Philosoph. Jahrbuch der Görres-Gesellschaft.
39. Band. 3. Heft.

Zur Philosophie der Mathematik.

Von Jos. Ternus S. J. in Frankfurt a. M.

Die rätselhaft sagenumwobene Warnungstafel über der platonischen Akademie in Athen, die dem ἀγεωμέτρητος den Zutritt zum Kreis der Philosophen verwehrte, galt von jeher als ein Motto zur hellenischen Erbweisheit vom engen Bund der Mathematik mit der Philosophie. Keiner hat den platonischen Gedanken vom εἴσοδος ins Innerste der Philosophie auf dem Wege über die Mathematik so oft ausgesprochen und aus letzten Gründen des Seins und Erkennens begründet wie Aristoteles, der Lehrmeister der Scholastik. Das Prinzip der Stufung aller Seinsphilosophie in Physik, Mathematik und Metaphysik ist noch immer lebendig im philosophischen Bewusstsein der aristotelischen Scholastik. Ob auch die Anwendung auf entsprechende Problembearbeitung? Hören wir einen gewiss unverdächtigen Anwalt der Scholastik: Vor Jahren hat Ernst Commer einmal den Wunsch ausgesprochen, „der die Ausfüllung einer noch vorhandenen Lücke in der scholastischen Philosophie betrifft. Der Führer unserer Schule ist für diesen Mangel nicht verantwortlich. . . . Zur Philosophie zählte er mit Recht auch die Mathematik[1]), deren Prinzipien er an vielen Stellen seiner Schriften beleuchtet hat. Merkwürdigerweise hat aber diese Wissenschaft in seiner Schule keine besondere Darstellung im philosophischen System gefunden, vielleicht weil sie zur Zeit der Herrschaft der alten Philosophie noch weniger ausgebildet war und man sich mit der Untersuchung der mathematischen Prinzipien vom metaphysischen Standpunkte begnügte.

[1]) Diese vorbehaltlose Sprechweise ist im Zusammenhang bei Commer gerechtfertigt, muss aber von der philosophischen Mathematik verstanden werden, wie ja auch nicht alle Physik zur Philosophie zu zählen ist, sondern nur die Naturphilosophie. Aber Mathematik ist nicht bloß ein Kollektaneum von illustrierenden Beispielen zur philosophischen Didaktik, vor deren „Mißbrauch“ P. Mansion O. P. neuerdings mit Recht warnt (cf. Rev. Néosc. 21, 326 ff.: Le douzième commandement de la Géometrie en Philosophie).

Da nun die Mathematik nach dem Grade ihrer Abstraktion ihre Stelle zwischen der Naturphilosophie und der Metaphysik hat, so wäre es heute die Aufgabe der Schule, die eigentümlichen Prinzipien der Mathematik wenigstens ebenso wie diejenigen der Naturwissenschaften zu entwickeln und so jene Lücke durch eine philosophische Mathematik zu ergänzen. Erst dann würde das Ideal der thomistischen Philosophie erreicht werden. Den Weg dazu zeigt der Aquinate. Er selbst hat ihn schon eine grosse Strecke weit durchschritten [1], und seine Prinzipien werden uns auf diesem Wege weiterführen, auch da, wo er in das neue Gebiet einbiegt, das Descartes erschlossen hat." [2])

Wenn wir nun im Folgenden zeigen wollen, wie die heutige Mathematik von sich aus nicht weniger die Philosophen zum Appell ruft, wie die Philosophie von sich aus zu den gleichen mathematischen Grundproblemen sich hingedrängt fühlen musste, so können wir anknüpfen an eine wertvolle Tradition, die uns ein Constantin Gutberlet — der Begründer dieses Jahrbuches hinterläßt. Diesem Vorkämpfer der Scholastik hat, nach eigenem Geständnis, „eine 15jährige gleichzeitige Lehrtätigkeit in der Philosophie und Mathematik seine Aufmerksamkeit fortwährend auf die innigen Beziehungen zwischen Mathematik und Philosophie hingedrängt", und eine seiner ersten Monographien galt dem Begriff, „der der Metaphysik und Mathematik gleich eigen ist, dem Begriff des Unendlichen". [3] Das Buch sollte dem Philosophen bald Gelegenheit geben, mit einem Mathematiker allerersten Ranges, mit dem Begründer und Klassiker der Mengenlehre, Georg Cantor in vertrauten Verkehr zu treten und den philosophischen Aspekt und die mathematische Betrachtungsweise in ihrem beiderseitigen Ja und Nein beobachten zu können. Erst in allerjüngster Zeit hat uns der greise Gutberlet — gelegentlich einer Besprechung von Fraenkels Mengenlehre [4] — einiges Intimere darüber wissen lassen, das aber schlaglichtartig die ideelle Nachbarschaft von Philosophie und Mathematik an dem Beispiel der Neuscholastik und der neueren Mathematik dartut. [5]

[1]) In der Anmerkung wird auf die Tabula aurea des Petrus von Bergomo sub voce Mathematicalia und auf die Complutetenses, sowie Sanchiez Sedegno verwiesen. — [2]) Divus Thomas (1914) S. 28 f.

[3]) Const. Gutberlet, Das Unendliche metaphysisch und mathematisch betrachtet. Mainz 1878. Vorrede. — [4]) Philos. Jahrbuch 32 (1919) 364 ff.

[5]) Mir scheint in dieser Mitteilung ein wertvoller Beitrag zur Geschichte der neuscholastischen Philosophie zu liegen — ganz abgesehen von der An-

Der dort von Gutberlet erwähnte, aber nicht näher bezeichnete Aufsatz [1]), in dem Cantor mit dem ganzen philosophischen Ernst

---

regung zu philosophischer Besinnung auf Gegenwartsaufgaben der Scholastik, die sie zu geben vermag. Darum halte ich es für angebracht, den bezüglichen Passus — der an „entlegenem“ Ort einer gewöhnlichen Buchbesprechung steht — nochmal hier abzudrucken:

„Im Jahre 1878 veröffentlichte ich eine Schrift, «Das Unendliche, metaphysisch und mathematisch betrachtet», in der ich die herkömmliche Ansicht von der Unmöglichkeit einer unendlichen Grösse bekämpfte. Dieses Unternehmen brachte mir vielen Widerspruch und, wo die Gründe fehlten, auch Spott ein. Um dieselbe Zeit veröffentlichte auch Cantor seine Mengenlehre, deren Grundgedanke die unendliche Grösse ist. Da er sich wegen dieses kühnen Unternehmens von allen Seiten angegriffen sah, suchte er Sukkurs bei mir, dem einzigen, der, wie er glaubte, mit seiner Auffassung übereinstimmte. Da er von edler Gesinnung war, teilte er nicht die Verachtung, mit welcher die ungläubige Wissenschaft die christlichen Philosophen behandelt. Es war auch nicht die bloße Not, welche ihn zu mir führte, sondern, wie er sagte, habe er darum eine katholikenfreundliche Gesinnung, weil seine Mutter katholisch war. Er befragte mich über die Lehre der Scholastiker in betreff dieser Frage. Ich konnte ihn besonders auf den hl. Augustin und auf den P. Franzelin, den späteren Kardinal, hinweisen. Dieser mein hochverehrter Lehrer verteidigte die aktual unendliche Menge in der Erkenntnis Gottes, gestützt auf die ausdrückliche Lehre des hl. Augustin, und er war es, der mir den Anstoss zu jener Schrift gegeben, und mich bei den heftigen Angriffen damit beruhigte, dass ich nur die Lehre des hl. Augustin vortrage. An den Kardinal wandte sich Cantor selbst, und Aeusserungen desselben teilt er, ohne ihn zu nennen, in einem Aufsatze der „Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik“ mit.

Nach der ersten Bekanntschaft entwickelte sich eine lebhafte Korrespondenz zwischen den beiden Leidensgefährten; ich konnte Cantor selbst bei mir begrüssen und in der interessanten und lehrreichen Unterhaltung wichtige Aufschlüsse über mathematische Verhältnisse erlangen. Auf seinen Wunsch habe ich dann eine eingehende Darstellung seiner Mengenlehre in der „Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik“ veröffentlicht. Ich tat dies um so bereitwilliger, als ein heftiger Gegner der Scholastik, Pfarrer Isenkrahe, ein Bruder des jetzt vielgenannten Mathematikers Isenkrahe, einen längeren Aufsatz in dieser Zeitschrift gegen mich geschrieben hatte. In einem Punkte war ich nicht mit Cantor einverstanden: er behauptete die unendliche Grösse auch für existierende Dinge, während ich sie nur für die möglichen bewiesen, für die existierenden aber als unmöglich darzutun versucht habe. Cantor hat in derselben Zeitschrift meine Argumente zu entkräften versucht, ich konnte mich aber nicht von ihrer Triftigkeit überzeugen, noch viel weniger die neuesten Angriffe, die Isenkrahe auf meine Beweisführung gerichtet hat, für stichhaltig finden.“

[1]) Er steht in der „Zeitschrift für Philosophie und philos. Kritik“ Bd. 91 (1887) S. 81 ff. und S. 252 ff.; die Fortsetzung in Bd. 92 (1888) S. 240 ff. enthält nichts mehr auf scholastische Philosophie unmittelbar Bezogenes.

seiner mengentheoretischen Spekulation sich zu den Scholastikern hingeführt sieht, ist heute noch — oder gerade wieder — ungemein lesenswert. Nach einer einleitenden Unterscheidung von acht verschiedenen Standpunkten, „die sämtlich in der Philosophie vertreten sind", fährt er fort: „Liegt es besonders der spekulativen Theologie ob, dem Absolutunendlichen nachzuforschen und dasjenige zu bestimmen, was menschlicherseits von ihm gesagt werden kann, so fallen andererseits die auf das Transfinite hingerichteten Fragen hauptsächlich in die Gebiete der Metaphysik und der Mathematik; sie sind es vorzugsweise, mit denen ich mich seit Jahren beschäftige.

Da ich das Glück hatte, darüber mit mehreren Gelehrten, welche meinen Arbeiten ein freundliches Interesse gewidmet, zu korrespondieren . . . so meine ich in diesem aus lebendigem Wechselverkehr hervorgegangenen Material geeignete Anknüpfungspunkte für weitere ein grösseres Publikum interessierende Ausführungen zu besitzen. Ich möchte daher zunächst in Folgendem mehrere dieser von mir geschriebenen Briefe veröffentlichen, ohne wesentliche Aenderungen an ihnen vorzunehmen." [1]) Brief II war an Herrn Prof. Gutberlet, Brief III und IV „an einen grossen Theologen gerichtet; derselbe ist — wie ich mit Schmerz erwähne, am 11. Dez. 1886 in die Ewigkeit abgerufen." [2]) — Es war der Kardinal Franzelin S. J.

Der ganze Aufsatz verrät allenthalben große Vertrautheit mit einschlägiger scholastischer Literatur aus der Hoch-, Renaissance- und Neuscholastik, vor allem aber mit dem „durch Gelehrsamkeit und Scharfsinn ausgezeichneten Werk des R. P. Tilm. Pesch." [3]) Und es war ihm ernst mit seinem Studium scholastischer Literatur. Er griff zu den ersten Quellen, diskutierte die Berechtigung ihrer Interpretation in dem einen oder anderen Sinn, brachte Belege aus Aristoteles, Augustinus, Origines, stößt in eigener Forschung — auf dem Wege über Bayles Dictionnaire — auf einen sonst wenig genannten Spätscholastiker, „den hervorragenden Franziskanermönch R. P. Emmanuel Maignan aus Toulouse (Cursus philosophicus, Lugduni

---

[1]) a. a. O. S. 82. — [2]) a. a. O. S. 105 Anm.

[3]) Gemeint sind die „Institutiones Philosophiae naturalis" von P. Tilman Pesch, wie die weiteren Ausführungen zeigen.

Wie der grosse Mathematiker durch dieses Werk mit dem genannten Pater in freund-wissenschaftliche Beziehungen getreten war und den verbannten Jesuiten sogar gelegentlich in Blyenbeck (Holland) aufsuchte, so hatte ihn die

1673), der dem kategorematischen Unendlichen eine sehr weite Sphäre zuweist". [1])

Cantor hatte auch ein Sensorium für die tieferen Bedeutsamkeiten, die hinter scheinbar banalen scholastischen Termini lagen. „In gewissem Sinne lässt sich jeder Ordnungstypus als ein compositum aus Materie und Form ansehen; die darin enthaltenen, begrifflich unterschiedenen Einsen liefern die Materie, während die unter diesen bestehende Ordnung das der Form Entsprechende ist. ... In der Euklidischen Definition (der Zahl = endlicher Kardinalzahl) fehlt der ausdrückliche Hinweis auf den einheitlichen Charakter der Zahl, welcher ihr durchaus wesentlich ist." [2]) Und in der Anmerkung hebt er hervor, daß Leibniz „im Jahre 1666, in der Schrift: „Dissertatio de arte combinatoria, im Prooemium", als er in seinem Entwicklungsgange der Philosophie der Vorzeit noch näher stand, über den Zahlbegriff sich wie folgt ausspricht: .... ipsum totum abstractum ex unitatibus, seu totalitas dicitur numerus. Schon nach drei Jahren findet sich von demselben Autor in einem Brief an Thomasius (ed. Erdmann p. 53) die bedenkliche Erklärung: numerum definio unum et unum et unum etc., seu unitates. Die Addition von Einsen kann aber niemals zur Definition einer Zahl dienen, weil hier die Angabe der Hauptsache, nämlich wie oft die Einsen addiert werden sollen, nicht ohne die zu definierende Zahl selbst erfolgen kann. Dies beweist, dass die Zahl, durch einen einzigen Abstraktionsakt gewonnen, nur als organische [3]) Einheit von Einsen zu erklären ist. Daraus folgt ferner, wie grundfalsch es ist, den Zahlbegriff vom Zeitbegriff oder der sogenannten Zeitanschauung abhängig machen zu wollen. Es ist dies in der neueren Philosophie seit ihrer Fortbildung durch Kant [4]) vielfach geschehen."

Lektüre von Hontheims Theodicea veranlasst, auch mit diesem Interessenten gemeinsamer Fragen in Gedankenaustausch zu treten. Die Bibliothek der niederdeutschen Jesuitenprovinz bewahrt noch manche „hommage respectueux de l'auteur Georges Cantor" aus jener Zeit.

[1]) a. a. O. S. 265. — [2]) a. a. O. S. 253.

[3]) Mit der Scholastik sich zu begnügen, diese Einheitsbindung eine formale zu nennen, konnte sich wohl Cantor nur darum nicht entschliessen, weil der terminus formal einer unglücklichen Veräusserlichung anheimgefallen ist, die der scholastische Philosoph nur zu oft als Beeinträchtigung seiner aristotelisch-strengen Terminologie empfindet.

[4]) Die betreffende Urstelle bei Kant, Kritik der reinen Vernunft, und zwar der Sache nach in den Ausführungen des 2. Teiles der Transzendentalen Aesthetik: Von der Zeit; mehr formell in Worten auf S. 748 bezw. 752 der 2. Auflage.

Die Verflechtung mathematisch-philosophischer Anschauungen war es auch, die ihn seine scharfe Kritik an dem empiristisch-psychologischen Standpunkt eines von Helmholtz und Kronecker unter einen allgemein-philosophischen Gesichtspunkt rücken lässt: „So sehen wir in Deutschland, als Reaktion gegen den überspannten Kant-Fichte-Schelling-Hegelschen Idealismus eingetretene, jetzt herrschende und mächtige akademisch-positivistische Skepsis endlich auch bei der Arithmetik angelangt, wo sie mit der äussersten, für sie selbst vielleicht verhängnisvollsten Konsequenz, die letzten ihr noch möglichen Folgerungen zu ziehen scheint.“ [1])

Das war im Jahre 1887. Es war das gleiche Jahr, in dem Husserl mit seiner Habilitationsschrift „Ueber den Begriff der Zahl“ in den Dozentenkörper der gleichen Hallenser Universität eintrat, an der Cantor sich nach anti-psychologischer Philosophie der Arithmetik umsah. Husserl brachte sie und veröffentlichte im Jahre 1891 seine „Philosophie der Arithmetik“, die er — was auch wieder bezeichnend ist — seinem Lehrer Franz Brentano, der die aristotelische Scholastik doch nie hat verleugnen können und wollen —, gewidmet hat. Unabweisbare Probleme, „die den Fortgang seiner langjährigen Bemühungen um eine philosophische Klärung der reinen Mathematik immer wieder gehemmt und schliesslich unterbrochen haben“, führten Husserl ins Herz allgemein-philosophischer Probleme, auf einem Wege, der wiederum so ungemein bezeichnend ist für den ideell-philosophischen Zusammenhang der Mathematik und Metaphysik. In jenem Werk, das aus seinem langjährigen Ringen und Fortschreiten hervorgegangen ist, in den „Logischen Untersuchungen“ bekennt er einleitend [2]): „Besondere Schwierigkeiten bereitete mir die logische Durchforschung der formalen Arithmetik und Mannigfaltigkeitslehre [3]), dieser über alle Besonderheiten der speziellen Zahlen- und Ausdehnungsformen hinausreichenden Disziplin und Methode. Sie nötigte mich zu Erwägungen von sehr allgemeiner Art, welche sich über die engere mathematische Sphäre erhoben und einer allgemeinen Theorie der formalen deduktiven Systeme zustrebten.“

Allerdings scheint er sich auch wieder in Gegensatz zu stellen zur scholastischen Auffassung vom Wesen der Mathematik, wenn

---

[1]) a. a. O. S. 88. — [2]) Erster Teil (erste Auflage) Halle 1900.

[3]) Das ist bekanntlich der Ausdruck für die heutige Mengenlehre, wie ihn Cantor ursprünglich geprägt und lange beibehalten hat.

er zur Einsicht gekommen zu sein meint, „dass das Quantitative gar nicht zum allgemeinsten Wesen des Mathematischen gehöre". Es ist das die Auffassung von der Mathematik, die sich in der Mitte des 19. Jahrhunderts angebahnt hat und etwa in der pointierten Formulierung eines Bertrand Russel[1]) gipfelt: „Logik und Mathematik unterscheiden sich wie der Knabe und der Mann. Die Logik ist die Jugend der Mathematik, und die Mathematik ist das Mannesalter der Logik. ... Wenn jemand noch immer die Identität von Logik und Mathematik nicht anerkennen will, so können wir ihn herausfordern: Sage uns, wo deiner Meinung nach die Logik im Verlauf der Definitionen und Deduktionen der Principia Mathematica endet und die Mathematik beginnt? Jede Antwort muss ganz willkürlich sein."

Um die Antwort auf diese „Herausforderung" zu geben, kann sich die Scholastik zunächt auf einen Autor berufen, der einerseits den Russel'schen ‚Principles of Mathematics' sehr nahesteht, noch näher aber einem Leibniz und damit letztlich wieder scholastischen Grundgedanken. Louis Couturat legt sich in seinem Werke „Les Principes des Mathématiques" [2]) im 5. Kapitel, wo er vom Größenbegriff handelt, die Frage vor: „Stellt die Lehre von den Größen einen Teil der reinen Mathematik dar . . .? Die Antwort ist eine doppelte: Ja, wenn man die Mannigfaltigkeit von hypothetischen

[1]) Einführung in die Mathematische Philosophie. Deutsche Uebersetzung, besorgt von Gumbel und Gordon (mit Vorwort von David Hilbert). S. 196 f.

[2]) Deutsch von Carl Siegel. Leipzig 1908. Im Vorwort hebt Couturat hervor, sein Werk „verdanke seine Existenz dem Erscheinen von H. Bertrand Russels Meisterwerk, das denselben Titel führt. Im Prinzip sollte es nur eine Darstellung dieses Werkes sein . . ." Für seine — auch sachlich inneren — Beziehungen zu Leibniz hat der Bearbeiter von Inedita zur Logik Leibnizens (La Logique de Leibniz, d'apres de Mss. inedits. Paris 1901; Opuscules et Fragments inédits de Leibniz. Paris 1903) allenthalben Zeugnis abgelegt. Vgl. Bernhard Jansen, Leibniz erkenntnistheoretischer Realist. Berlin 1920. S. 2: „Louis Couturat (La logique de Leibniz d'apres des documents inédits) bedeutet zweifelsohne eine grossen Fortschritt in der Darstellung der leibnizischen Logik und Kombinatorik. Er zieht die mathematischen Lehren und Schriften stark für die Erklärung der philosophischen herbei. Dabei kommt er „sans le vouloir et presque malgré nous" zu dem überraschend neuen Ergebnis, daß die mathematisch orientierte Logik „était le coeur et l'âme de son système" . . . Die Zurückweisung der darin liegenden Uebertreibung siehe S. 18 ff. Jansen sieht in der leibnizschen Philosophie „die Synthese der aristotelisch-scholastischen, teleologisch gerichteten Methaphysik und der neuzeitlichen, mechanisch-mathematisch-rationalistischen Denkweise" (S. 76).

Größen betrachtet, welche man mit diesen und diesen Eigenschaften ausstattet; nein, wenn man die Mannigfaltigkeit der reellen und gegebenen Größen untersucht, welche diese Eigenschaften objektiv besitzen. Denn in dem erstern Falle sind die Postulate nur problematische Annahmen, von welchen man die logischen Konsequenzen ableitet, ohne die einen oder die anderen zu behaupten; im zweiten Falle jedoch werden die Postulate assertorische Sätze, tatsächliche (der Erfahrung oder Anschauung entnommene) Wahrheiten, und auch alle ihre Konsequenzen tragen den gleichen Charakter. Jedenfalls kann man nicht ohne irgendwelches erfahrungs- oder anschauungsmässige Datum das Vorhandensein irgendeiner Größengattung behaupten (einer andern als der Zahl): und in diesem Sinne ist es wahr, zu sagen, daß die reine Mathematik die Größe nicht kennt und einzig und allein auf dem Begriff der verallgemeinerten Zahl ruht. Doch darf man nicht vergessen, daß die Verallgemeinerung der Zahl, die sich heute vollständig unter einer rein logischen Form darstellt, ihren Ursprung und ihren Seinsgrund in der Betrachtung der Größen hat." [1])

Von dem Streit der Algebraiker und Geometer, vom Problem der restlosen Arithmetisierung der Geometrie zunächst abgesehen, erhebt sich zunächst für den scholastischen Philosophen die Frage, die auch in der Axiomatik der jüngsten Mathematik immer wieder aufgeworfen wird: vorausgesetzt, daß Raumstetigkeit exakt nur faßbar sei durch Zurückführung auf Stetigkeit der Zahlenreihe, diese Stetigkeit aber durch eine Erweiterung der „natürlichen" Zahlen erhalten wird, die einzig und allein mit raumfremden begrifflichen Vorstellungen arbeitet, ist damit der Begriff der Grösse als ein abgeleiteter auf den der reinen Zahl zurückgeführt? Seit der klassisch gewordenen Untersuchung von Dedekind: „Was sind und was sollen die Zahlen?" [2]) lautet die Antwort oft genug bestimmt bejahend: „Indem ich die Arithmetik (Algebra, Analysis) nur einen Teil der Logik nenne, spreche ich schon aus, dass ich den Zahlbegriff für gänzlich unabhängig von den Vorstellungen oder Anschauungen des Raumes und der Zeit, daß ich ihn vielmehr für einen unmittelbaren Ausfluß der reinen Denkgesetze halte." [3]) Gesetzt den Fall, daß die Dedekind, Kronecker, Poincaré, Minkowski . . . recht haben, wenn sie in den „ganzen Zahlen" den letzten Quell aller strengen

[1]) a. a. O. S. 131 f. — [2]) 1. Aufl. Braunschweig 1888.
[3]) a. a. O. Vorwort.

Mathematik sehen, aus dem letztlich alles abgeleitet werden kann und muß, so läßt das die scholastisch-philosophische Auffassung der Mathematik als Größenwissenschaft insofern unberührt, als dann heute zu sagen ist: die Art der diskreten und stetigen Größen scheidet nicht mehr Arithmetik und Geometrie, seit es gelungen ist, beiden eine übergeordnete Wissenschaft zu geben, die als Formalobjekt nur mehr die Ordnungsbeziehung „grösser, gleich, kleiner“ $\left(\gtreqless\right)$ zwischen gegebenen beliebigen Inhalten hat, wobei sich die gesetzmäßige Erfassung jener Grundbeziehung nicht mehr auf Anschauung stützt, sondern rein formal begrifflich geleistet wird. Folgt nun daraus, daß die Wissenschaft des zweiten Abstraktionsgrades im Sinne der aristotelischen Scholastik in reine Metaphysik aufgelöst wäre? Russel meint: „Man pflegte zu sagen, die Mathematik sei die Wissenschaft der „Quantität“. „Quantität“ ist ein unklares Wort. Um argumentieren zu können, wollen wir es durch das Wort „Zahl“ ersetzen. Aber die Behauptung, daß die Mathematik die Wissenschaft von der Zahl ist, wäre aus zwei verschiedenen Gründen unrichtig. Zunächst gibt es anerkannte Gebiete der Mathematik, die nichts mit Zahlen zu tun haben .... Andererseits konnte man .. einen grossen Teil von dem, was früher nur unter Zuhilfenahme der Zahlen bewiesen wurde, verallgemeinern.“ [1])

Und doch spürt jeder, dass die Reduktion so lange scheitern muss, als man noch irgend ein absolut Gegenständliches der Mathematik zur Bearbeitung überlässt, wie immer es dann zuhöchst benannt werden muss: Größe, Zahl oder Ordnungsbestimmtheit *jener bestimmten Art*, wie ich sie technisch noch so formal ins Symbol fasse. Schon die „makroskopisch“ ungleiche Art, wie extensive und intensive Größen sich der formal-mathematischen Behandlung zugänglich erweisen, läßt erkennen, daß der Quantität ein Absolutes zugrunde liegt, das sich nicht formal auflösen läßt. Der Formalismus mag „der Lebensnerv der Mathematik“ sein (Pasch), solange er nicht auf jene Spitze getrieben wird, wo er zur Sinnlosigkeit abbricht, bleibt die Mathematik eine gegenständliche Wissenschaft, die nicht aufgeht in den Formalismus einer mathematischen Logik — Logistik genannt.

Hier sind sehr lehrreich die Darlegungen eines neueren Phänomenologen der Mathematik, Moritz Geiger, der in seinem Buche

[1]) Einführung in die mathematische Philosophie S. 197.

über „Systematische Axiomatik der Euklidischen Geometrie" [1]) wohl unterschieden wissen will zwischen rein „technischer Axiomatik" und der „Wesensaxiomatik". Jede rein technische Axiomatik — deren — nach einem Wort von Poincaré — bekanntlich soviele im Prinzip möglich sind, wie es Weisen gibt, die Buchbestände einer Bibliothek verschieden zu registrieren, stützt sich auf rein formallogische Betrachtung und Symbolisierung von Elementen eines Systems. (Man denke an die rein formal gefassten „Systemdinge" der linearen, ebenen und räumlichen Geometrie als Dinge A B C . . . a b c . . . $\alpha\ \beta\ \gamma$ . . . in der Hilbertschen Axiomatik [2]). Wesensaxiomatik hingegen — deren es im Grunde nur eine geben kann, weil das Wesen ein Eines ist — hält fest an „inhaltlicher" Auffassung der mathematischen „Gegenstände". Sie gestattet sich selbstverständlich auch die Freiheit, die mathematischen Grundgebilde und Grundbeziehungen ihres „anschaulichen" Charakters — anschaulich im vulgären Sinn genommen — zu entkleiden. Aber sie bewahrt Fühlung mit einem Objekt und dessen Sachgesetz. Die Willkür der Axiome ist nicht bloß durch die formal-logisch-inneren Kriterien der Widerspruchslosigkeit und gegenseitigen Unabhängigkeit zum System möglicher Geltung geregelt, sondern zielt mit der „impliziten Definition" ihrer Gegenstände auf „Wesen" ab, die „sind" und von uns „wesensmäßig" erfaßt werden wollen. Die scheinbar schrankenlose Willkür des „Es sei . . . ." ist für jede „sinnvolle Axiomatik" gebunden durch den „mathematischen Takt", jene schwer faßbare Sinnbegabung für das tiefliegende, aber objektiv vorliegende Wesensgesetz.

Hier liegt die entscheidende Differenz zwischen philosophischer Einstellung auf reine Form oder auf die Sache und ihre gegenständliche Wahrheit. In einer neueren Darstellung formalistischer Axiomatik der Geometrie im Sinne Hilberts [3]) kommt das zu betontem Ausdruck: „Die räumlichen Verhältnisse werden gleichsam in die Sphäre des Mathematisch-Abstrakten projiziert, in welcher die Struktur ihres Zusammenhanges sich als ein Objekt des rein

[1]) Augsburg 1924. Dem tüchtigen Buch, das philosophisch ernst genommen werden muß, ist eine mehr genießbare Formelsprache zu wünschen, deren eigenwillige Art sich allerdings kaum wird ganz beheben lassen, eben weil sie eigene Wege geht.

[2]) Grundlagen der Geometrie. 6. unveränderte Auflage. Leipzig 1923.

[3]) Paul Bernays, Die Bedeutung David Hilberts für die Philosophie der Mathematik. Die Naturwissenschaften 1922, 93 ff.

mathematischen Denkens darstellt und einer Forschungsweise unterzogen wird, die nur auf die logischen Beziehungen gerichtet ist, unbekümmert um die Frage nach der sachlichen Wahrheit, d. h. um die Frage, ob die durch die Axiome festgelegten geometrischen Verknüpfungen sich in der Wirklichkeit (oder auch nur in unserer räumlichen Anschauung) vorfinden.“

Axiomatik ist doch zunächst nichts als eine Methode, wie Hilbert das selbst auf seinem Züricher Vortrag über „Axiomatisches Denken“ (1917)[1]) dargelegt hat. Aber Methode ist nicht der Gegenstand selber, wie es in einem anderen Wort des gleichen Forschers bei jener Gelegenheit nahegelegt scheint: „Alles, was Gegenstand des wissenschaftlichen Denkens überhaupt sein kann, verfällt, sobald es zur Bildung einer Theorie reif ist, der axiomatischen Methode und damit der Mathematik.“[2]) — Und doch ist durch die axiomatische Methode in ihrem Verlauf selber eine Grenze sichtbar geworden, die sich bis heute noch nicht hat umgehen lassen. Es ist das die unvermeidliche Annahme eines ‚Bezugssystems‘, wenn ich so sagen soll, in dem alle Zurückführung eines Axiomensystems auf „schon gesicherte“ gründet. *Δεῖ πού στῆναι*, sagt Aristoteles.

Nun liegt aber der Angelpunkt aller Systeme — auch die Tatsache zeugt eigentlich gegen den extremen Formalismus — in der Arithmetik (richtiger Analysis), deren axiomatische Begründung von Hilbert zwar schon lange als unumgänglich bezeichnet, bislang aber noch nicht als befriedigend lösbar hingestellt worden ist. Bernays schildert im Anschluß an Hamburger Vorträge Hilberts aus den letzten Jahren[3]) einen Versuch, auf dem Wege über den Logikkalkül die formale Geschlossenheit des Axiomensystems zu erreichen. „Durch diese Betrachtungsweise, in welcher die Absonderung des Spezifisch-Mathematischen von allem Inhaltlichen ihren Gipfelpunkt erreicht, gewinnt die Hilbertsche Ansicht von dem Wesen der Mathematik und der axiomatischen Methode erst ihren wirklichen Abschluß. Denn wir erkennen nunmehr, daß jene Sphäre des Mathematisch-Abstrakten, in welche die Denkmethode der Mathematik alles theoretisch Faßbare übersetzt, nicht diejenige des in-

---

[1]) Abgedruckt in Math. Annalen 78.

[2]) Sperrung von uns.

[3]) Die Naturwissenschaften 1922, 97 f. Die Grundgedanken davon schon in Anhang VII der „Grundlagen der Geometrie“. Heidelberger Kongreßvortrag (1904) „Ueber die Grundlagen der Logik und der Arithmetik“.

haltlich Logischen, sondern vielmehr das Gebiet des reinen Formalismus ist. Die Mathematik erweist sich als die allgemeinste Lehre von den Formalismen, und indem wir sie als solche erfassen, wird auch ihre universale Bedeutung ohne weiteres klar." [1])

Aber hier liegt eben die Uebertreibung, die das objektiv gegebene mathematische Grundphänomen künstlich ignoriert. Man arithmetisiere alle Mathematik und formalisiere die Grundgebilde und Grundbeziehungen soweit man es vermag, es verbleibt ein gegenständlicher Rest, dessen Eigenart gewiß noch der genaueren philosophischen Behandlung bedarf. Wenn aber die Mathematik scheinbar die Grenzen alle niedergerissen hat, in die sie von der älteren Philosophie gewiesen worden war, so darf man nicht vergessen, dass die Mathematiker der jüngsten Zeit — von den Philosophen meist im Stich gelassen — selber die Erörterung ihrer wissenschaftstheoretischen Prinzipien an sich gerissen haben, ohne sich vielfach um die philosophische Tragweite bezw. Untragbarkeit ihrer Aufstellungen klar zu sein. Philosophie und Mathematik haben sich einander im 19. Jahrhundert leider immer mehr entfremdet zum Nachteil für beide Teile. Es fehlen uns die Männer wie ein Bolzano, der noch so ein letzter war, der sich auf dem Gebiet der Philosophie und Mathematik frei hin- und herbewegte. [2])

Unter den neueren Philosophen der Mathematik bewahrt sich selbst ein Couturat — trotz seiner leibnizisch-russelschen Hinneigung zur Logisierung — noch immer einen suchenden Blick für

---

[1]) a. a. O. S. 98.

[2]) Es ist bezeichnend, daß die an Bolzano anknüpfende Phänomenologie sich als erste — außerhalb der aristotelisch gebliebenen Scholastik — auf die geschmähte scholastische Intuitionsgrundlage der Mathematik zurückbesann. Man denke an die wertvollen Arbeiten zur Philosophie der Mathematik aus jenem Kreis, wie sie uns die Husserl, Geiger, Oskar Becker, Hans Lipps, Hermann Weyl und andere mehr geschenkt haben. Natorps reiches Schrifttum zu den erkenntnistheoretischen Grundlagen der Mathematik bleiben gewiss wertvoll auch heute, wo man wieder mehr Sinn und Blick hat für Gegenständlich-Absolutes in der Erkenntnis und nicht über platonische εἶδος-Lehre das Motto schreibt: das Sein gilt nichts, Methode ist alles. Das gesamte neukantische Genus philosophisch-mathematischer Betrachtung erweist sich als Fiktion, deren Konsequenz zur Bildung „unnatürlicher" Begriffe führt wie die des aktuell Unendlich-Kleinen (siehe Fraenkel, Einführung . . . S. 160 ff.) oder fiktionalistischen Scheinlösungen mengentheoretischer Schwierigkeiten wie jüngst noch in W. Dieck's Aufsatz über die Paradoxien der Mengenlehre (Annalen der Philosophie. herausg. von Raym. Schmidt. 5 (1926) 43 ff.)

die Gegenstandssphäre der Mathematik. Auch nach den neuesten Formalisierungsversuchen, meint er, empfehle es sich, „die irrationalen Zahlen und reellen Zahlen überhaupt, als Rechnungsarten mit Größen oder als Beziehungen resp. Verhältnisse zwischen Größen derselben Gattung (!) aufzufassen".[1]) Das aber ist just der Abstraktionstheorie der Scholastik entsprechend, die wohl unterscheidet zwischen einem unum, quod nihil addit supra respectivum ens, und einem unum, quod est principium numeri.[2]) Ebenso findet man bei Couturat einen — wenn auch versteckten — Ansatz zu genauerer Bestimmung des Gegenstandsbereiches dieser „modernen" Mathematik. Gestützt auf die axiomatische Grundlegung bei Burali-Forti einerseits und Bertrand Russel andererseits, stellt er gleichsam eine obere und untere Grenze für den mathematischen Bereich der Größe auf: die Postulate Russels stellen da „das Minimum der Bedingungen dar, denen eine Klasse genügen muss, um den Namen der Größenklasse zu verdienen", während die acht Burali-Forti'schen Postulate zusammengenommen „nur von dem vollständigsten und vollendetsten Größentypus (den stetig meßbaren Größen) befriedigt werden".[3])

Es gibt eben in der Mathematik doch so etwas Objektiv-gegenständliches, „das der liebe Gott gemacht hat". Und wenn ein Radikaler aus der vordersten Linie der mathematisch-philosophischen Forschung, H. Weyl[4]) mit aller Energie daran festgehalten wissen will, „dass die Mathematik ganz und gar, sogar den logischen Formen nach, in denen sie sich bewege, abhängig sei vom Wesen der natürlichen Zahl", so hat ihn sein phänomenologisches Gefühl zur Intuition eines Gegenständlichen angeleitet, wie es die Scholastik als das Gebilde mittlerer Abstraktion bezeichnet.

Es würde uns diesmal zu weit führen, auf die Spaltung der modernen Mathematiker in klassische Formalisten — (unter Führung etwa eines David Hilbert) — und „revolutionierende" Intuitionisten — (unter Führung vor allem von Brouwer und Weyl) — einzugehen.[5])

---

[1]) a. a. O. S. 124. (Die Sperrung ist von uns beigefügt).

[2]) Vgl. dazu etwa S. Th. de pot. qu. 11 a. 7 (per totum).

[3]) a. a. O. S. 131.

[4]) Ueber die neue Grundlagenkrisis der Mathematik (Math. Zeitschr. 10 [1921]).

[5]) Kurz und treffend findet man das Wesentliche in der allbeliebten „Einführung in die Mengenlehre" von A. Fraenkel (2. Aufl. Berlin 1923 S. 164—176). Daselbst auch die neuere Literatur zur hochaktuellen, philosophisch bedeutsamen

Aber die treibenden philosophischen Kräfte, die da zum Austrag kommen, hat keiner so lebendig geschildert wie Henri Poincaré in seinen „Letzten Gedanken“;[1]) „Die Forscher beider Richtungen haben entgegengesetzte geistige Veranlagungen. Die, die ich Pragmatiker genannt habe,[2]) sind Idealisten, die Cantorianer[3]) Realisten... Den Cantorianern zufolge scheinen die mathematischen Größen eine unabhängige Existenz zu besitzen. Sie schaffen die Geometrie nicht, sie entdecken sie. Diese Objekte also existieren sozusagen ohne zu existieren, da sie sich zu reinen Essentien verflüchtigen. Da nun naturgemäß die Anzahl dieser Objekte unbeschränkt ist, so sind die Anhänger des mathematischen Realismus noch in viel höherem Grade Infinitisten als die Idealisten ... Es hat stets Weltanschauungen entgegengesetzter Richtung gegeben, und es hat nicht den Anschein, daß diese Richtungen im Begriffe sind, sich zu vereinigen. Es ist dies zweifellos so, weil es verschiedenartige geistige Veranlagungen gibt und weil wir daran nichts ändern können. Es ist daher auch keine Hoffnung vorhanden, dass zwischen den Pragmatikern und den Anhängern der Cantorschen Richtung eine Uebereinstimmung zustande kommt. Die Menschen verstehen einander nicht, weil sie nicht dieselbe Sprache sprechen, und diese Sprachen sind es, die nicht miteinander übereinstimmen.“ Darin liegt ein Appell, eine Herausforderung, ein Vorwurf, eine Schmähung der Philosophie, je nachdem man es spürt. Jedenfalls gilt es, sich wieder auf langvergessene Aufgaben der Philosophie zu besinnen, die eingangs als ein Desiderat der scholastisch-aristotelischen auch von sich aus sich schon ergeben hatte. „Les notions prémières des sciences doivent être des notions métaphysiques“, betont ein neuerer Autor der französischen Scholastik.[4]) Und ganz in dem hier dargelegten Sinne

---

Kontroverse. Für philosophische Interessenten weiterer Kreise hat Weyl auch in der neuen Erlanger Zeitschrift „Symposion“ 1 (1925) Heft 1 das Wort ergriffen.

[1]) Deutsch von Karl Lichtenecker. Leipzig (o. J.) S. 159 ff.

[2]) d. h. die bei uns (nach Brouwer) als Intuitionismus bezeichnete Richtung.

[3]) Im weiteren Sinne gemeint als diejenigen alle, die gleiche Tendenzen, wenn auch auf ganz unabhängige Art vertreten (siehe die Erklärung Poincaré's S. 157).

[4]) F. Warrain, Les Notions Premières Des Mathematiques et La Realité. Rev. de Philos. 25 (1925) p. 463. Uebrigens scheint uns die sachkundige Arbeit doch zu stark unter dem Eindruck zu stehen, als ob die neuere Mathematik nun doch einmal hoffnungslos im Formalismus sich verfangen habe.

schliesst er seine Darlegungen mit den Worten: „Ainsi, loin d'être des formes vides de tout contenu, les mathématiques ont un contenu réel, contenu qui est en quelque sorte la diffraction du concret, objet de l'ontologie. Il y a donc lieu de rechercher la signification métaphysique des notions mathématiques. Mais le métaphysicien et le mathématicien considèrent les notions mathématiques a des points de vue opposées. Le mathématicien vise au maximum de génerali-sation et de complexité; le métaphysicien s'efforce de dégager ce qu'il y a de radical et d'essentiel dans les notions et les relations mathématiques; il s'attachera aux formes les plus simples pour découvrir ce qu 'il y a de réellement primordial". [1])

---

[1]) a. a. O. S. 472.