Ist die Arithmetik ein logisch korrektes Lehrgebäude?[1]

(Untersucht in Anlehnung an die Erweiterungen des Zahlbegriffs)

Von Dr. Heinrich Dietrich, Lippstadt.

In den Annalen der Philosophie Band III. 1927 Heft 1—3 hat Professor Wilhelm Koppelmann, Münster, über obiges Thema eine Abhandlung geschrieben, in der er zu dem Resultat kommt, daß die Arithmetik kein logisch-korrektes Lehrgebäude ist. W. Koppelmann entwickelt den Zahlbegriff nach Gesichtspunkten, die dem heutigen Stande des mathematischen Erkennens nicht mehr entsprechen, sondern nur noch historische Bedeutung haben. Nur die ganzen Zahlen haben nach Koppelmann einen logischen Sinn, weil sie sich auf die Dinge, die Einheiten in der Natur anwenden lassen. Schon die Brüche stellen nach seinen Ausführungen eine logisch unzulässige Erweiterung des Zahlbegriffs dar; denn in der Natur gäbe es nichts Einfaches, sondern nur Zusammengesetztes. Von einem Fünftel Menschen oder einem Zehntel Staat etc. zu sprechen, habe keinen Sinn. Nur auf die Maßeinheiten könnten die Brüche angewandt werden. Die graphische Darstellung der Zahlen auf der Zahlengeraden bezeichnet Koppelmann als etwas Unzulässiges, weil hier etwas in den Begriff der Zahleneinheit hineingetragen werde, was diesem Begriff, vom erkenntniskritischen Standpunkte aus betrachtet, wesensfremd sei. Auch die negativen Zahlen seien vom

[1]) Die nachfolgende Abhandlung ist eine Entgegnung auf einen Artikel von Professor W. Koppelmann, der an der Universität zu Münster Vorlesungen hält über Philosophie. In seiner Arbeit macht W. K. den Mathematikern Vorwürfe, daß sie es mit der logischen Begründung ihrer Begriffe nicht genau nähmen und „den logischen Sachverhalt vielfach verdunkelten". Mit Ausnahme der ganzen Zahlen betrachtet W. K. alle Zahlen als logische Fiktionen, die von den Mathematikern lediglich erfunden seien, damit sie ihre Rechengesetze konsequent durchführen könnten, die aber vom erkenntniskritischen Gesichtspunkte aus kein Daseinsrecht hätten. Die Arbeit fordert zu starkem Widerspruch auf. Eine Entgegnung in öffentlicher Form ist eine Notwendigkeit, weil die mathematische Begriffsbildung an manchen Stellen der Arbeit geradezu der Lächerlichkeit preisgegeben wird.

logischen Standpunkte aus abzulehnen. Nur um jede Subtraktion z. B. $2-5$ durchführen zu können, hätte man rein logisch betrachtet kein Recht, einfach neue Zahlen einzuführen. Für die Erkenntnis der Wirklichkeit hätten negative Zahlen keinerlei Bedeutung, da negative Größen in der Wirklichkeit nicht vorkämen. W. Koppelmann zeigt dann, welche Schwierigkeit vom rein formalen Standpunkte aus beim Rechnen mit negativen Größen bestehe. Die Rechnungen $2-(-3)=+5$ und $(-2).(-3)=+6$ enthielten große formale Schwierigkeiten. Die ihnen zu Grunde liegenden Rechenregeln seien unbeweisbar. Sie seien nur willkürliche Festsetzungen, die man aus Zweckmäßigkeitsgründen getroffen habe, um die Allgemeingültigkeit der Rechengesetze zeigen zu können. Dann kommt Koppelmann auf den Wurzelbegriff. $\sqrt{25}$ habe zwei Werte $+5$ und -5. Die negative Lösung hierbei sei sinnlos und unbrauchbar, weil sie sich nicht auf die Dinge anwenden ließe, und wenn sie sinnlos sei, könne sie auch nicht richtig sein.

Wenn $\sqrt{25}=+5$ und -5 sei, dann müsse auch $-5=+5$ sein, wenn das Gleichheitszeichen die Gleichheit zweier Größen bedeuten solle. Nur da, wo das Minuszeichen seiner ursprünglichen Bedeutung als Subtraktionszeichen entkleidet und zur Bezeichnung der Lage und Richtung, wie in der Analytik, verwendet werde, gewännen die negativen Werte der Wurzeln Sinn und Bedeutung. Koppelmann kommt dann zu den imaginären und komplexen Zahlen. Ehe jedoch auf das Weitere in der Abhandlung eingegangen wird, soll das bisher Entwickelte kritisch untersucht werden.

Grundsätzliches zu der Untersuchungsmethode Koppelmanns.

Es ist ein grundsätzlicher Fehler, die Arithmetik wie die Mathematik überhaupt als eine bloße angewandte Logik aufzufassen. Die Mathematik ist keine bloße Logik, wohl aber ist die Logik eine Art Mathematik.

Die mathematischen Begriffe sind nicht immer allein nach logischen Prinzipien, wie sie die gewöhnliche Logik besitzt, aufzustellen, sondern vielfach kommt noch etwas Schöpferisches, Intuitives hinzu, was der reinen Logik fremd ist. Die reine Logik umfaßt die Gesetze des Denkens, nach denen die Wirklichkeit erkannt wird. Die reine Mathematik umfaßt die Gesetze des Denkens über Größenbeziehungen, die sich zum Teil über die Wirklichkeit erheben. Die Anwendung der Begriffe und Gesetze auf die Wirklichkeit ist eine sekundäre Frage. Zahlenbegriffe, die sich auf die Dinge nicht anwenden lassen, sind deshalb nicht sinnlos vom erkenntniskritischen Standpunkte aus, sondern sie haben zunächst ihren Sinn und ihre Wahrheitsberechtigung in sich selbst. Wie weit sie auf die Wirklichkeit anwendbar sind, beschäftigt den Mathematiker erst an zweiter Stelle. Die mathematischen Begriffe sind im allgemeinen nicht durch die Wirklichkeit gegeben, sondern sie werden geschaffen, intuitiv, indem etwas zunächst willkürlich Erscheinendes hinzugenommen wird, dessen Bedeutung erst später erkannt wird. Dies Schöpferische, Willkürliche, ist geradezu das, was die Mathematik so gedankenreich macht. Eine eigene Schöpfung der Mathematik ist der Grenzprozeß, ein Verfahren, welches die Logik überhaupt nicht besitzt, das aber für die Mathematik so überaus fruchtbar ist. Nach Koppelmann werden die Begriffe auf die in der Wirklichkeit bestehenden Einheiten beschränkt. So sind z. B. Mensch, Uhr, Staat, Buch u. s. w. Dinge, die eine bestimmte Anzahl Merkmale umfassen. Die Synthese dieser Merkmale zu den durch die Wirklichkeit gegebenen Einheiten nennt Koppelmann Begriff. Damit können aber Begriffe nur von Dingen existieren, die naturgegebene Einheiten darstellen. Die Abstrakta können in diesem Falle nur dann Begriffe sein, wenn sie sich aus der Wirklichkeit ableiten lassen; z. B. Tugend, Tapferkeit, Güte, Liebe etc. sind Begriffe, weil sie sich aus der ethischen Seite des Menschenlebens ergeben. Abstrakta, welche sich nicht aus der Wirklichkeit ergeben, sind darnach keine Begriffe. Bei dieser Begriffsauffassung kann man zu der Ueberzeugung kommen, daß nur die ganzen Zahlen logisch berechtigt sind. Diese Begriffsdefinition ist jedoch für die mathematische Gedankenwelt zu eng. Unter Begriff hat man hier die Summe der Wesensmerkmale einer Größe zu verstehen. Jeder Begriff, der keine Merkmale umfaßt, die einander widersprechen, ist erkenntniskritisch berechtigt. Daß der Begriff auf die Wirklichkeit anwendbar sei, das ist zunächst nicht notwendig.

Die ganzen Zahlen und die Brüche.

Selbst, wenn man nur die engere Definition des Begriffs, wie sie Koppelmann auf den Zahlenbegriff anwendet, zuläßt, so sind doch so weitgehende Folgerungen, wie sie W. Koppelmann zieht, nicht berechtigt. In diesem strengen Sinne wären selbst die ganzen Zahlen logisch nicht berechtigt; denn die ganzen Zahlen als solche kommen doch auch nicht in der Wirklichkeit vor. Sicher existieren nur 2 Menschen, 3 Uhren etc. Gerade das, was Koppelmann nicht zulassen will, das fehlt seiner Auffassung vom Zahlbegriff. An einer Stelle sagt Koppelmann, daß der Begriff keine Beziehung zwischen den Dingen darstellen dürfe. Das ist aber gerade der Fehler; denn Zahlen sind nichts als Größenbeziehungen. So kommt die Zahl 3 z. B. dadurch zustande, daß ich 3 Einheiten irgendwelcher Art in Beziehung setze zu einer Einheit derselben Art. Die Zahl 3 ist demnach nichts als das Symbol für das Größenverhältnis von drei gleichen Dingen zu einem dieser Dinge. Man kann die Zahl 3 auch auffassen als die Synthese von 3 Zahleneinheiten ohne Bezugnahme auf Einzeldinge. Sobald ich aber die Zahl 3 auf die Wirklichkeit anwende, dann drückt die Zahl 3 eine Größenbeziehung aus. Dabei ist das Wort Größe nicht zu deuten als Raumgröße, sondern als Begriffsgröße in Rücksicht auf Inhalt und Umfang. Auch der Bruch ist eine Beziehungsgröße, wenn ich ihn mit der Wirklichkeit in Zusammenhang bringen will. $\frac{2}{3}$ kann ich einmal auffassen als das Verhältnis von 2 gleichen Dingen zu 3 Dingen derselben Art. Anderseits kann ich $\frac{2}{3}$ auch als einen bestimmten Teil der Zahleneinheit auffassen. In diesem Sinne kann ich $\frac{2}{3}$ nicht auf naturgegebene Einheiten anwenden, wohl aber auf Dinge, die teilbar sind wie die Maßeinheiten und alle Raumgrößen z. B. die Atome.

Die negativen Zahlen.

Ähnlich ist es mit den negativen Zahlen. Will man relative Größen, z. B. Höhenunterschiede durch Zahlen messen, so kann man das nur durch solche Zahlen, welche das Merkmal dieser Beziehungsgröße an sich haben. Eine Höhe hat nur Sinn in bezug auf eine Normalhöhe. Sie ist ferner eine gerichtete Größe. Um solche gerichtete Größen messen zu können, muß man Zahlen schaffen, welche nicht nur den Charakter einer absoluten Zahl haben, sondern es muß auch das Merkmal der Richtung damit verknüpft werden. Das geschieht durch Hinzunahme des Vorzeichens. So wird der Zahlbegriff erweitert, indem man den geometrischen Begriff der Richtung mit der absoluten Zahl verknüpft. Hier liegt das Schöpferische, was der reinen Logik fremd ist, das aber zu Begriffen führt, die ihren Wahrheitsgehalt dadurch bekunden, daß sie sich auf wirkliche Dinge anwenden lassen. Zwar gibt es keine (-2) Menschen, wohl aber eine Höhe $(+2)$ oder (-2), nachdem man eine Normalhöhe als Nullhöhe und eine positive Richtung festgelegt hat. Die entgegengesetzte Richtung wird dann als negative bezeichnet. Damit hat auch die Null ihre Berechtigung als Zahl erhalten. Sie bildet die Grenze zwischen den positiven und negativen Zahlen. Sie hat als Grenzbegriff aufgefaßt auch den Sinn einer Größe. So stellt z. B. die Zahlenfolge: $1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{8};\ \frac{1}{16}$ usw. einen Grenzwert dar, der gleich 0 ist. Dadurch, daß man die negativen Zahlen begrifflich festlegt, hat man auch die Existenzberechtigung der Null erwiesen.

Wenn wir die Zahlen auf der Zahlengeraden darstellen, dann gehen wir von einem beliebigen Punkte aus, dem wir die Null zuordnen und setzen zunächst für die Gerade einen positiven Sinn fest. Dann denken wir uns von Null aus nach jeder Seite hin Streckeneinheiten abgetragen und ordnen den Endpunkten der abgetragenen Strecken auf der einen Seite die positiven und auf der andern Seite die negativen Zahlen zu. Damit sind die relativen Zahlen graphisch dargestellt. Die Zahl (-3) wird z. B. durch einen von Null aus sich erstreckenden Vektor, der nach der negativen Seite hin gerichtet ist und die absolute Länge von 3 Streckeneinheiten besitzt, dargestellt.

Zu sagen $5-7$ sei nur deshalb gleich -2 weil man keine andere Möglichkeit habe, das Fehlender 2 Einheitem auszudrücken, oder man habe die negativen Zahlen nur deshalb erfunden, um die Subtraktion für jeden Fall durchführen zu können,ist nicht richtig. Die negativen Zahlen haben sich viel mehr aus dem Studium relativer Größen, wie sie die Wirklichkeit darbietet, ergeben und die Allgemeingültigkeit der Subtraktion ist eine Folge der Einführung der aus der Anschauung sich ergebenden relativen Größen, wenn auch der historische Weg der umgekehrte ist. Aus $5+(-7)=-2$, welches wieder geometrisch ableitbar ist, ergibt sich $5-7=-2$. Dies ist aber nur eine kürzere Schreibweise.

Das Rechnen mit relativen Größen.

Die Rechengesetze mit relativen Zahlen ableiten zu wollen, ohne Bezugnahme auf ihren geometrischen Charakter ist falsch. Wenn dann behauptet wird, daß die Geometrisierung der Zahl etwas Wesensfremdes in den Begriff der Zahl hineinbringe, so stimmt das insofern nicht, weil es letzten Endes überhaupt falsch ist, die Zahlenwelt für sich betrachten zu wollen. Zahlen sind eben nicht etwas für sich Existierendes, sondern Ausdrucksmittel für Größenbeziehungen wirklicher und vorgestellter Größen. Dem Addieren entspricht geometrisch ein Weiterschreiten. $+5+(-7)=-2$. Soll zu $+5$ die Zahl (-7) addiert werden, so schreitet man von $+5$ aus vorwärts um (-7) Einheiten d. h. um eine Größe, die einen negativen Sinn hat. Man muß deshalb den Blick nach der negativen Seite der Zahlengeraden richten und dann um 7 Zahleneinheiten weiter schreiten. Man kommt dann zur Zahl (-2). Dem Subtrahieren entspricht geometrisch ein Rückwärtsschreiten. $(+5)-(-7)=+12$. Hier muß man rückwärtsschreiten von $(+5)$ aus um 7 Einheiten mit dem Blick zur negativen Seite der Zahlengeraden. In dieser Weise sind die Rechengesetze mit relativen Zahlen heute abzuleiten. Die rein formale Ableitung hat nur noch historische Bedeutung. Die obige Ableitungsart entspricht erstens dem geometrischen Charakter der relativen Zahlen und hat zweitens den Vorzug, anschaulich zu sein. Von einer Nichtbeweisbarkeit der Rechengesetze mit relativen Zahlen kann nur die Rede sein, wenn man den geometrischen Charakter der relativen Zahlen verkennt und sie als eine bloße formale Fiktion ansieht, die man ersonnen hat, um die Subtraktion $a-b$ auch für die Fälle durchführen zu können, wo $b>a$ ist.

$(-a).(-b)=+ab$ ist nach Koppelmann unbeweisbar. Diese Behauptung stützt sich darauf, daß es für unberechtigt erklärt wird, das Gleichheitszeichen in wechselndem Sinne von „gleich" und „bedeutet" zu gebrauchen. $(-a).(-b)=+ab$ wird aus dem Gesetze der Zahlenentwicklung für die Werte der Produkte abgeleitet, nicht nach formalen Gesichtspunkten.

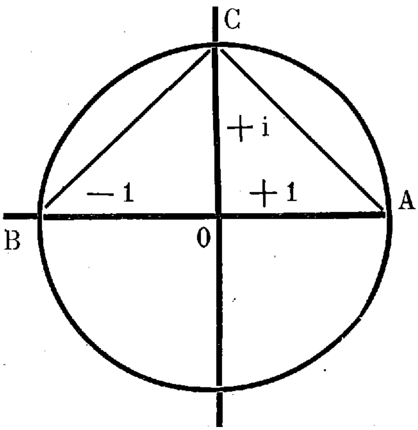
Die Zahl ist als ein Ausdrucksmittel für Größenbeziehungen anzusehen. In diesem Sinne sind auch $\sqrt{25}$ oder 3^4 oder $\lg^{10}2$ Zahlen und nicht nur Ausdrücke, die etwas bedeuten sollen. Das Wort „bedeutet" wird nur solange angewandt, bis der Schüler den Zusammenhang, den sie ausdrücken sollen, erfaßt hat.

3^4 ist nur ein anderes Ausdrucksmittel für 81, genau wie bei $2+3=5$ beide Seiten verschiedene Ausdrucksformen sind für gleiche Werte. Das Gleichheitszeichen ist in der Mathematik überall da berechtigt, wo eine Gleichheit dem Werte nach vorhanden ist. Die Gleichheit braucht sich nicht auf die Form zu beziehen. $3^4=81$. Hier ist das Gleichheitszeichen ebenso berechtigt wie in $3^4=3\cdot3\cdot3\cdot3$; denn auf beiden Seiten stehen nur verschiedene Ausdrucksformen für gleiche Werte und 3^4 bedeutet nicht nur eine Zahl, sondern ist eine Zahl, genau wie jeder Bruch ein erweiterter Zahlbegriff ist. Dasselbe ist von den Zahlenausdrücken zu sagen, die durch Umkehrung des Potenzierens entstehen. Ausdrücke wie $\sqrt{25}$ oder $\lg^{10}2$ sind Zahlen; deshalb sind auch die Identitäten berechtigt: $(\sqrt{25})^2 = 25$; $10^{\lg^{10}2} = 2$; $\sqrt{25}$ **ist** die Zahl, deren Quadrat gleich 25 ist. $\lg^{10}2$ **ist** die Zahl, die mit 10 als Basis potenziert 2 ergibt. Bleibt man bei der Auffassung stehen, daß $\lg^{10}2$ nur den Exponenten bedeutet, der mit 10 potenziert gleich 2 ist, so wird man die Identität von $10^{\lg^{10}2} = 2$ nicht begreifen, weil man $\lg^{10}2$ nicht als die Zahl auffaßt, die mit dem Exponenten identifiziert werden muß.

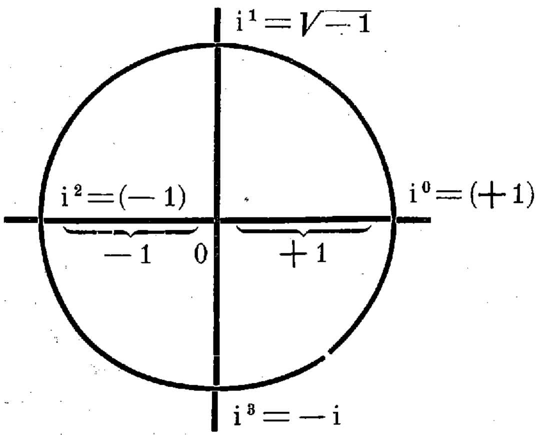
Die imaginären und komplexen Zahlen.

Man muß die Zahlen als Ausdrücke für Größenbeziehungen betrachten. Wie alles Mathematische den Charakter einer Funktion hat, so auch die Zahl. Die Erweiterung des Zahlbegriffs geschieht dadurch, daß zwischen bekannten Zahlen neue Beziehungen hergestellt werden oder aber dadurch, daß neue Merkmale mit bekannten Zahlen verknüpft werden. Diese neuen Merkmale können auch geometrischer Natur sein. Wie die relativen Zahlen durch Verknüpfung des Richtungsmerkmals mit den absoluten Zahlen entstanden sind, so müssen wir uns auch die imaginären Zahlen durch Verknüpfung eines geometrischen Faktors, eines sogenannten Drehfaktors, mit den relativen Zahlen entstanden denken. Die begriffliche Natur der imaginären Zahlen läßt sich aus rein arithmetischen Beziehungen allein nicht ableiten. Die imaginären Zahlen haben den Mathematikern nur solange Schwierigkeiten gemacht, als man sich bemühte, sie durch reelle Zahlen auszudrücken. Bei der von Cardano gestellten Aufgabe, 40 in zwei Faktoren zu zerlegen, deren Summe $= 10$ ist, liegt die „Unsinnigkeit" nicht in der Lösung, sondern in der Aufgabe, falls man reelle Zahlen als Lösungswerte verlangt. Die Darstellung von i, welche Koppelmann bringt, ist falsch. Danach soll i^2 durch Multiplikation von (-1) mit $(+1)$ entstehen. Hier ist der Fehler genau derselbe wie bei den negativen Zahlen. W. Koppelmann sagt, wenn $i^2 = (-1)(+1)$ ist, und die Größe i sich als mittlere geometrische Proportionale zwischen den Strecken 0A und 0B nach nebenstehender Figur auffassen ließe, dann müßte auch die Addition der beiden Strecken zu einem richtigen geometrischen Resultate führen. $(+1) + (-1)$ ist aber gleich 0, was unmöglich als richtiges Resultat für den Durchmesser gedeutet werden kann. W. Koppelmann übersieht, daß auch i eine Vektorgröße ist, und daß die Länge des Durchmessers in bezug auf den

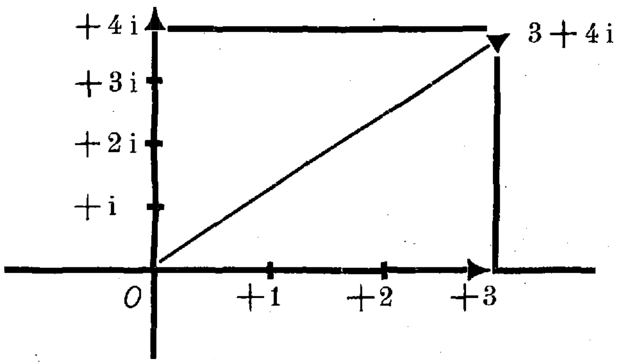
Punkt 0 in der Tat gleich Null ist. Man kann unmöglich bei der Multiplikation und Addition gerichteter Größen als Resultat eine absolute Größe erwarten, wie W. Koppelmann es verlangt. Sowohl die negativen Zahlen wie auch die imaginären sind als Vektorgrößen aufzufassen. Man kann einen Zusammenhang zwischen den relativen und komplexen Zahlen nur dadurch herstellen, daß man auf ihre Vektornatur Rücksicht nimmt. Gauß hat diese Größen folgendermaßen dargestellt. Dreht man eine Strecke um 180°, so wird sie negativ, erscheint also mit dem Faktor -1 behaftet; dreht man sie nochmals um 180°, so wird sie positiv, sie scheint mit dem Faktor $(-1) . (-1) = (-1)^2 = 1$ behaftet. Darnach läßt sich der Faktor (-1) als ein Drehfaktor auffassen, der eine Strecke um einen gestreckten Winkel dreht. Darnach muß der Drehfaktor,



mit dem eine Strecke behaftet ist, wenn sie im positiven Sinne um 90° gedreht wird, so beschaffen sein, daß er in die zweite Potenz erhoben $= -1$ ist. Bezeichnet man ihn mit i, so ist $i^2 = -1$. Es ist darnach: $i^0 = 1$; $i^2 = -1$; $i^3 = -i$; $i^4 = +1$. Die imaginäre Zahl 2 i ist demnach eine Zahl, die man aus der Zahl $+2$ dadurch erhält, daß man den Vektor $+2$ in positivem Sinne um 90° dreht. Man erhält dann einen neuen Vektor auf der durch den Nullpunkt der Zahlengeraden gehenden Senkrechten von der Größe $+2$ **i**. Diese Zahl enthält drei Merkmale, ein Vorzeichen, eine absolute Zahl und den Faktor i. Der Zahlbegriff der relativen Zahl ist hier insofern erweitert, als noch ein weiteres geometrisches



Merkmal hinzugenommen ist, ein Drehmoment. Entsprechend lassen sich nun auch die komplexen Zahlen darstellen, z. B. die Zahl $3 + 4i$. Aus den Vektoren $+3$ und $+4i$ entsteht nach dem Gesetze der Addition gerichteter Größen ein neuer Vektor, dessen Endpunkt die Zahl $(3 + 4i)$ zugeordnet wird.



Die irrationalen Zahlen.

Professor W. Koppelmann erhebt in seiner Abhandlung in dem Kapitel, welches obige Ueberschrift trägt, Bedenken dagegen, daß $\sqrt[2]{2}$ eine irrationale Zahl genannt werde. Nur der unendliche Dezimalbruch, dem $\sqrt{2}$ gleich sei, verdiene diesen Namen. $\sqrt{2}$ sei nicht als Zahl zu bezeichnen. Hiergegen ist zu sagen, daß jede Zahl eine Größenbeziehung ist und deshalb auch die Größenbeziehung $\sqrt[2]{2}$ Zahl genannt werden darf. $\sqrt[2]{2}$ ist der Grenzwert der irrationalen Zahl, der durch die Größenbeziehung $\sqrt[2]{2}$ dargestellt wird, deshalb ist der wirkliche Wert der irrationalen Zahl gar nicht anders zu bezeichnen. Sodann erhebt Koppelmann Zweifel an der wirklichen Existenz des Zahlenkontinuums. Die zwischen den rationalen Zahlen liegenden Lücken werden durch die irrationalen Zahlen ausgefüllt. Diese letzte Auffassung ergäbe sich aus der Teilung der Zahlengeraden und sei deshalb zu beanstanden, weil bei dem Nachweise der Existenz der Irrationalzahl die Zahleneinheit mit der Größeneinheit vermengt werde. Das sei aber nicht berechtigt vom logischen Standpunkte aus. Hierauf ist zu sagen, daß die begrifflich erweiterte Zahl sich nicht vom Größenbegriff trennen läßt, und daß der Nachweis der Existenz der Irrationalzahlen im Bereiche der Rationalzahlen sich auch unabhängig von der Zahlgeraden führen läßt. Der Zahlenschnitt setzt beim Nachweise der Irrationalzahl im Bereiche der Rationalzahlen keine geometrische Darstellung voraus. In einer nun folgenden Bemerkung findet Koppelmann es als nicht richtig, den Punkt als ein Element des

Raumes zu bezeichnen, da man aus Punkten, wegen ihrer Nulldimensionalität nichts aufbauen könne. Wird der Punkt als Grenze einer Ebene (Fläche), die Ebene (Fläche) als Grenze eines Raumteils aufgefaßt (Killing, Elementarmathematik), dann lassen sich aus den andern Elementen ebenso wenig Gebilde von höherer Dimensionalität aufbauen. Ohne den in der gewöhnlichen Logik nicht existierenden Grenzbegriff sind die Elementargebilde der Geometrie nicht festzulegen. Die Dimension der einzelnen Gebilde ergibt sich aus der Teilbarkeit. Jeder Körper (ob Kugel oder Rechtecker) ist dreimensional, weil man drei Teilungen vornehmen muß, um vom Körper zum Punkt zu gelangen. Bei der ersten Teilung des Körpers entsteht als gemeinsame Grenze der beiden Körperteile die Fläche (Ebene). Die Ebene liefert bei ihrer Teilung die Linie (Gerade) und die Linienteilung ergibt den Punkt. Legt man diese Betrachtung zu Grunde, dann ist nicht einzusehen, inwiefern der Punkt eine Sonderstellung unter den Grundgebilden einnehmen soll.

Die unendlich große und die unendlich kleine Zahl.

Ist $y = x^2$, so wird $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$ und $\frac{dy}{dx} = 2x$. W. Koppelmann beanstandet für die letzte Gleichung die Benutzung des Gleichheitszeichens. Links stehe ein Grenzwert, der sich zwar beständig $2x$ nähere, ohne diesen Wert aber jemals zu erreichen. Nach W. Koppelmann darf man wohl schreiben $\frac{dy}{dx} = 2x + dx$, aber nicht $\frac{dy}{dx} = 2x$. Der Streit dreht sich hier um die Auffassung von der unendlich kleinen Zahl. Da dx unterhalb jeder noch so kleinen endlichen Größe liegt, so ist die Gleichheit zwischen $2x + dx$ und $2x$ berechtigt. Das Wesentliche ist eben dabei, daß die Größenordnung von $2x$ nicht geändert wird, wenn man die unendlich kleine Größe dx hinzufügt. Die gewöhnliche Logik kennt nur eine Gleichheit zwischen endlichen Größen. Hier handelt es sich um eine approximative Gleichheit, die dadurch zu einer absoluten wird, daß man die unendlich kleine Größe als solche definiert, die zu einer endlichen hinzugefügt, die Größenordnung dieser nicht ändert.

Die gewöhnliche Logik kennt nicht den Begriff der Grenze. Mit diesem Begriff fällt die ganze Analytik und Differentialrechnung. Durch Einführung dieses Begriffs wird „der logische Sachverhalt nicht verdunkelt", sondern es wird ein Hilfsmittel eingeführt, welches die gewöhnliche Logik zwar nicht kennt, das aber deshalb nicht gegen die Gesetze der Logik verstößt, weil die Mathematik dieses Prinzip des Denkens allein besitzt. Die Polemik W. Koppelmanns gegen die Anwendung des Richtungsbegriffs bei einer Kurve, sowie auch das, was gegen die Berechtigung der Null als Zahl gesagt wird, fällt in sich zusammen mit der Anerkennung des Grenzbegriffs als erkenntniskritisch zulässigen Denkmittels. Die Definition der Gleichheit in der Fassung von Weierstraß „zwei Zahlen heißen gleich, wenn sie sich um weniger unterscheiden als jede noch so kleine vorgegebene Größe" ist vom Standpunkte der Logik aus richtig, wenn der Grenzbegriff als logisch zulässiges Denkmittel erklärt wird und wenn der Sinn dieser Definition richtig verstanden wird. Um die Definition vor einem Mißverstehen zu schützen, müßte sie etwa folgende Fassung haben: „Zwei Zahlen heißen gleich, wenn sie sich um weniger als jede noch so kleine Größe derselben Größenordnung unterscheiden". Das ist jedenfalls der Sinn der Definition von Weierstraß. Es ist deshalb $2x + dx = 2x$. Das Gleichheits-Zeichen ist in diesem Sinne durchaus berechtigt, weil jeder Mathematiker weiß, daß die Gleichheit sich nur auf die endliche Größenordnung bezieht. Im Vergleich mit endlichen Größen hat dx eben den Grenzwert 0. Anders ist es, wenn dx im Zusammenhang erscheint mit unendlich kleinen Größen höherer Ordnung. $dx + (dx)^2$ ist nicht gleich $(dx)^2$.

Was Koppelmann in dem letzten Teile seiner Arbeit sagt über die Verwendung der Null und den Gebrauch des Gleichheitszeichens, ist in hinreichendem Maße bereits kritisch beleuchtet worden.

Schluß.

Herr Professor Koppelmann kommt am Schluß seiner Abhandlung zu dem Resultat: „die Arithmetik ist kein logisch korrektes Lehrgebäude". Die Antwort hätte lauten müssen: „die Arithmetik, wie die Mathematik überhaupt, ist eine Wissenschaft, die über die Denkprinzipien der gewöhnlichen Logik hinausgeht". Die Mathematik kann das unendlich Kleine verfolgen und es durch das Endliche ausdrücken. Die Brücke aus dem Endlichen zum Unendlichen ist der Grenzbegriff. Keine Wissenschaft hat ein solches Denkmittel. Aber auch keine Wissenschaft hat die Möglichkeit, die Begriffe in so kühner Weise zu erweitern wie die Mathematik, weil sie frei ist von der Gebundenheit durch die Wirklichkeit. Die Anwendung der mathematischen Funktionen auf die Größenverhältnisse der wirklichen Dinge ist nicht ihre erste Aufgabe. Schon die Trennung der

Mathematik in reine und angewandte Mathemathik zeigt, daß die Anwendung der mathematischen Beziehungen nicht das Primäre ist. Nicht die realen Dinge bilden den Gegenstand der Mathematik, sondern jede Synthese von einander nicht widersprechenden Merkmalen. Diese Synthese braucht nicht unbedingt zu einer in der Wirklichkeit bestehenden Einheit zu führen. Die intuitive Verknüpfung geometrischer und arithmetischer Merkmale zu einer gedanklichen Einheit ist logisch durchaus berechtigt. Mit der oben von Koppelmann angegebenen Begriffserklärung lassen sich nur wenige mathematische Begriffe bestimmen. Die negativen, imaginären und komplexen Zahlen sind z. B. begrifflich und intuitiv in der angegebenen Weise zu erklären. Der Grenzbegriff ist selbst bei den einfachsten Definitionen nicht zu entbehren. Zu sagen, das Dreieck ist eine ebene Figur, die von den drei Geraden begrenzt wird, kann nicht befriedigen. Dringt man weiter vor, so muß man sich fragen: was ist eine Ebene und was ist eine Gerade? Diese Fragen sind ohne den Grenzbegriff wieder nicht zu beantworten. Auch das Unendliche ist selbst von den einfachsten Begriffen (z. B. vom Winkelbegriff) nicht zu trennen. Der Winkel ist das Stück einer Ebene, das von 2 von einem Punkte ausgehenden Strahlen aus der Ebene ausgeschnitten wird. Damit ist der Winkel (nach Killings Untersuchungen die einzige brauchbare Definition) ein unendlich großes Stück einer Ebene, ein Teil der Ebene von unendlicher Dimension und doch nicht gleich der Ebene, die auch unendlich ausgedehnt ist. Koppelmanns Untersuchungen fußen vielleicht auf Forschungen, die in Göttingen und Holland (Brouwers) angestellt sind. Sie sind deshalb falsch, weil die Behauptungen zu allgemein sind, und weil für die Beweisführung Anschauungen über den Zahlbegriff benutzt werden, die nur noch der Geschichte angehören.
