was sage ich? Ein einziger derselben genügt völlig. Wenn er am 7. und 8. August fünf, an dem einen 15. Juli sogar sieben Folioseiten schrieb, dann brachte er in jener Zeit an einem einzigen Tage sicherlich auch zwei zustande, zumal wenn es sich dabei um Dinge handelte, welche sich, wie „Die arithmetischen Ergänzungen“, auf Grund anderweitig bereits angestellter Untersuchungen von selbst verstanden. Bleibt uns so die Wahl zwischen dem 13. und dem 14., so möchte ich mich darum am ehesten für den 13. Juli 1450 entscheiden[2]), weil dieser Tag dem „Ungesäumt“ am meisten entspricht. Ueberdies ist, rein psychologisch betrachtet, die Ruhepause, welche den Uebergang

---

[1]) „ . . enodavi a te corrigenda, impigre . . .“, l. c. — [2]) Bisher liess man für die Abfassung die Jahre 1450—51 oder gar 1450 bis 53 offen; vgl. Schanz S. 6 bez. Scharpff S. 300.

aus dem mathematischen in das philosophische Gebiet vermittelt, eher am 14. als am 13. Juli anzunehmen.

In zweiter Reihe aber lassen die oben eben erwähnten Eingangsworte auch auf eine nahe sachliche Beziehung schliessen. Es sollen ja nur allgemein verständliche Folgerungen zu ziehen sein, und zwar werden diese ausdrücklich an die oben so ausführlich wiedergegebene Lösung der ersten Aufgabe oder an die erste Grundlage der „geometrischen Verwandlungen“ angeknüpft.[1]) Diese erbringe den Nachweis, wieso das Zusammentreffen von Winkel und Linie in den verschiedenen Vielecken gleichen Umfanges uns zu dem Kreise von gleichem Umfange führe.[2]) Von hier aus stehe uns der Weg offen, diejenigen Sachen, welche auf Ergänzung der Arithmetik hinzielen, zu berechnen.[3])

Dies sind die einleitenden Sätze der kleinen Abhandlung, welche uns über deren Widmung, Ort und Zeit der Abfassung und deren nahe sachliche Beziehung zu den „geometrischen Verwandlungen“ wünschenswerthen Aufschluss ertheilen. Der auf diese ebenso lehrreiche als kurze Einleitung folgende Hauptth eil klärt uns zunächst über das Verhältniss auf, in welchem man sich dieselbe zu den Leistungen früherer Mathematiker zu denken hat. Der Punkt, um den es sich hier handle, sei vornehmlich bisheran unbekannt geblieben, das Verhältniss nämlich der Sehne zu dem Bogen.[4]) In der Kenntniss desselben bestehe jene Ergänzung; kenne man dasselbe, so werde nichts arithmetrisch zu berechnen schwierig bleiben.[5]) Es habe sehr umsichtige Denker, an deren Spitze Archimedes stehe, in früheren Zeiten gegeben, welche nachgewiesen, der Kreisumfang betrage im Verhältnisse zu dem Durchmesser das Dreifache nebst einem nur annähernd zu bestimmenden Bruche, welcher mehr als $^{10}/_{70}$ des Durchmessers und weniger als $^{10}/_{70}$ desselben ausmache[6]), und diese An-

[1]) „ut ostendimus in primo geometricarum transmutationum supposito“, fol. 54a. — [2]) „Dico autem quod coincidentia anguli et lineae in diversis polygoniis isoperimetris nos ducit ad circulum isoperimetrum, ut ostendimus in primo geometricarum transmutationum supposito“, l. c. — [3]) „Hinc via nobis patet ea, quae ad complementum arithmeticae spectant, omni attingibili modo numerandi“, l. c. — [4]) „Id autem quod dico principaliter hactenus ignoratum fuit, habitudo scilicet chordae ad arcum“, l. c. — [5]) „ . . . in cuius notitia complementum illud consistit, qua scita nihil difficile manebit arithmetice numerandi“, l. c. — [6]) „Fuerunt viri diligentissimi, quorum princeps videtur Archimedes, qui ostenderunt circumferentiam circuli triplam in habitudine ad diametrum additis plus decem septuagesimis primis ipsius diametri et minus decem septuagesimis . . .“, l. c. „Die Peripherie sei das Dreifache des Durchmessers, mit Hinzufügung

näherung, so hätten sie weiterhin nachgewiesen, könne beständig genauer werden. Indessen den Punkt, wo etwa die durch eine Zahl nicht erreichbare Genauigkeit verborgen liege, gäben sie nicht an.[1]) Obgleich man nämlich die Seite, nachdem man die Diagonale eines Quadrates berechnete, nicht berechnen kann, so gelangt man doch auf eine Quadratwurzel; könnte man diese ausziehen, so kännten wir ohne weiteres die nicht berechenbare Seite.[2]) Dass eine derartige Sachlage die alten Mathematiker uns mitgetheilt oder wenigstens gekannt, darüber fand unser Autor nichts.[3])

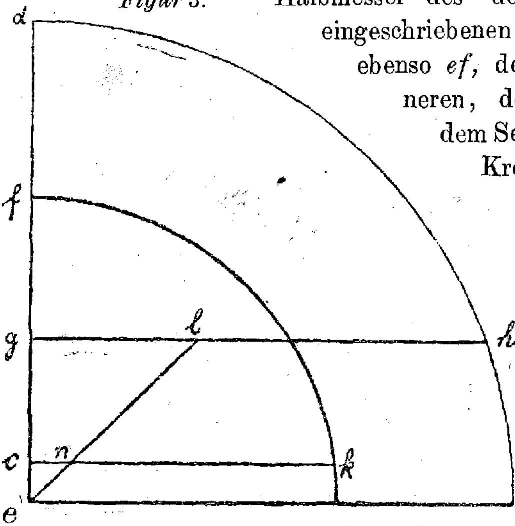
Falls man wirklich dieselbe wird kennen können, so dürfe man, wie er vermuthet, diese Kenntniss aus den bereits früher gemachten Angaben zu gewinnen vermögen. Die nunmehr zunächst folgenden Zeilen sind durchaus nicht ohne weiteres verständlich. Der Autor erklärt, die Figur, welche er in den geometrischen Verwandlungen zuletzt gezeichnet, der Kürze halber übergehen zu wollen, stellt darauf fest, das Verhältniss der Sechseckseite zum Halbmesser des Kreises, welcher einem Dreiecke von gleichem Umfange umgeschrieben, sei in Quadratwurzeln bekannt[4]), und erläutert endlich diesen Hauptsatz der „arithmetischen Ergänzungen", freilich ohne uns zuvor über die ihm vorschwebende Figur irgendwie Aufschluss zu geben, an den Verhältnissen eben dieser Figur. Unter diesen Umständen läge es zwar am nächsten, anzunehmen, im ersten Satze sei ein Druckfehler mituntergelaufen, anstatt „übergehen" müsse man „vorausschicken", anstatt „praetermitto" ein „praemitto" lesen; allein bei genauerem Zusehen erweist sich diese Annahme nicht durchführbar. Wir stehen augenblicklich vor einem Räthsel. Erst in einem späteren Absatze erhalten wir nebenbei einen Wink zu dessen Lösung.[5]) Nach diesem haben wir uns (Fig. 3) zwei Quadraten zu denken; *ed*, der Halb-

der ersten $^{10}/_{70}$ des Durchmessers minus $^{10}/_{70}$", übersetzt Scharpff S. 301 die entscheidenden Worte, will freilich deren richtige Uebersetzung den Sachverständigen überlassen.

[1]) „Non tamen tradiderunt, ubi numero inattingibilis praecisio latitaret", l. c. — [2]) „Nam etsi non possit numerari costa numerato diametro quadrati, pertingitur tamen ad numerum, cuius radicem si numerari posset, scimus innumerabilem costam", l. c. — [3]) „Tale quid non repperi veteres aut scivisse aut saltem nobis tradidisse", steht zwar gedruckt, die Logik indessen verlangt die Umstellung der beiden Infinitive. Eine Handschrift lässt sich in diesem Falle deshalb nicht zu Rathe ziehen, weil keine bekannt ist, welche die Abhandlung enthielte. — [4]) „Constat autem, quoniam habitudo lateris hexagoni ad semidiametrum circuli circumscripti trigono isoperimetro in quadratis nota est . . .", l. c. — [5]) „Post haec describe quadrantes duos, ut statim praemisi", heisst es fol. 54b.

messer des grösseren, sei dem Halbmesser gd des einem Dreiecke umgeschriebenen Kreises und seinem Ueberschusse eg über den

Figur 3.



Halbmesser des dem nämlichen Dreiecke eingeschriebenen Kreises genau gleich; ebenso ef, der Halbmesser des kleineren, dem Halbmesser cf des dem Sechsecke umbeschriebenen Kreises und seinem Ueberschusse ec über den Halbmesser des dem nämlichen Dreiecke eingeschriebenen Kreises; man ziehe darauf senkrecht zu ed die Halbsehnen gh und ck sowie endlich eine Linie von e nach den Peripherien, welche ck in n, gh in l, die Peripherie des kleinen Quadrantenin o und diejenige des grossen in m so treffe, dass no gleich lm ist. Alsdann verhalte sich $dg^2 : fc^2 = 4 : 3$; $dg : ge = 2 : 1$; $ed : ef = 3 : 2$; und weil die Dreiecke egl und ecn einander ähnlich, so verhalte sich $eg : el = ec : en$. Darnach brauche man nur zwei Grössen zu finden, deren grössere zu eg wie deren kleinere zu ec sich so verhält, dass, wenn man die grössere von ed und die kleinere von ef abzieht, die alsdann übrigbleibenden Strecken gleich sind.[1]) Eben diese übrig bleibende Strecke sei der Halbmesser des Kreises von gleichem Umfange mit dem Sechs- oder Dreiecke, welche gleichen Umfang besässen.[2]) Weil aber das Verhältniss des Sechs- bezw. Dreiecksumfanges und ebenso das Verhältniss des Kreishalbmessers zu ed bekannt ist, so wird das *Verhältniss des Durchmessers zur Peripherie auf jede denkbare Weise bekannt sein.*[3]) Auf diese Weise denn wisse man, wie das Ergebniss beschaffen sein dürfte, wonach man suche, und welches man durch die Zahl nicht

[1]) „Inveniantur igitur duae quantitates, quarum maior se habeat ad eg sicut minor ad ec sic, quod subtracta maiori de ed et minori de ef remanentia sint aequalia", l. c. — [2]) „Remanens illud est semidiameter circuli isoperimetri polygoniae hexagonae vel trigonae, quae sunt isoperimetrae", l. c. — [3]) „Et quia habitudo peripheriae polygoniae ad de est nota, et habitudo semidiametri circuli isoperimetri ad de est nota, erit habitudo diametri ad circumferentiam omni scibili modo nota", l. c.

erreiche, so dass die Vernunft deutlich das Nichtwissen und unzulängliche Vermögen des berechnenden Verstandes erkennt.[1])

Aus den Darlegungen des vorstehenden Einzelfalles ergebe sich dann offenkundig, dass man jedes Verhältniss beliebiger Sehnen zum Bogen und Durchmesser erforschen könne.[2]) Auf dem angegebenen Wege würden alle Sehnen bekannt, eine Kenntniss, welche die Alten zwar mit höchstem Eifer erstrebt, aber nicht hätten erreichen können. Alle bis auf diese Stunde geständen, wie bekannt, dass sie Sehnen von einem, zwei, vier, acht Graden und sofort nicht genau kännten.

Ebenso werde man auch das Verhalten eines unbekannten Dreieckes, seiner Seiten und Winkel aus der Kenntniss des Verhältnisses der Bogen und Sehnen, überhaupt werde man jede Kenntniss der Art mit hinlänglicher Sicherheit aus den besagten „Ergänzungen" entnehmen können.[3])

Diese „Ergänzungen" aber hat man sich nach der vorstehenden Analyse, wenn anders dieselbe das Richtige trifft, was nicht ganz leicht zu sein scheint, in vier kleinere Absätze zerlegt zu denken. Deren erster ist geschichtlicher, der zweite inductiver, der dritte und vierte allgemeiner Natur. In verständigem, klarem Gedankenfortschritte erfahren wir näheres über die gar beachtenswerthen Leistungen der Vorgänger, über das, was sie wohl gesucht, aber nicht gefunden, und was nunmehr glücklich gefunden ist. In diesem Funde bestehen „Die arithmetischen Ergänzungen", Ergänzungen nicht blos fremder sondern vornehmlich der eigenen Leistungen, der tags zuvor vollendeten „Geometrischen Verwandlungen", welche ihrerseits der kleinen Abhandlung „Ueber die Kreisquadratur" Anfang Juli ihre Entstehung verdanken.

So gehören denn die genannten drei Schriften zeitlich und nachweisbar auch sachlich auf's engste zusammen. In letzterer Hinsicht könnte man „Die Kreisquadratur" füglich das Vorwort, „Die arithmetischen Ergänzungen" das Nachwort zu den „Geometrischen Verwandlungen" nennen; alle drei aber wird man nach einem bekannten Satze der Logik mit Fug und Recht unter dem Titel „Verwandlungen" zusammenfassen dürfen. (Fortsetzung folgt.)

---

[1]) „... ut scias, quid sit id quod quaeris, quod numerus non attingit, ut ignorantiam ac defectus rationis numerantis videat intellectus", fol. 54b. — [2]) „Palam ex his est posse omnem habitudinem quaruncunque chordarum ad arcum atque diametrum inquiri", l. c. — [3]) „Poterit etiam ignoti trianguli, laterum et angulorum habitudo ex scientia habitudinis arcuum et chordarum et omne tale scibile sufficienter venari ex dictis complementis", l. c.