Zur Lehre von den sog. schöpferischen Definitionen.

Von Walter Dubislav, Berlin-Friedenau.

(Schluß.)

B. Die Definitionen im Logikspiel wie im inhaltlich gedeuteten Logikspiel.

Nachdem die elementare Lehre vom Schluß als Spiel „aufgezogen" ist, haben wir nunmehr diejenigen Spielstellungen bezw. Spielregeln in diesem Spiele zu ermitteln, die den (in Verbindung mit Beweisen benutzten) Definitionen der exakten Logik entsprechen. Zu diesem Zwecke gehen wir folgendermaßen vor: Wir erspielen zunächst eine Formel, es handelt sich um Formel 2,01 der Principia Mathematica, die in bekannter Weise inhaltlich gedeutet die sog. reductio ad absurdum darstellt. Dann führen wir in Gestalt einer neuen sekundären Spielregel, die mit der Einführung eines neuen Spielzeichens verbunden ist, eine Definition ein, und zwar genauer eine Regel, der bei der üblichen inhaltlichen Deutung eine Definition innerhalb der Logik entspricht, und erspielen innerhalb des erweiterten Spieles bei Benutzung des neuen Zeichens eine Formel, die, obwohl verschieden von der alten Formel, da in ihr das neue Zeichen vorkommt, inhaltlich gedeutet doch nur die reductio ad absurdum darstellt. Daraus können wir dann ein Kriterium für einwandfreie Definitionen gewinnen.

Um nun Gesagtes im einzelnen auszuführen, stellen wir uns die ganz einfache Aufgabe, zuzusehen, ob die Zeichenkonstellation: $\vdash . \sim (\sim p \vee \sim p) \vee \sim p$ eine in unserem Spiel spielgerecht erspielbare Konstellation darstellt. Das ist der Fall. Wir haben nämlich lediglich für den Buchstaben p in Stellung I gemäß der Regel I $\sim p$ zu substituieren. Wir erhalten dann eben sofort: $\vdash . \sim (\sim p \vee \sim p) \vee \sim p$.

Jetzt führen wir eine neue Zusatzspielregel, nennen wir sie S, ähnlich der Regel I ein, auf die aber Regel I selbst, was Substitutionen für die in Regel S vorkommenden Buchstaben p und q betrifft, Anwendung finden darf. Regel S soll nachstehende Fassung erhalten: In jeder

Stellung, die die Zeichenkonstellation $\sim p \vee q$ enthält, darf für $\sim p \vee q$ gesetzt werden $p \supset q$ und umgekehrt.[1]) Damit wird natürlich unser Spiel erweitert. Es gibt nämlich in dem neuen Spiel erstens alle Spielstellungen des ursprünglichen und außerdem noch solche, in denen das neue Zeichen „$\supset$" enthalten ist. Der Bequemlichkeit halber wollen wir der Regel S selbst einen formelhaften Ausdruck geben, und zwar soll die Formel $p \supset q \,.\!=\!.\, \sim p \vee q$ die gemäß Regel S jeweils statthafte Substitution symbolisieren, was insbesondere die Anwendung der Regel I auf die in Regel S vorkommenden Buchstaben p und q erleichtert, indem das Gleichheitszeichen kurz ausdrückt, daß in jeder Spielstellung, in der die rechts vom Gleichheitszeichen stehende Zeichenkonstellation vorkommt, diese innerhalb der betreffenden Spielstellung durch die links von dem Gleichheitszeichen stehende Zeichenkonstellation ersetzt werden darf, und umgekehrt.

Wir fragen nun, was wird aus Formel 2,01, die im ursprünglichen Spiel spielgerecht erspielbar ist, wenn wir versuchen, sie mit Hilfe der Regel S so umzuformen, daß das Zeichen $\vee$ herausfällt, an Buchstaben aber auch in der neuen Spielstellung nur p enthalten ist? Zwecks Beantwortung dieser Frage ersetzen wir erstens in $p \supset q \,.\!=\!.\, \sim p \vee q$ den Buchstaben q durch $\sim p$, indem wir auf Regel S die Regel I anwenden. Wir erhalten $p \supset \sim p \,.\!=\!.\, \sim p \vee \sim p$. In jeder Spielstellung also, in der die Zeichenkonstellation $\sim p \vee \sim p$ vorkommt, ist sie vertauschbar mit der Zeichenkonstellation $p \supset \sim p$, und umgekehrt. Setzen wir jetzt zweitens gemäß Regel I in Regel S, d. h. in $p \supset q \,.\!=\!.\, \sim p \vee q$, für den Buchstaben p die Zeichenkonstellation $y \vee z$, dann für y die Zeichenkonstellation $\sim p$, dann für z die Zeichenkonstellation $\sim p$, dann schließlich für q die Zeichenkonstellation $\sim p$, so erhalten wir, wenn wir noch die Klammersetzung berücksichtigen: $(\sim p \vee \sim p) \supset \sim p \,.\!=\!.\, \sim(\sim p \vee \sim p) \vee \sim p$. M. a. W.: Die rechts von dem Gleichheitszeichen stehende Zeichenkonstellation ist in jeder Spielstellung, in der sie vorkommt, mit der links vom Gleichheitszeichen stehenden vertauschbar und umgekehrt.

[1]) Regel S kann u. U. noch vereinfacht werden. Für unsere Zwecke genügt die obige Fassung. Whitehead und Russell, nebenbei bemerkt, lassen es an dieser Stelle an Präzision fehlen: Sie haben die Notwendigkeit der Aufstellung einer präzisen Substitutionsregel übersehen. Es ist übrigens hervorzuheben, daß Regel S, wie jede ihr analoge sich von der Regel I darin wesentlich unterscheidet, daß, wenn für irgendein Zeichen, sagen wir (a, b), gemäß einer solchen Regel in einer Spielstellung, in welcher (a, b) mehrmals vorkommt, c gesetzt werden darf, man diese Substitution nicht an jeder Stelle, an welcher (a, b) in der betreffenden Stellung vorkommt, auszuführen braucht.

Wenden wir das letzte Resultat auf die oben spielgerecht erspielte Stellung $\vdash . \sim(\sim p \vee \sim p) \vee \sim p$ an, so erhalten wir $\vdash . (\sim p \vee \sim p) \supset \sim p$, und aus dieser Stellung ergibt sich, indem wir gemäß dem ersten Resultat für $\sim p \vee \sim p$ setzen: $p \supset \sim p$: die Formel $\vdash . (p \supset \sim p) \supset \sim p$, die ersichtlich die verlangten Eigenschaften besitzt.

Gehen wir jetzt zu der üblichen Deutung unseres Spieles über, die dem System unserer Spielstellungen ein demselben isomorphes System von Behauptungen zuordnet — wir setzen diese Deutung als bekannt voraus, die der Leser gegebenenfalls aus Whitehead-Russell's Principia Mathematica, dem standart work exakter Logik, entnehmen möge — so stellen wir folgendes fest: A. Den vier Ausgangsstellungen entsprechen vier Grundbehauptungen. B. Den beiden Spielregeln I und II entsprechen zwei Schlußregeln. C. Der Zusatzregel S entspricht eine Vereinbarung über die Bezeichnungsweise, die innerhalb der Sphäre der Behauptungen an sich völlig überflüssig ist und die lediglich zu einer bequemen sprach-schriftlichen Fixierung der Behauptungen dient. Die Feststellung C ist aber noch erweiterungsfähig. Sieht man nämlich die in dem Mathematical Logic betitelten Teile der Principia Mathematica enthaltenen Definitionen[1]) daraufhin durch, ob sie insgesamt von derselben Art sind, wie die angegebene Definition des Implikationszeichens, so erkennt man sofort, daß dies in der Hauptsache zutrifft. Man kann also der Feststellung C nachstehende erweiterte Fassung geben: C. Jeder „Definition" innerhalb (der Whitehead-Russell'schen Darstellung) der exakten Logik entspricht beim Logikspiele eine neue Zusatzspielregel analog der Zusatzregel S, die einen in Stand setzt, gewisse Substitutionen vorzunehmen, ohne daß durch solche Substitutionen die Deutung des Spieles eine andere wird, unbeschadet der Tatsache, daß sich natürlich das Spiel als Spiel durch Zulassung derartiger Substitutionen ändert. Man gewinnt damit eine neue Charakterisierung der Definitionen. Eine Definition in der exakten Logik ist jedenfalls ein „Etwas", dem innerhalb des Logikspieles eine Zusatzspielregel analog der Regel S entspricht, die aber den zwischen der exakten Logik und dem Spiel bestehenden Isomorphismus nicht zerstört.[2])

[1]) Es handelt sich um die Definitionen 1,01 bis 43,01 in der Numerierung der Principia Mathematica.

[2]) Man kann die Definitionen auch rein kalkülmäßig charakterisieren, wie der Verfasser gezeigt hat in der in den Annalen der Philosophie erscheinenden Arbeit „Zur kalkülmäßigen Charakterisierung der Definitionen".

Innerhalb der derart abgegrenzten Klasse der zulässigen Definitionen der exakten Logik nehmen zwei (komplementäre) Unterklassen eine besondere Stellung ein. Bei der einen tritt auf der linken Seite des die erlaubte Substitution andeutenden Gleichheitszeichens das neu einzuführende Symbol isoliert auf, während sich rechts von dem betreffenden Gleichheitszeichen eine Knüpfung von Symbolen vorfindet, die gegebenenfalls nach Vornahme sukzessiver Ersetzungen entsprechend den Definitionen der etwa in der Knüpfung vorkommenden abgeleiteten Symbole, sich darstellt als eine Knüpfung von primitiven Zeichen des der Untersuchung zugrunde gelegten Systems von Voraussetzungen. Bei den anderen erscheint auf der linken Seite des die erlaubte Substitution andeutenden Gleichheitszeichens das neu einzuführende Symbol nicht isoliert, sondern im einfachsten Falle enthalten in einer Knüpfung mit bereits bekannten Symbolen, welche Knüpfung mit der rechts von dem betreffenden Gleichheitszeichen stehenden Knüpfung salva veritate [1]) als ersetzbar gelten soll. Gegebenenfalls können aber auch mehrere neu einzuführende Symbole zugleich links von dem betreffenden Gleichheitszeichen stehen in einer neuen Knüpfung verbunden mit schon bekannten Symbolen. In beiden Fällen jedoch, sofern man nötigenfalls abgeleitete Symbole oder Symbolkomplexe durch die ihnen entsprechenden Knüpfungen primitiver ersetzt, stehen rechts von dem Gleichheitszeichen einer Definition nur solche Knüpfungen, wie sie in der symbolischen Darstellung der Ausgangsbehauptungen, d. h. in den Ausgangsstellungen des Logikspieles vorkommen. Da man nun aber lediglich durch Anwendung von Regel I oder II von den Ausgangsstellungen zu neuen Stellungen spielgerecht gelangen kann, und hierbei Regel I, wie das effektive Spiel lehrt, viel häufiger benutzt wird, so liegt es von vornherein nahe, zu vermuten, daß rechts vom Gleichheitszeichen einer Definition überhaupt nur solche Knüpfungen vorkommen werden, die aus x bei beliebig (endlich) oftmaliger Anwendung der gegebenenfalls gemäß Ph. J. 1928, S. 477 f. erweiterten Regel I entstehen. Diese Vermutung liegt um so näher, als die Ausgangsstellungen I—IV selbst aus x in spieltechnischer Hinsicht korrekt

[1]) Vgl. Leibniz, *Philos. Schriften.* Ed. Gerhardt, Bd. VII, S. 219: „Eadem sunt, quorum unum in alterius locum substitui potest salva veritate." — Man wolle beachten, daß im Fortgange der Entwicklung der Principia Mathematica Whitehead und Russell unvollständige Symbole der Kürze zuliebe gelegentlich wie vollständige der äußeren Form nach definieren und lediglich in erläuternden Zusätzen auf diesen Umstand aufmerksam machen. Vgl. etwa die Definitionen 20,03 wie 21,03 und andere mehr.

aufgebaut werden können bei (endlich oftmaliger) Anwendung der Regel I, wenn man vom Behauptungszeichen absieht.[1]) Eine Durchmusterung der Definitionen der Mathematical Logic bestätigt dieses Resultat. Die für den nicht-elementaren Kalkül entsprechend erweiterte Regel I enthält mithin die praktisch ausreichende konstruktive Vorschrift, derzufolge alle Knüpfungen primitiver Symbole errichtet werden können, eine Vorschrift, die an sich natürlich nicht notwendig ist, sich jedoch durch ihre Einfachheit empfiehlt und z. B. von vornherein sinnlose Kombinationen ausschließt.[2]) Nennt man jetzt abgeleitete Symbole des Kalküls, die isoliert niemals links von dem Gleichheitszeichen einer Definition bezw. niemals allein auf einer Seite einer eine Identität wiedergebenden Stellung stehen können (sofern man den Kalkül hinsichtlich dieser Symbole nicht willkürlich ändert) „unvollständige" hinsichtlich des der Untersuchung zugrunde gelegten Systems von Voraussetzungen und alle anderen abgeleiteten „vollständige" hinsichtlich des betreffenden Systems, so zeigt sich, daß die Definitionen, vermittelst deren die unvollständigen Symbole eingeführt werden, die für den Aufbau der exakten Logik wichtigsten sind. Bei inhaltlicher Interpretierung werden sie, und diese ihre Eigenschaft ist für uns von großer Wichtigkeit, aber niemals „Etwas" wie die vollständigen Symbole bezeichnen, sondern sie haben streng genommen in bezug auf das betreffende System keine Bedeutung und dienen lediglich dazu, abkürzende oder aus irgendwelchen Gründen erwünschte neue Bezeichnungsweisen einzuführen für schon bekannte Zeichenknüpfungen. In bezug auf ein System von Voraussetzungen sind unvollständige Symbole also unter anderem auch keine Begriffszeichen und durch die einem unvollständigen Symbole entsprechende Definition wird mithin im Hinblick auf das System von Voraussetzungen auch kein neuer Begriff konstruiert, der dem betreffenden neuen Zeichen entspricht. Das ist aber durchaus damit verträglich, daß die rechts (wie links)

---

[1]) Man erhält aus x die Ausgangsstellung I bezw. II bezw. III bezw. IV ohne das Behauptungszeichen, wenn man gemäß der Spielregel I für x zunächst $x' \vee y$ setzt und dann nachstehend angegebene ganz einfache Substitutionen vornimmt: $x'/\sim z$, dann $z/p \vee p$, dann y/p, bezw. $x'/\sim q$, dann $y/p \vee q$, bezw. $x'/\sim z$, dann $z/p \vee q$, dann $y/q \vee p$, bezw. $x'/\sim z$, dann $z/s \vee r$, dann $s/\sim q$, dann $y/a \vee b$, dann $a/\sim d$, dann $d/p \vee q$, dann $b/p \vee r$.

[2]) Es ist zu bedauern, daß Whitehead und Russell diese Eigentümlichkeit ihres klassischen Systems nicht bemerkt haben, wie sie ebenfalls bedauerlicherweise die Notwendigkeit der Aufstellung einer Substitutionsregel nach Art der Regel I übersehen haben.

von dem Gleichheitszeichen einer solchen Definition stehende Zeichenknüpfung einen neuen Begriff hinsichtlich des Systems bezeichnet. Nur ist dann dieser Begriff ein auf die gewöhnliche kombinierende Weise konstruierter.

Zusammenfassend können wir also über die Definitionen im Logikspiel wie im inhaltlich gedeuteten Logikspiel (in der exakten Logik) folgendes feststellen: Im Spiele sind die Definitionen zusätzliche Spielregeln von der Art der Regel S, aber nicht neue Ausgangsstellungen. Durch sie werden für Knüpfungen, letztlich für solche von primitiven Zeichen (Spielfiguren) des Spieles neue Knüpfungen bezw. neue Zeichen eingeführt, ohne daß die zwischen Spiel und Spieldeutung bestehende Isomorphie zerstört wird. Die konstruktive Vorschrift für die Bildung der Knüpfungen rechts von dem Gleichheitszeichen einer Definition, liefert die Spielregel I, sofern man erforderlichenfalls abgeleitete Zeichen durch die ihnen entsprechenden Knüpfungen von primitiven Zeichen ersetzt. Bei der inhaltlichen Deutung des Spieles entsprechen den Spielregeln von der Art der Regel S weitgehend willkürliche Vereinbarungen über die Bezeichnungsweise in Gestalt von Definitionen. Handelt es sich um eine Definition eines vollständigen Symbols, so entspricht der Definition eine Gegenstandskonstruktion derart, daß der neu, aber lediglich auf kombinierende Weise konstruierte Gegenstand zum Zeichen erhält das neu definierte Symbol. Handelt es sich aber um eine Definition eines unvollständigen Zeichens, so gibt es in dem der Untersuchung zugrunde gelegten System von Voraussetzungen keinen Gegenstand, dessen Zeichen dieses unvollständige Symbol ist.

C. Die Unvermeidbarkeit schöpferischer Definitionen im Logikspiel und die Vermeidbarkeit derselben im inhaltlich gedeuteten Logikspiel.

Wir haben jetzt die für die Definitionen im Logikspiel wie in der exakten Logik gewonnenen Resultate auf die sog. schöpferischen Definitionen innerhalb der beiden Gebiete anzuwenden. Was zunächst das Logikspiel anbelangt, so erweist sich, wie wir gefunden haben, jede Definition eines Zeichens, mag es sich nun um ein im angegebenen Sinne vollständiges oder unvollständiges handeln, als eine das Spiel als bloßes Spiel erweiternde zusätzliche Spielregel, die bei bestimmten Voraussetzungen die Ausführung gewisser Substitutionen erlaubt. Man hat also nicht nur in subjektiver sondern auch in objektiver

Hinsicht zu konstatieren, daß innerhalb der Sphäre des Spieles die Definitionen samt und sonders in gewisser Weise als „schöpferisch“ anzusprechen sind, da durch ihre Aufstellung das Spiel als bloßes Spiel geändert wird. Man hat aber einschränkend hinzuzufügen, daß die spieländernden Wirkungen derartiger zusätzlicher Spielregeln im Hinblick auf diejenigen der Regel I und II nur von vergleichsweise geringer Größe sind. Streng genommen können aber die Definitionen der vollständigen Zeichen überhaupt nicht als schöpferische Definitionen angesprochen werden. Ein vollständiges Zeichen bildet nämlich ersichtlich keinen „neuen“ Gegenstand hinsichtlich der Regel I und II der Ausgangsstellungen. Es wird ja vermittelst der Definition als ersetzbar durch eine Knüpfung von primitiven Zeichen hingestellt, sofern man nur erforderlichenfalls alle in der Definition etwa vorkommenden abgeleiteten Zeichen durch ihnen äquivalente Knüpfungen ersetzt, bis man es nur noch mit Knüpfungen primitiver Zeichen zu tun hat. Sind also sensu stricto die Definitionen vollständiger Zeichen[1]) selbst innerhalb der Sphäre des Spieles keine schöpferischen Definitionen, so sind es wenigstens die Definitionen unvollständiger Zeichen. Durch diese Definitionen nämlich wird das Spiel, ganz abgesehen von der die Definition darstellenden Zusatzspielregel, um einen im angegebenen Sinne neuen Gegenstand erweitert, das neue Zeichen, der nicht, und darauf liegt der Nachdruck, auf eine Knüpfung von primitiven Zeichen des Spieles reduzierbar ist. Da weiterhin aber die Aufstellung von Definitionen von unvollständigen Zeichen für das Spiel als Spiel aus spielökonomischen Gründen praktisch unvermeidbar ist, so ist damit sichergestellt, daß es im Spiel als Spiel schöpferische Definitionen gibt und daß man dieselben in gewisser Hinsicht geradezu nicht vermeiden kann.

Ganz anders verhält sich die Sache aber, wenn man die Sphäre des Spiels verläßt und zu der der Deutung des Spieles, d. h. zu der der exakten Logik übergeht. Die Definitionen in der exakten Logik nämlich sind, sofern man mit uns diese nicht mit dem Spiele identifiziert, was vielleicht ein radikaler Anhänger der Spieltheorie tun dürfte, wie wir fanden, weitgehend unserer Willkür unterworfene Regulatoren der sprach-schriftlichen Einkleidung der zur exakten Logik gehörenden Behauptungen. Sind es also im besonderen Definitionen vollständiger Symbole, so entspricht einem solchen Symbole zwar innerhalb der Sphäre der Behauptungen und Begriffe ein Gegen-

[1]) *In der exakten Logik kommen sie nur vergleichsweise selten vor.*

stand, aber dieser Gegenstand ist in der gewöhnlichen kombinierenden Weise auf eine Knüpfung von primitiven Gegenständen des Systems reduzierbar, stellt also keinen „neuen“ Gegenstand hinsichtlich des Systems der Grundvoraussetzungen der exakten Logik dar. M. a. W.: Eine Definition eines vollständigen Symbols innerhalb der exakten Logik ist niemals eine schöpferische. Handelt es sich aber um eine Definition eines unvollständigen Zeichens, so wird zwar ein „neues“ Zeichen, wenngleich ein unvollständiges, eingeführt, aber diesem Zeichen entspricht, und das ist hier entscheidend, kein Gegenstand im Hinblick auf das der Untersuchung zugrunde gelegte System von Voraussetzungen. Es wird zwar durch die rechte Seite der Definition als Ganzes auch ein Gegenstand konstruiert, aber dieser ist, wie wir sahen, in der üblichen kombinierenden Weise auf eine Knüpfung von primitiven reduzierbar, stellt somit keinen „neuen“ Gegenstand dar. Wir müssen also feststellen, daß innerhalb der exakten Logik als einem System von Behauptungen und Begriffen, das von seiner jeweiligen sprach-schriftlichen Einkleidung wesentlich unabhängig ist, auch die Definitionen unvollständiger Symbole keine schöpferischen Definitionen darstellen.

III. Die schöpferischen Definitionen in den sonstigen exakten Disziplinen.

A. Die „Formalisierung“ einer exakten Disziplin.

Unsere Aufgabe besteht im folgenden darin, zu untersuchen, ob die für das Logikspiel wie für seine Interpretierung, die exakte Logik, hinsichtlich der schöpferischen Definitionen gefundenen Resultate entsprechend auch in den andern exakten Disziplinen gelten oder ob da hinsichtlich der schöpferischen Definitionen andere Verhältnisse vorliegen. Wir werden zeigen, daß ersteres zutrifft, und haben zu diesem Zwecke zunächst die sog. Formalisierung einer exakten Disziplin, d. h. ihre Umwandlung in ein Spiel zu behandeln. Die zu formalisierende exakte Disziplin sei in axiomatischer Darstellung gegeben, wobei die Möglichkeit einer axiomatischen Darstellung einer Disziplin voraussetzungsgemäß als Kriterium der Exaktheit dient. Man verfügt also über ein System von Grundbehauptungen nebst Grundbegriffen und einer sprach-schriftlichen Einkleidung derselben, aus denen alle weiteren Behauptungen, die zu der Disziplin gehören, allein durch Beweise abzuleiten sind, d. h. allein durch Benutzung vollständiger Schlüsse wie derjenigen Erkenntnisse, die zum „Ziehen“

derartiger Schlüsse erforderlich sind. Ein derartiges System von Grundbehauptungen wird in der Regel zunächst noch als ein System von Wahrheiten bezw. von miteinander verträglichen Behauptungen zu betrachten sein, welches angibt, daß gewisse Beziehungen zwischen gewissen Begriffen bezw. unter diese Begriffe fallenden Gegenständen bestehen. Abstrahiert man nun von den nicht-relationstheoretischen Beschaffenheiten dieser Beziehungen und faßt das erwähnte System von Grundbehauptungen nur noch auf als ein solches, das ein Netzwerk von Relationen beschreibt, die zwischen gewissen Gegenständen[1]) bestehen, welche ihrerseits nur noch nach ihrer Stellung zu diesen Relationen unterschieden werden und denen sonst keine weiteren Beschaffenheiten beizulegen sind, so kann die Anwendung der Lehre vom Schluß auf ein derartiges System nur folgendes liefern: Sie kann nur zeigen, daß neben den Ausgangsrelationen auch noch andere Relationen oder wenigstens die Ausgangsrelationen noch in anderer Hinsicht zwischen den betreffenden weitgehend nicht näher bestimmten, aber für die Zwecke einer exakten Disziplin gerade weit genug bestimmten Gegenständen bestehen.

Es muß aber gefragt werden, ob bei einem derartigen Absehen von allen nicht-relationstheoretischen Beschaffenheiten der Relationen eines derartigen Netzwerkes — es ist ein Uebergang von den Relationen zu den Relationszahlen derselben im Whitehead-Russell'schen Sinne — nicht die betreffenden Relationen in unzulässiger Weise wichtiger Eigentümlichkeiten beraubt werden und ob immer das Netzwerk von in solcher Weise verallgemeinerten Relationen noch als ein im Hinblick auf die zu ziehenden Schlüsse vollwertiger Ersatz des ursprünglichen gelten kann. Hierzu ist folgendes zu sagen: Selbstverständlich sind die ursprünglichen, inhaltlich irgendwie beschaffenen Relationen verschieden von den abstrakten Relationen, die lediglich als Schemen für alle diejenigen Relationen zu denken sind, die unbeschadet inhaltlicher Verschiedenheiten dieselben ordnungstiftenden Eigenschaften besitzen. Aber für die Zwecke einer lediglich sensu stricto beweisend vorgehenden Ableitung von Sätzen aus Sätzen ist das gleichgültig. Bei einem derartigen Verfahren nämlich wird

[1]) Wie A. Korselt nach dem Vorgange von B. Russell. Principles of Mathem., 1903, S. 3 ff., und unabhängig von ihm kürzlich R. Carnap gezeigt haben, sind diese Gegenstände geradezu als Variable aufzufassen. Vgl. A. Korselt, *Was ist Mathematik,* Archiv der Mathematik und Physik, 1913, R. Carnap, *Eigentliche und uneigentliche Begriffe,* Symposion, Bd. I (ohne Jahresangabe), Heft 4, herausgegeben 1927.

von denjenigen und nur denjenigen Beschaffenheiten des Systems der ursprünglichen Sätze Gebrauch gemacht, die allen diesem Systeme isomorphen Systemen gleichermaßen zukommen.[1] Diese Eigentümlichkeit des bloß schließend vorgehenden Verfahrens bei der Gewinnung neuer Behauptungen aus gegebenen bringt es übrigens auch allein mit sich, daß man dieselben Schlußformen auf den verschiedensten Gebieten mit Erfolg gleichartig anwenden kann. Diese Tatsache selbst läßt sich natürlich umgekehrt auch heranziehen, um die obige Behauptung empirisch zu stützen, sofern einem noch an einer solchen Begründung gelegen ist.

Denkt man sich jetzt weiterhin ein solches Netzwerk von Beziehungen, die als zwischen gewissen Gegenständen geltend betrachtet werden, gemäß dem Relations-Kalkül der mathematischen Logik bezeichnet, dann besteht, wenn man zugleich noch die Lehre vom Schluß als ein spielgerecht zu spielendes Spiel in der geschilderten Weise „aufzieht", der vorzunehmende Aufbau der betreffenden Disziplin einfach darin, daß man ein erweitertes Logik-Spiel spielgerecht spielt, nämlich das ursprüngliche Logik-Spiel zuzüglich gewisser neuer Ausgangsstellungen, die aber aus dem alten Spielzeichen aufzubauen sind und die das betreffende mit den Mitteln des Relations-Kalküls „darstellbare" Netzwerk von Beziehungen liefert. Es ist aber ausdrücklich hervorzuheben, daß in der Behauptung der Möglichkeit einer solchen spielmäßigen Behandlung einer exakten Disziplin die Behauptung nicht so ohne weiteres enthalten ist, daß die die Axiome einer solchen Disziplin wiedergebenden Ausgangsstellungen des der Disziplin entsprechenden Spieles aus den Ausgangsstellungen des Logik-Kalküls zu erspielen sind. Es ist darin vielmehr lediglich die Behauptung enthalten, daß sich jene Stellungen in spieltechnischer Hinsicht sinnvoll mit den Mitteln des Logik-Kalküls darstellen lassen. Nur wenn sich beweisen ließe, daß das gesamte Logik-Spiel im Quasi-Postschen Sinne[2] ein vollständiges wäre, was es vermutlich nicht ist, würde die Behauptung der Darstellbarkeit im obigen Sinne äquivalent sein mit der Behauptung der spielgemäßen Erspielbarkeit bezw. der Spielfalschheit der betreffenden Stellungen im Quasi-Postschen Sinne.[3]

[1] Vgl. zur weiteren Begründung dieser Behauptung H. Weyl, *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaften,* 1926, S. 21 ff.

[2] Vgl. E. L. Post, *Introduction to a General Theory of Elementary Proposition.* American Journal of Mathematics, 1921, S. 177.

[3] Vgl. ebenda, S. 177; P. Bernays, *Axiomatische Untersuchungen des Aussagen-Kalküls der „Principia Mathematica",* Mathem. Zeitschrift, 1926, S. 305 ff.

B. Die Uebertragung der für die Logik gewonnenen Resultate auf alle sonstigen exakten Disziplinen.

Betrachtet man mit D. Hilbert[1]) das streng axiomatisch vorgehende Verfahren beim Aufbau einer exakten Disziplin als die relativ vollendetste Begründung, deren die Lehrsätze der betreffenden Disziplin überhaupt fähig sind, so sind in letzter Hinsicht die und nur die Hilfsmittel bei dem Aufbau einer exakten Disziplin aus ihren Grundvoraussetzungen als einwandfrei zu betrachten, die sich durch einen der axiomatischen Methode entsprechenden Aufbau derselben legitimieren lassen. Da, wie wir fanden, die axiomatische Darstellung einer Disziplin umwandelbar ist in eine rein kalkül-spielmäßige, womit natürlich in keiner Weise mittelbar behauptet wird, daß sich eine derartige Umwandlung im allgemeinen empfehlen dürfte, so sind also weiterhin nur solche Hilfsmittel bei dem Aufbau einer exakten Disziplin letztlich zu rechtfertigen, die sich beim Uebergange zu dem der betreffenden Disziplin entsprechenden Spiele in spieltechnischer Hinsicht im Hinblick auf das Logik-Spiel als einwandfrei erweisen. Für die Definitionen ergibt sich damit also im besonderen, daß genau die Resultate für sie gelten, die wir für die Logik ermittelt haben. D. h. also, betrachtet man, was ein radikaler Anhänger der Spieltheorie wohl tun dürfte, eine exakte Disziplin als ein Spiel mit gewissen Zeichen nach bestimmten Regeln, wobei höchstens verlangt wird, daß das Spiel ein gewissen Naturvorgängen relations-ähnliches Bild liefert, so gibt es innerhalb des Spieles einen Fortschritt vermittelst der Aufstellung von „schöpferischen" Definitionen. Die Definitionen der unvollständigen Zeichen nämlich erwiesen sich als solche. Sieht man aber im Gegensatze zu der Spieltheorie eine exakte Disziplin als ein System von Behauptungen und Begriffen an, die von ihrer jeweiligen sprach-schriftlichen Bezeichnungsweise wesentlich unabhängig sind, unterscheidet man also mit L. E. I. Brouwer die „Sprache" der betreffenden Disziplin von der Disziplin selbst, so gibt es beim Aufbau einer exakten Disziplin keinen legitimen Fortschritt durch „schöpferische Definitionen". Denn innerhalb der Sphäre der Behauptungen und Begriffe wird durch die Definition eines vollständigen Symbols nur ein Gegenstand als die Bedeutung dieses Symbols auf die gewöhnliche kombinierende Weise eingeführt, und dieser Gegen-

---

[1]) D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, 4. Aufl. 1913, Anhang VI, S. 238: „. . . verdient doch zur endgültigen Darstellung und völligen logischen Sicherung des Inhaltes unserer Erkenntnisse die axiomatische Methode den Vorzug."

stand bildet infolgedessen keinen „neuen“ Gegenstand im angegebenen Sinne hinsichtlich des betreffenden Systems von Grundvoraussetzungen. Durch die Definition eines unvollständigen Symbols wird aber, wie wir fanden, überhaupt kein Gegenstand hinsichtlich des betreffenden Systems als die Bedeutung dieses Symbols eingeführt, und der durch die rechte Seite der die Definition repräsentierenden Gleichung eingeführte Gegenstand wird wieder nur auf kombinierende Weise gewonnen.