Die Frage nach der Existenz der Nichteuklidischen Geometrie und ihre Beantwortung in den Schriften der beiden Bolyai.

Von Schw. M. Nicetia Holling, Münster i. W.

I. Einleitende Bemerkungen.

a) Daten aus dem Leben der beiden Bolyai.

Nachdem die allgemeine Relativitätstheorie die Möglichkeit, vielleicht sogar Wahrscheinlichkeit der Nichteuklidischen Struktur des Raumes ins Auge gefaßt hat, ist diese Frage, die bislang mehr das Interesse der Philosophen und Mathematiker allein fesselte, auch zu einer physikalischen Theorie geworden und erwartet ihre Entscheidung durch das Experiment. Auf eine derartige Lösung des Problems haben alle Entdecker der Nichteuklidischen Geometrien mehr oder weniger deutlich hingewiesen; aber zuerst galt es, sich über den mathematischen Gehalt der neuen Geometrien ganz klar zu werden, ehe man an die erkenntnistheoretischen und physikalischen Probleme herangehen konnte, die sich zugleich mit ihnen aufdrängten.

Wenn diese Untersuchung dem Existenzbegriff bei den ungarischen Mathematikern Bolyai gewidmet ist, so muß auch sie die beiden in die Augen springenden Formulierungen des Existenzbegriffes zu scheiden versuchen und sehen, welche Antwort vor allem Johann Bolyai auf die Frage nach der realen oder physikalischen Existenz und auf die nach der mathematischen Existenz gegeben hat, — wie er zu diesen Antworten gelangte, — und ob sie und inwieweit sie eine endgültige Antwort bedeuten.

Wir werden sehen, wie alle drei oben genannten Problemkreise: Erkenntnistheorie, Mathematik und Physik an der Gestaltung der Antworten beteiligt sind.

Als Grundlage für meine Arbeit diente mir das 1913 erschienene Werk von P. Stäckel: „Wolfgang und Johann Bolyai, Geometrische Untersuchungen", 2 Bände aus der Serie: Urkun-

den zur Geschichte der Nichteuklidischen Geometrie, herausgegeben von Fr. Engel u. P. Stäckel, Teubner, Leipzig-Berlin[1]). Es enthält die hauptsächlichsten Schriften der beiden Bolyai und zahlreiche größere und kleinere Stücke aus dem Nachlasse Johanns. Mit Ausnahme der zweiten Hälfte des Appendix und der Bemerkungen zu Lobatschefskij liegen dessen Werke und Aufzeichnungen in deutscher Sprache vor, während Wolfgangs Tentamen und die genannte zweite Hälfte des Appendix vom Herausgeber aus dem Lateinischen übertragen wurden und der „Kurze Grundriß eines Versuches" 1851 deutsch vorliegt.

In bezug auf meine Aufgabe gab mir der Herausgeber im 11. und 13. Kapitel wertvolles Material in entsprechenden Textstellen; aber ich habe versucht, wie es hier meine Aufgabe ist, eine philosophische Durchdringung und Begründung zu geben, die über das dort Gebotene hinausgeht.

Wegen der biographischen Daten aus dem Leben der beiden Bolyai muß ich auf das Werk von Stäckel verweisen, das einen interessanten Einblick in das Leben, Ringen und Leiden der ersten beiden großen ungarischen Mathematiker gewährt. Nur das sei hier erwähnt, daß für Wolfgang Bolyai (geb. 9. Februar 1775, gest. 20. Nov. 1856), der Aufenthalt in Deutschland 1796—1799 ausschlaggebend wurde, wo er mit Gauß zusammentraf. Er begründete in ihm, der außerordentlich vielseitig veranlagt war, die dauernde Vorliebe für die Mathematik, an deren „Gründen er grübelte", (Brief an Gauß, St. I S. 38) und die dauernde Freundschaft mit Gauß, die nach der Veröffentlichung des Briefwechsels Gauß-Bolyai von Schmidt und Stäckel, Leipzig 1898 und der Werke von Gauß, Band 8, allgemein bekannt geworden ist. Einige Jahre nach seiner Rückkehr in die Heimat wurde er zum Professor an dem ev. reform. Kollegium zu Maros-Vásárhely ernannt. Er blieb in dieser Stellung bis zum Oktober 1851.

Zu Klausenburg war ihm am 15. Dezember 1802 sein Sohn Johann geboren worden, der Entdecker der Absoluten Geometrie Viel verdankt Johann seinem Vater, viel auch der Ingenieur-Akademie zu Wien, die er nach dem Absolvieren des Kollegiums zu Maros-Vásárhely vier Jahre lang besuchte, um dann in den Militärdienst einzutreten, da der Plan des Vaters, ihn nach

[1]) Stäckel u. Engel, Wolfgang und Johann Bolyai, Geometrische Untersuchungen. Urkunden zur Geschichte der Nichteuklidischen Geometrie. Leipzig-Berlin 1913, abgekürzt angeführt unter St. I u. II.

Göttingen zu Gauß zu bringen, gescheitert war. — Schon früh hatte er die Hauptidee seines Werkes über die Parallelen erfaßt, das als Appendix dem Tentamen seines Vaters angegliedert wurde; von 1820—1823 hatte er zwar auch versucht, verschiedene Beweise des Parallelenpostulats zu führen, traf in einigen Ideen, ohne daß er von Saccheris) und Lamberts[1]) Versuchen gewußt hätte, mit diesem und mit seinem Vater zusammen. Aber bald gab er diese vergeblichen Versuche auf und fand noch im Jahre 1823 den Durchbruch zu seiner „Absoluten Raumlehre", worüber er hochbeglückt am 3. November an seinen Vater schrieb: „In diesem Augenblick ist es noch nicht herausgefunden, aber der Weg, den ich gegangen bin, verspricht fast gewiß die Erreichung des Zieles, wenn dieses überhaupt möglich ist. . . . Jetzt kann ich nichts weiter sagen, nur soviel, daß ich aus dem Nichts eine neue, andere Welt geschaffen habe. . . ." (St. I, S. 85.)

1825 legte er seinem Vater die Ausarbeitung seines Systems vor, der mit der Veröffentlichung sich beeilen wollte, „weil manche Dinge gleichsam eine Epoche haben, wo sie dann an mehreren Stellen ans Licht kommen, und weil die Ideen leicht in einen andern übergehen." (St. I, S. 86.)

Und tatsächlich war ja diese Zeit die Epoche der Nichteuklidischen Geometrien, wie die Briefe von Gauß (Werke Bd. 8) und die Entdeckungen von Taurinus, Schweikart[2]) und Lobatschefskij, der seine Abhandlung „Ueber die Anfangsgründe der Geometrie" 1829 im Kasaner Boten veröffentlichte, zeigen. Zeitlich steht Johann Bolyai mit seiner Entdeckung zwischen Gauß, der diesbezüglich aber nichts veröffentlichte, und Lobatschefskij, der, wie aus seinen Vorlesungen an der Universität Kasan hervorgeht, nicht vor 1826 im Besitze der neuen Lehre war und sie auch 1829 noch nicht in dem Umfange beherrschte wie Johann Bolyai im Appendix, aber die Priorität der Veröffentlichung gegenüber Johann Bolyai errang. Es muß aber noch hervorgehoben werden, daß beide nichts voneinander wußten; erst zwanzig Jahre später, 1848, erhielt Johann Bolyai Kunde von seinem Nebenbuhler und nahm Stellung zu dessen „Geometrischen Untersuchungen", die 1840 in Berlin erschienen waren. Seine Bemerkungen sind zum Teil für die vorliegende

---

[1]) Simon, Euklid und die 6 planimetrischen Bücher. Leipzig, Teubner.
[2]) Gauß, Werke. Bd. 8,

Arbeit wichtig. (St. Kap. 16.) Von Gaußens Untersuchungen erhielt er Kunde durch dessen Brief vom 6. März 1832. Daß dessen Ideen etwa durch Wolfgang an Johann Bolyai übermittelt worden wären, ist ganz ausgeschlossen, dafür bürgen verschiedene Gründe, auf die ich hier nicht näher einzugehen brauche, da es für mich an dieser Stelle nicht Aufgabe ist, seine mathematischen Leistungen ins Licht zu stellen.

b) Begriff der Existenz.

Ich habe oben schon darauf hingewiesen, daß man bei der Frage nach der Existenz von vornherein deutlich scheiden kann zwischen mathematischer und physikalischer Existenz. Die letztere fragt nach der „realen" Existenz, die Frage könnte etwa so formuliert werden:

Ist zur pünktlichen Beschreibung der im physikalischen Raum (in dem mit Gegenständen erfüllten Erscheinungsraum) stattfindenden Vorgänge besser die Euklidische Geometrie geeignet oder etwa besser die von Bolyai, Lobatschefskij oder die von Riemann? — oder: Stimmen Beobachtung und Rechnung besser überein, wenn man die Euklidische Geometrie beibehält, oder leisten die Nichteuklidischen Geometrien Besseres? — oder: Hat der physikalische Raum konstantes Krümmungsmaß oder nicht, und wenn ja, ist es positiv, negativ oder null?

Ist auf eine dieser Fragen eine endgültige Antwort möglich, so ist damit die Frage nach der realen Existenz entschieden.

Und wenn sie überhaupt entscheidbar ist und irgendeinen bestimmten Raum als den wirklichen feststellt, so bleibt doch die Frage nach der mathematischen Existenz: Haben die andern Geometrien, die damit für den praktischen Gebrauch ausscheiden, nun keinen wissenschaftlichen Wert mehr? Gibt es für sie nicht noch eine rein mathematische Existenz, ganz unabhängig von Anwendbarkeit und Realisierung? — Die moderne Axiomatik bejaht diese Frage. — Mathematische Existenz = Widerspruchsfreiheit des Systems von Lehrsätzen, das aus gegebenen Axiomen streng deduktiv aufgebaut wird.

Felix Klein war der erste, der nach den Vorarbeiten von Staudt und Cayley[1]) in den Jahren nach 1870 zeigen konnte, wie man sowohl die von Bolyai und Lobatschefskij entdeckte hyperbolische, als auch die Riemannsche (elliptische) Geometrie

[1]) *Annalen, mathematische.* Bd. 4, 6, 7, 56. — Klein, *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert.*

mit der Euklidischen zusammenfassend, vom projektiven Standpunkte aus behandeln und unter einen einheitlichen Gesichtspunkt zusammenfassen kann. Er sagt: „Die Fälle, die man hinsichtlich der Gebilde 2. Grades vom projektiven Standpunkt aus zu unterscheiden hat, sind bei reellen Gleichungen:

a) Eigentliche Flächen 2. Grades:
   1. reell geradlinig (einschaliges Hyperboloid, hyperbolisches Paraboloid);
   2. reell nicht geradlinig (Ellipsoid, elliptisches Paraboloid, zweischaliges Hyperboloid);
   3. imaginär;

b) Eigentliche Kurven 2. Grades:
   1. reell (Ellipse, Parabel, Hyperbel);
   2. imaginär;

c) Punktepaar: 1. reell, 2. imaginär;

d) Doppelpunkt.

b) 2 gibt die gewöhnliche Metrik, indem man den zugrundeliegenden Kegelschnitt als Kugelkreis bezeichnet. Die Fälle a) 2 und 3 führen aber gerade zu den beiden Arten Nichteuklidischer Geometrien, welche Gauß, Lobatschefskij, Bolyai und Riemann unterschieden haben und die aus der gewöhnlichen Geometrie gewonnen werden, je nachdem man die Winkelsumme des Dreiecks kleiner oder größer als π nimmt. Also auch diese Systeme sind jetzt in die projektive Geometrie eingeordnet und verlieren alles Paradoxe. Es ist dies der einzige Weg, um zu ihren Eigentümlichkeiten und der Ueberzeugung von ihrer Widerspruchslosigkeit zu kommen". (Vorlesungen S. 150.)

Nach seinen Anregungen war Pasch der erste, der ein vollständig ausgeführtes Lehrgebäude der projektiven Geometrie, axiomatisch aufgebaut, schuf, in dem die verschiedenen Geometrien gleichberechtigt nebeneinander stehen. In derselben Richtung auf geometrischem Gebiete liegen die Arbeiten von Fr. Schur und besonders die von David Hilbert: Grundlagen der Geometrie, (3. Aufl. 1909) in dem im 2. Kapitel die Widerspruchslosigkeit und gegenseitige Unabhängigkeit der Axiomgruppen nachgewiesen wird. Die moderne Axiomatik versucht immer mehr zu systematisieren und die logischen Beziehungen in den grundlegenden axiomatischen Voraussetzungen zu klären und ein von Grund

auf einwandfrei fundamentiertes Gebäude zu errichten, wie es z. B. schon für die Arithmetik durch Peano geschehen ist.

Erst diese strenge Axiomatik hat zu zeigen vermocht, was an den verschiedenen Geometrien berechtigt ist im Sinne der Mathematik, nämlich alles, was sich aus vorgegebenen Axiomen in streng deduktiver Methode ableiten läßt. Die Axiome selbst bestimmen inhaltlich das System, das sich aus ihnen ergibt; aber dieser Inhalt ist beim axiomatischen Aufbau nicht an erster Stelle Gegenstand der Untersuchung, sondern letztlich könnte man sich unter Punkten, Geraden, Ebenen auch Dinge vorstellen, die nicht inhaltlich mit dem korrespondieren, mit dem wir durch Anschauung und Gewöhnung zu operieren pflegen[1]). Es handelt sich da hauptsächlich um zweierlei: Sind die Axiome voneinander unabhängig, insofern, daß nicht schon ein Axiom von dem andern impliziert wird? und: Ist das System als solches widerspruchsfrei, d. h. so beschaffen, daß nicht mit einer Aussage zugleich die kontradiktorische von den Axiomen impliziert wird? Daneben muß noch für das einzelne Axiom Eindeutigkeit und für das System Vollständigkeit gefordert werden.

Diese moderne Einstellung ist aber erst eine Folge der Konstituierung der Nichteuklidischen Geometrien. Erst nachdem die innere Widerspruchslosigkeit solcher Geometrien von ihren Entdeckern behauptet und z. T. auch nachgewiesen worden war, konnte das ganze Gebäude der Geometrie in immer schärferem Umreißen seiner Grundlinien in jahrzehntelanger Arbeit mehrerer Generationen so konstruiert werden, wie es uns heute in seinem axiomatischen Aufbau vor Augen steht.

II. Johann Bolyais Appendix.

a) Begriff des Systems.

Wenn man daraufhin Johann Bolyais Ansichten betrachtet, so darf es uns natürlich nicht wundern, daß man eine ähnliche präzise Formulierung noch nicht bei ihm trifft, um so mehr muß man anerkennen, daß er sachlich eigentlich schon ganz dasselbe gewollt und gesagt hat.

Schon Wolfgang wollte nach dem Vorbilde Euklids ein „System" der Geometrie schaffen. Er sagt im Tentamen I,1: „Sy-

---

[1]) Vgl.: Weber-Wellstein: *Enzyklopädie der Elementarmathematik II*, Teubner, Leipz. Berlin, 3. Aufl. 1915.

stem der Wissenschaft heißt ein in durchsichtiger Ordnung aufgebauter Inbegriff

1. strenger Definitionen . . .
2. einfachster Axiome, unter denen sich keins aus den übrigen herleiten läßt, und der
3. mit ihrer Hilfe bewiesenen Urteile". (St. II, 29.)

Von den Definitionen verlangt er, sie müssen so einfach wie möglich sein und nicht zwei Begriffe A und B derart enthalten, daß A schon B impliziert. — Und „ein Axiom ist ein solches Urteil, dessen Richtigkeit jeder gesunde menschliche Verstand ohne irgendeine andere Begründung lediglich aus der Beschaffenheit erschaut". Nun darf man zunächst annehmen, daß Johann Bolyai dieser Erklärung beistimmt, denn er nimmt nirgendwo Stellung g e g e n diese Definition des Systems, noch eines Teiles desselben, was er bei Auffassungen Wolfgangs, die ihm nicht zusagen, reichlich tut. Was er hier unter richtigen Urteilen streng genommen versteht, erklärt er natürlich nicht. Ich möchte hier Urteile interpretieren als Aussagen, die sich auf Tatsachen der Anschauung beziehen, deren Wahrheitsanspruch durch Anschauung prüfbar ist, und so ist Richtigkeit des Urteils gleichbedeutend mit Wahrheit der Aussage.

Selbstverständlich stellen die beiden Bolyai noch mit ihrer Zeit und der Vergangenheit den Wahrheitsanspruch an die Axiome als Aussagen, den man erst in neuerer Zeit in der Axiomatik zu Gunsten der Widerspruchsfreiheit des Systems fallen läßt. Nun hat Johann Bolyai das Parallelenaxiom als auf seinen Wahrheitsanspruch hin unprüfbar fallen gelassen. Er baut trotzdem ein System von Aussagen auf in seinem Appendix.

Der Appendix ist Joh. Bolyais glänzendste Leistung, trotz seiner Kürze und trotz der Beanstandungen, die man von geometrischen Gesichtspunkten aus machen kann. Wegen der verlangten Kürze schreibt der Verfasser kein Vorwort, gibt nicht die Voraussetzungen an, auf denen er aufbaut, sondern beginnt sofort mit der Definition der Asymptoten, wie er die erste Nichtschneidende nennt; doch ist es nicht schwer, sowohl aus dem Ziele, das er sich steckt, als auch aus dem Inhalt der ersten Paragraphen und den Beweisen, die er benutzt, seine Voraussetzungen zu erschließen. Sein Ziel ist, zu zeigen, daß man das Euklidische Parallelenpostulat (das 5. Postulat oder das 11. Axiom) zum Aufbau der Geometrie nicht nötig hat. Alles, was vor dem Satze 29 des ersten

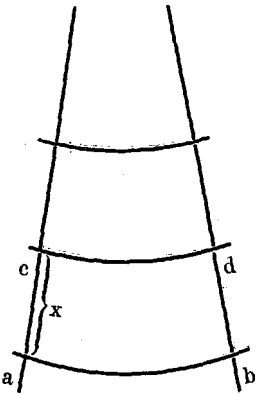
Buches von Euklid auftritt, benutzt er deshalb, da Euklid bis dahin auch sein Parallelenpostulat nicht nötig hat. Auch das, was Euklid benutzt, ohne anzugeben, benutzt er ebenso ungenannt. Die Definition der Parallelen ersetzt er durch die der Asymptoten, alles andere tritt gelegentlich mehr oder weniger deutlich zu Tage, hier beim Aufbau sowohl (§ 1—31) als bei den späteren Konstruktionen (§ 34—42).

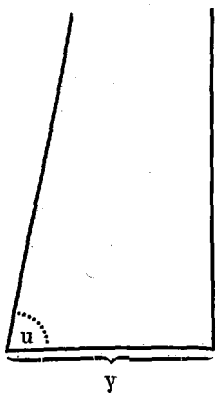
Schon damals trug er sich mit dem Gedanken, den Appendix durch eine groß angelegte Raumlehre, in der alles hier nur Angedeutete nachgeholt werden sollte, zu ersetzen. Die ersten Aufzeichnungen zur „Raumlehre" stammen aus dem Jahre 1834, die späteren aus der Zeit zwischen 1851 und 1858. Zur Vollendung ist das Werk nie gekommen. In ihm zeigt sich deutlich, wie Johann von seinem Vater beeinflußt worden ist, der, wie ich eben sagte, den Gedanken eines geometrischen Systems in voller Klarheit erfaßt und dargestellt hat.

Wie der Gedanke der Widerspruchslosigkeit des Systems als eines hinreichenden Kriteriums der Wahrheit im mathematischen Sinne von Johann schon im Anfang viel schärfer erfaßt wurde als von Wolfgang Bolyai, erhellt aus folgendem:

„Er behauptete ganz verzweifelt, daß es nur zwei Systeme gebe, nämlich entweder das Euklidische, oder wenn dieses nicht ist, ein anderes, worin die Größe des Parallelwinkels absolut bestimmt sei. . . ." (St. I, S. 87—88.) Der Bericht ist um 1834 im Vorwort zur oben erwähnten Raumlehre niedergeschrieben, er berichtet über die Zeit von 1825 und berührt sich in seinen Grundgedanken eng mit einer Bemerkung aus dem § 32 des Appendix. (St. II, S. 201.) „Da uns in Ansehung der Beschaffenheit von i bis jetzt gar nichts bekannt ist, . . . so ist es allerdings vergönnt, nacheinander beliebige verschiedene Hypothesen diesfalls zugrunde zu legen, und so verschiedene hypothetische Systeme aufzuführen". (Hypothetisch, da sich das wahre nicht bestimmen läßt.) Mathematisch sind diese Systeme in der Tat alle gleichberechtigt, da sie nur durch Variation einer Konstanten in den Voraussetzungen entstehen. Das ist u n s ganz klar, aber der damaligen Zeit, die nur das eine System Euklidischer Geometrie kannte, noch nicht.

b) Das Bolyaische i.





Das Bolyaische i, das in der Absoluten Geometrie eine ausschlaggebende Rolle spielt, ist seiner Bedeutung nach eine Länge. In § 23 führt Johann Bolyai das Verhältnis zweier Parallelen, (Linien gleichen Abstandes mit gleichen Winkeln an den Schnittpunkten zwischen zwei Asymptoten) als X ein, wenn der betreffende Abstand x ist, also $\frac{ab}{cd} = X$, wenn $\overline{ac} = x$ ist; in § 29, dem Kernstück des Appendix, leitet er die Beziehung her, die zwischen dem Lote y und dem Parallelwinkel u besteht, und findet (bei der Verwendung des großen lateinischen Buchstabens in dem oben angegebenen Sinne): $Y = \cot g\, {}^1/_2\, u$. Wenn in der Grenze z der Komplementwinkel zu u ist, so definiert er $\frac{r}{\tan g\ z} = i$, wobei 2 r der zur Sehne 2 y gehörige Bogen des Grenzkreises ist; für $y \rightarrow 0$ folgt daraus $\frac{y}{\tan g\ z} = i$, und durch Einsetzen der früher gefundenen Werte, daß das zu diesem i gehörige I (in der Bedeutung wie oben X und Y) = e, der Basis der natürlichen Logarithmen ist, was natürlich außerordentlich überraschend ist, aber von Johann Bolyai in aller Schärfe erfaßt und dargestellt wurde, besonders eingehend in den Bemerkungen zu Lobatschefskijs „Geometrischen Untersuchungen", wo diese Tatsache zwar auch vermerkt, aber nicht begründet wird.

Daß Wolfgang von „der hohen Wichtigkeit der darin durch i bezeichneten Länge keine entfernte Idee" hatte, und daß er „mit aller Ereiferung dagegen deklamierte" und „den Wert auf alle erdenkliche Weise zu schmälern" suchte (St. I, S. 87), ist mir gerade vom philosophischen Standpunkte aus interessant erschienen. Ich versuche, an einer späteren Stelle diese Einstellung Wolfgangs näher zu charakterisieren.

c) Begriff des „absolut wahren" Systems.

Johann Bolyai hatte schon 1825 seinem Vater die Ausarbeitung der Absoluten Raumlehre übergeben, überzeugt, daß

es die einzig wahre, die absolut gültige Raumlehre sei, wie es seine Bezeichnung ausdrückt und wie er es noch an verschiedenen Stellen betont. (§§ 32, 33 des Appendix, St. II, S. 202, 208, 229; Abhandlung über die imaginären Größen § 9, Eingabe an den Erzherzog Johann vom Jahre 1832.) Durch die ersten 32 Paragraphen des Appendix zeigt er, daß man eine ebene Trigonometrie in S (dem Nichteuklidischen System) aufbauen kann. „Hierdurch wäre aber hinsichtlich einer absolut wahren ebenen Trigonometrie unmittelbar noch nichts gewonnen." Er ist sich bewußt, daß er einiges zur Entscheidung zu sagen schuldig ist; denn wir wissen ja noch gar nicht, ob Σ, (das Euklidische System), oder S, und welches S, existiert.

Als erstes betont er, daß jeder Ausdruck seiner Absoluten Geometrie, der das fragliche i enthält, für $i \to \infty$ in den entsprechenden Ausdruck der Euklidischen Geometrie übergeht: „Es läßt sich jedoch (auch a priori, am leichtesten aber unmittelbar a posteriori) zeigen, daß die Grenze eines jeden, die Größe i enthaltenden und somit auf der Voraussetzung, daß es ein i gebe, beruhenden Ausdrucks bei dem unendlichen Wachsen von i genau die ausgedrückte Größe für den Fall von Σ und somit in der Voraussetzung, daß gar kein i bestehe, ausdrücke." (Appendix, § 32.) Diesen Zusammenhang zwischen Σ und S, den er an Beispielen aus der Trigonometrie, dem Umfange des Kreises, der im Falle von Σ zu $2\pi x$ wird, und anderen beweist, scheint er bloß zu konstatieren, ohne darauf weitere Schlüsse bauen zu wollen; denn er erwähnt im allgemeinen dergleichen nicht, außer in der Kritik an Lobatschefskij (St. I, S. 154): „Darum gelten bei der vorausgesetzten Gültigkeit von S alle diese Formeln unbedingt, so unbekannt es immer bleiben muß, ob eigentlich Σ oder S bestehe." Es ist gleichsam eine Beruhigung, daß Σ und S in so enger Beziehung zu einander stehen; aber einen Beweis für die Wahrheit von S bildet natürlich dieser Grenzübergang von S zu Σ nicht.

Die Behauptung der Unentscheidbarkeit ist das, was im Appendix des Johann Bolyai am deutlichsten zu Tage tritt. „Es gilt entweder die Wahrheit des 11. Axioms Euklids oder die geometrische Quadratur des Kreises, obwohl es immer noch unentschieden geblieben ist, was davon in Wirklichkeit stattfindet" (St. II, S. 215). Den Schlußsatz des Appendix bilden die Worte: „Es bliebe endlich übrig, (um den Gegen-

stand völlig zu erschöpfen), den Beweis dafür zu geben, daß es unmöglich ist (ohne irgendeine weitere Annahme), zu entscheiden, ob Σ oder irgendein (und welches) S stattfindet." (St. II, S. 216.) „Da uns in Ansehung der Beschaffenheit von i bis jetzt gar nichts bekannt ist und es vielmehr dem Verfasser gelang, (mit voller geometrischer Schärfe), zu zeigen, daß der Natur der Sache nach nie irgendein Scharfsinn es zu einer diesfälligen Erkenntnis bringen könne, so ist es allerdings vergönnt, nacheinander beliebige verschiedene hypothetische Systeme aufzuführen" (App. § 32, St. II, S. 201).

Zweierlei muß hier klar herausgestellt werden in seinen Behauptungen. Nehmen wir die letzte, so ist sie die Behauptung der Gleichberechtigung aller Systeme, die irgendeinen Wert von i zwischen 0 und ∞ zugrunde legen. Alle sind im Grunde genommen ja nur ein System, alle Gesetze und Formeln sind gleich; es variiert nur die Konstante i. Was aber ein System ist, habe ich vorhin schon gezeigt.

Wahrheit der Aussagen und damit Wahrheit des Systems selbst ist aber mehr als Widerspruchsfreiheit, indem Wahrheit des Aussagensystems die Widerspruchsfreiheit mit umfaßt. Wenn Johann Bolyai also hier sagt, daß man berechtigt ist, verschiedene hypothetische Systeme aufzuführen, so kann das nur dahin verstanden werden, daß er letzten Endes sagt: Jedes dieser Systeme ist in sich gleichberechtigt, weil es auf wahren Aussagen (den übrigen Axiomen) durch strenge Schlüsse aufgebaut wird. Es ist infolgedessen widerspruchsfrei. Das Hypothetische wird hereingetragen durch die unbestimmte Konstante i. Sobald diese Unbekannte in irgendeiner Weise bestimmbar ist, ist ein System als das allein „wahre" ausgezeichnet.

Diese Variable i tut aber der Wahrheit des Systems, richtiger: der Widerspruchsfreiheit, durchaus keinen Abbruch; im Gegenteil: und das ist die zweite immanent wichtige Behauptung Johann Bolyais, man kann es durch logische Schlüsse auf keinerlei Weise zur Entscheidung bringen, ob irgendein i und welches i in Wirklichkeit gilt. Darauf muß ich gleich noch des Näheren eingehen. Um den vorigen Gedanken zum Abschluß zu bringen: Darum, weil wir die Entscheidung dahingestellt sein lassen, haben wir jetzt eine absolut wahre Raumlehre. So Appendix § 33: „Man hat nunmehr eine absolut wahre, d. h. von aller Voraussetzung (in bezug auf das unent-

scheidbare 5. Postulat!) freie ebene Trigonometrie, worin jedoch die Größe i und ob sie vorhanden ist, durchaus unbestimmt bleibt, bis auf diese einzige Unbekannte alles bestimmt ist." (St. II, S. 202.) Dieser absolute Wahrheitscharakter gründet sich also darauf, daß über das 5. Postulat keinerlei Voraussetzung gemacht wird, (vergl. auch die Stellen über die sphärische Trigonometrie, die absolut gilt, da sie unabhängig vom Parallelenpostulat aufgebaut werden kann), also: Absolut wahr = unabhängig vom Parallelenpostulat und widerspruchsfrei. Daß Bolyai diese Widerspruchsfreiheit in der Tat mit der Bezeichnung „absolut wahr" gemeint hat, liegt nach meiner Meinung darin, daß er diese beiden Behauptungen: 1. Unbestimmbarkeit des i, also eine Unbestimmtheit in den Axiomen, und 2. gerade deswegen eine absolut wahre Raumlehre, häufig miteinander kombiniert. (App. § 32, 33.) Eine Leerstelle in den Axiomen aber, in die nacheinander beliebige hypothetische Werte von i gesetzt werden können, ist nur verträglich mit der Widerspruchsfreiheit des Systems. Seine Geometrie ist daher kein System von apodiktischen Aussagen, sondern nur ein System von Wenn-So-Aussagen mit der Variablen i im Vordersatz.

Das ist die rein logische Sachlage; oder wenn man hinzunimmt, daß die Elemente der Aussagen geometrische Gebilde sind, die mathematische. Ich möchte sie noch einmal so formulieren:

Aus Definitionen und Axiomen (den Euklidischen bei Bolyai) läßt sich, ohne daß über das Parallelenaxiom eine Entscheidung getroffen wird, und ohne dessen Benutzung eine in sich widerspruchsfreie Geometrie aufbauen. Durch die offen bleibende Frage nach der Wahrheit des Parallelenpostulats kommt eine Länge i in alle Formeln des Systems hinein. Da grundsätzlich eine Entscheidung über die Größe des i unmöglich ist, bin ich logisch berechtigt, alle möglichen Werte (reellen bei Bolyai) von i als gleichberechtigt zu betrachten und erhalte so, wenn diese unendlich vielen möglichen Werte von i jeweils eingesetzt werden, unendlich viele hypothetische Systeme, deren keines vor dem andern bevorzugt ist.

Das sagt er, um noch eine Stelle anzugeben, mit großer Klarheit in der lateinischen Fassung: „Verändern kann man nur die Hypothese, was nacheinander so lange geschehen kann, bis

wir nicht ad absurdum geführt werden." Darin liegt ja deutlich, daß er für sein System zunächst nur die Widerspruchsfreiheit in Anspruch nimmt.

Von Johann übernimmt Wolfgang Bolyai diese Ueberzeugung. „In Wahrheit läßt sich die ganze Geometrie Euklids als ein einziger Lehrsatz ansehen, wenn man sagt: Wird A gesetzt, so ist auch G gesetzt (unter A das 11. Axiom, unter G die Geometrie verstanden). Jedoch darf mit gleicher Berechtigung das, was gesetzt werden muß, und das Gegenteil davon gesetzt werden; denn alle übrigen Axiome vertragen sich in gleicher Weise sowohl damit, daß u ein Rechter sei, als auch damit, daß es kleiner ist. . . . So entstehen zwei Systeme, . . . jedes von beiden ist wahr. . . . Wenn daher beide Systeme ausgearbeitet sind, so gibt es, obwohl sich mittels der übrigen Axiome nicht entscheiden läßt, welches in Wirklichkeit gilt, in dem Sinne eine Geometrie, daß nicht allein jedes der genannten Systeme auf Grund seiner Voraussetzungen wahr ist, sondern daß es auch unbedingt wahr ist, daß eines von beiden in Wirklichkeit gilt" (Tentamen IV, § 16, St. II, S. 95).

So dachte Bolyai sicher in der Zeit von 1825—1837. Daß und warum ihm später Zweifel an dieser Behauptung kommen, möchte ich an dieser Stelle noch nicht erörtern, sondern erst untersuchen, worauf sich die Behauptung der Unentscheidbarkeit für ein bestimmtes System stützt, die im Vorhergehenden benutzt wurde; denn es ist wesentlich, daß er die Entscheidung für oder gegen als vollkommen unmöglich behauptet; denn dadurch bin ich gezwungen, alle Systeme mit endlichem i als logisch gleichwertig dem einen System mit unendlichem i zu betrachten. Er behauptet an verschiedenen Stellen, den strengen Beweis dafür zu haben, daß es „absolut unmöglich sei, dem menschlichen Auge, es einzusehen, ob das 11. Axiom wahr sei oder nicht". (Wolfgangs Brief an Gauß, St. I, S. 102, Appendix Schlußsatz, § 33, 3. Abschn.).

III. Die Gleichberechtigung aller widerspruchsfreien Systeme.

Man kann, glaube ich, seine Ueberzeugung von der Unentscheidbarkeit auf folgende Argumente zurückführen: 1. Unsere Raumanschauung gibt uns keine Auskunft über das i. Jedes System mit hinreichend großem i ist mit der Anschauung verträglich. 2. Keine Annahme über das i beeinflußt die Wider-

spruchsfreiheit der Absoluten Geometrie. 3. Die Prüfung durch die Erfahrung gibt keine Entscheidung.

a) Die Unentscheidbarkeit a priori.

Ich werde zuerst die zweite Begründung diskutieren, da sie eine Stütze für meine vorige Interpretation: Absolut wahr = widerspruchsfrei und unabhängig vom 5. Postulat ist. Angenommen: Es gibt ein endliches i, dann darf das auf diese Annahme streng logisch gebaute System zu keinem Widerspruch führen. Läßt sich an irgendeiner Stelle ein solcher aufdecken, so ist die Annahme des endlichen i ganz sicher falsch. Der bekannte W.-F.-Beweis in der Mathematik. Diesen sucht Johann Bolyai zu führen, um zu einer Entscheidung für oder wider die Existenz des i zu gelangen.

Für die ebene Trigonometrie gelingt es ihm, die W.-F. des Systems dadurch zu erweisen, daß er den Zusammenhang mit der sphärischen Trigonometrie aufdeckt. Der Gedankengang ist folgender: Die sphärische Trigonometrie wird im § 26 des Appendix absolut (unabhängig vom 5. Postulat) aufgebaut; man erhält ganz die gleichen Formeln wie beim Ausgang von der Euklidischen Voraussetzung, da die spezifisch euklidische der Endlichkeit der Geraden und des Parallelwinkels gleich $\frac{\pi}{2}$ ja von vornherein wegfällt. Wir könnten nach unserem heutigen Sprachgebrauch sagen: die sphärische Trigonometrie ist für Kugeln im hyperbolischen Raum (einen solchen betrachtet Bolyai ja nur) ganz die gleiche wie für Kugeln im Euklidischen Raum; beide sind identisch, also entweder gleich wahr oder gleich falsch. Die sphärische Trigonometrie im Euklidischen Raum wird als widerspruchsfrei angenommen; denn sie ergab bis jetzt nur richtige Resultate.

Die Absolute e b e n e Trigonometrie erhält man ferner aus der sphärischen, indem man die Seiten des Dreiecks als imaginär betrachtet. Man kann etwa die Größe r, durch die man die Seiten des sphärischen Dreiecks teilen muß, damit gilt

$$\cos \frac{c}{r} = \cos \frac{a}{r} \cdot \cos \frac{b}{r}$$

als Parameter auffassen. Setzt man dann den Parameter reell, so hat man die Formeln der sphärischen Trigonometrie, nimmt man ihn imaginär, wozu man von mathematischen Gesichtspunkten aus berechtigt ist, so erhält man die Absolute ebene

Trigonometrie. Unter der Voraussetzung also, daß man das Imaginäre in der Mathematik überhaupt zuläßt, muß man auch die Absolute ebene Trigonometrie und damit die Absolute Geometrie der Ebene überhaupt zulassen; denn die W.-F. des Systems kann durch die Einführung des imaginären Parameters nicht aufgehoben werden.

Die Einsicht in diese Zusammenhänge kam Johann schon bei der Abfassung des Appendix, wie er in dem Briefe aus Lemberg, entweder 1830 oder 1831, jedenfalls noch vor der Drucklegung des 2. Bandes des Tentamens schreibt. In diesem Brief macht er seinen Vater auf diese Uebereinstimmung aufmerksam. (Vgl. St. I, S. 103 und Wolfgangs Zusatz zum Appendix, St. II, S. 216, Responsio § 9, St. II, S. 229). „So werden beide Trigonometrien höchst einfach in eine zusammengezogen" (St. I, S. 103). „Die Formeln der sphärischen Trigonometrie, die in dem genannten Appendix unabhängig vom 11. Euklidischen Axiom bewiesen werden, stimmen überein mit den Formeln der ebenen Trigonometrie, wenn die Seiten des sphärischen Dreiecks als reell, die des gradlinigen als imaginär angesehen werden, so daß die Ebene in Beziehung auf die trigonometrischen Formeln als eine imaginäre Kugel betrachtet werden kann" (St. II, S. 216). Bis zum Jahre 1837, aus dem die Responsio stammt, hat er, wie es scheint, eine noch größere Klarheit gewonnen. Er sieht, daß dieselbe Geometrie auf allen „gleichförmigen Flächen" herrscht. Solche gleichförmigen Flächen sind die Kugeln, die F-Flächen (Kugelflächen mit ∞ Radius, die im Falle von Σ gleich der Ebene sind, in S aber nicht), die Ebenen in S und die Hypersphären in S, (die von der Ebene gleich weit abstehenden Flächen, die in der Absoluten Geometrie in S keine Ebenen sind). Es sind diese Flächen alle Flächen konstanten Krümmungsmaßes, wie man nach Riemann sagt. „Die Theorie aller dieser Flächen kann von ganz denselben Formeln umfaßt werden, und es können von ihnen allen ganz entsprechende Lehrsätze gelten" (Zettel bei der Responsio 1855). Hinweise auf diese Zusammenhänge finden sich noch in Randbemerkungen zum Appendix (St. I, S. 108), die vielleicht schon aus dem Jahre 1837 stammen. Auch Wolfgang Bolyai erwähnt im § 60 des „Kurzen Grundrisses" 1851 in sich verschiebbare Flächen.

Stäckel macht darauf aufmerksam, daß man nicht glauben darf, Johann habe die Entdeckung Beltramis vorweg genom-

men, daß jede der drei Geometrien: Elliptische, Euklidische und Hyperbolische auf einer entsprechenden Fläche konstanten Krümmungsmaßes im Euklidischen Raum verwirklicht ist (vgl. St. I, S. 109). Und das ist bei ihm aus dem Grunde nicht der Fall, weil er eine Geometrie mit der Voraussetzung des Parallelwinkels $> \frac{\pi}{2}$ vollständig ausschaltet, worauf ich schon eingangs hinwies. (Es ist auch wohl ein Beweis dafür, daß er Saccharis und Lamberts Untersuchungen nicht kannte, die das schon gesehen hatten).

Johann konstatiert also einerseits die Tatsache, daß die sphärische Trigonometrie in Σ und S die gleiche ist, und daß man andererseits von dieser sphärischen Trigonometrie durch Veränderung des Parameters zur Absoluten Geometrie jeder gleichförmigen Fläche gelangt; unter ihnen enthält eine (die F.-Fläche) die Euklidische als Spezialfall. Für Bolyai ist dies nur ein Beweisgrund für die W.-F., wie ich oben hervorhob und wie er es z. B. ausdrücklich noch sagt: „Man erhält bei der Analyse eines Systems in der Ebene offenbar ganz dieselben Formeln wie auf der Kugel, und da nun auf der Kugel bei vollständiger Analyse stets Konsequenz gefunden werden muß, da die Kugeltrigonometrie absolut gilt, so ist klar, daß ebenso in der Ebene bei jeder Betrachtung von Punktsystemen ewig Konsequenz bestehen müsse". Diese Aufzeichnung stammt aus den letzten Jahren, 1855—1858. Die Betonung der „ewigen Konsequenz" ist mir ein Beweis dafür, daß er die Behauptung der W.-F. seines Systems für die Ebene immer aufrecht erhalten hat. In den kritischen Bemerkungen zu Lobatschefskij aus den Jahren 1848—1851 wird diese Uebereinstimmung an verschiedenen Stellen hervorgehoben (St. I, S. 146, 149, 157, W.B. im Tentamen §10, St. II, S. 71).

Durch die Berufung auf diesen Zusammenhang ist das Problem: Beweis der W.-F. allerdings noch nicht vollständig gelöst; sondern es ist nur zurückgeschoben auf die W.-F. des sphärischen Systems, in dem sich allerdings kein Widerspruch nachweisen läßt. So führt also die Annahme, i sei endlich, auf keinen Widerspruch, ebensowenig führt aber auch die Annahme, i sei unendlich, auf einen Widerspruch. Die Untersuchung des Systems selbst gibt also keine Entscheidung. Die Tatsache der W.-F. der beiden Systeme ist ein Beweis für die Unentscheidbarkeit zwischen den Annahmen, die beiden zugrunde liegen.

Eine Entscheidung in dieser Art durch Aufdecken eines Widerspruchs nennt Johann Bolyai (auch Wolfgang) eine Entscheidung a priori. Sie wird also durch Deduktion aus gegebenen Grundsätzen, die der unmittelbaren Anschauung entnommen sind, gesucht und wäre erreicht, wenn eine Hypothese ad absurdum geführt wird. Wolfgang sagt, nachdem er sich mit dem Gedanken der Nichteuklidischen Geometrie vertraut gemacht hatte, in diesen Gedankengängen: „Jedes der beiden Systeme ist wahr, je nach dem $u =$ oder $<$ R gesetzt wird, das eine unter der Bedingung, daß $u = R$ ist, das andere, daß $u < R$ gesetzt wird . . ., ja es entstehen sogar unzählige Systeme, je nach der Größe, die für u . . . vorausgesetzt wird". Besser wäre ja auch hier „wahr" mit „widerspruchsfrei" gleich zu setzen, wie es gemeint ist. „Wenn daher beide Systeme ausgearbeitet sind, so gibt es, obwohl sich mittels der übrigen Axiome nicht entscheiden läßt, welches in Wirklichkeit gilt, in dem Sinne eine Geometrie, daß nicht allein jedes der genannten Systeme auf Grund seiner Voraussetzungen wahr ist, sondern daß es auch unbedingt wahr ist, daß eines von beiden in Wirklichkeit gilt" (St. II, S. 95—97). Dasselbe sagt er 1858 im „Kurzen Grundriß eines Versuches", wo er in den „Gründen der Geometrie" sich ähnlich ausdrückt (St. II, S. 150).

Dieser Entscheidung, die a priori nicht möglich ist, stellt Wolfgang an beiden zitierten Stellen die Messung a posteriori gegenüber, auf die ich sogleich eingehen werde; er charakterisiert diese Aussagen übrigens ausdrücklich als die seines Sohnes.

Zunächst muß noch untersucht werden, ob nicht noch eine andere Möglichkeit besteht, a priori über das i selbst irgendeine Bestimmung zu entdecken und damit über die Möglichkeit einer Absoluten Geometrie. Dieser Untersuchung hat sich Johann Bolyai lange gewidmet; aber welchen Weg er auch ging, welche Beziehungen zwischen Seiten und Winkeln er aufstellte und berechnete, es ergab sich nur, daß i eine „quantitas pura", nicht „mixta" sei (keine komplexe Zahl), und zwar, daß es reell sei. Diese letzte Bestimmung kann nur aufrecht erhalten werden, wenn man von vornherein die Möglichkeit eines Parallelwinkels $> \frac{\pi}{2}$ ausschließt. Denn setzt man in den Formeln, die Johann Bolyai für die ebene Trigonometrie gewinnt, das i als imaginär voraus, so erhält man Formeln, die mit denen der sphärischen

Trigonometrie identisch sind. Man kann also auf diese Weise auch einen einfachen Uebergang gewinnen von der Absoluten Trigonometrie der Ebene zur elliptischen Geometrie. Diese Möglichkeit scheint Bolyai nicht gesehen zu haben; er baut nur die sphärische Trigonometrie absolut auf und gewinnt von ihr den Uebergang zur Trigonometrie der Ebene, nicht in dem oben angegebenen Sinne umgekehrt. Er hätte ihn sehen müssen, wenn er nicht mit Euklid den Parallelwinkel $> \frac{\pi}{2}$ ausgeschlossen hätte. Seine Behauptung, i sei eine „quantitas pura", besteht aber zu Recht. Weiter konnte er es bei allem Scharfsinn und aller Mühe nicht bringen (Brief v. 15. Apr. 1835, St. I, S. 119). „Es wäre also nur noch, daß man noch mehr wie dieses in bezug auf i nicht bestimmen kann". Der strenge Beweis für seine Behauptung, daß es unmöglich sei, a priori etwas über i zu bestimmen, findet sich aber nicht, obschon er behauptet, ihn zu besitzen.

Was sich findet, sind Behauptungen: „Durch die Trigonometrie geht es also nicht. Bei aller Anwendung derselben findet man nur Gereimtheiten (W.-F.!) im unbestimmten Systeme, nie erfolgt die Bestimmung des Systems daraus. Womit dann der Beweis der Unmöglichkeit, i zu bestimmen, vollendet ist". Daß es in der Tat unmöglich ist, aus den vorgegebenen anderen Axiomen, d. h. aus dem System selbst, i zu bestimmen, folgt aus der logischen Nebenordnung aller Systeme, die i enthalten und die in sich widerspruchsfrei sind, nicht aber daraus, daß bei aller möglichen Anwendung keine Bestimmung für i erfolge; denn er kann schlechterdings nicht behaupten, daß deswegen, weil er durch viele Versuche alle Mittel erschöpft zu haben glaubt, diese nun tatsächlich auch erschöpft sind.

„Es liegt eben in der Natur der Sache, daß dieses nicht durch logische Schlüsse, nur durch unmittelbare Anschauung erkannt werden könne". „Ob die Euklidische Raumlehre oder irgendein antieuklidisches System in der Wirklichkeit bestehe, läßt sich durch keine logischen Schlüsse entscheiden, . . . ob i endlich oder unendlich sei, bleibt jedem Verstande, welchem es nicht unmittelbar klar ist, ein unenthüllbares Geheimnis" (St. I, S. 121). An der Unmöglichkeit, eine Entscheidung a priori herbeizuführen, hat er Zeit seines Lebens festgehalten. „Die Raumlehre", deren erste drei Teile in den letzten Jahren seines Lebens ziemlich druck-

fertig ausgearbeitet wurden, trägt noch den Titel „Raumlehre oder Geometrie unabhängig von der, hierin erwiesenermaßen durch endliche vernünftige Wesen a priori nie entschieden werden könnenden, sondern nur Gott bewußten und auch selbst dem Allwissenden nur durch unmittelbare Anschauung offenbaren, Wahr- oder Falschheit des berüchtigten 11. Euklidischen Axioms . . ." (St. II, S. 237).

Der Gebrauch des Ausdruckes „a priori" stimmt in diesen beiden Fällen: Aufdecken eines Widerspruchs und Aufsuchen einer positiven Bestimmung für i mit dem Kants überein, wie man aus diesen Ausführungen sieht. Auch bei Bolyai heißt a priori = erfahrungsunabhängig = durch Deduktion aus gegebenen Urteilen gewonnen. Da die geometrischen Axiome nach Kant synthetische Urteile a priori sind, kann er für seine Absolute Geometrie in § 33 des Appendix behaupten: „Es gibt also eine ebene Trigonometrie a priori, worin allein das wahre System unbekannt bleibt" (St. II, S. 208). Beide Ausdrücke „a priori" und „durch logische Schlüsse" werden gleichbedeutend gebraucht, so in dem vorhin zitierten Titel der Raumlehre und bei Stäckel I, S. 125.

Die Unentscheidbarkeit a priori wird von Wolfgang ebenso betont wie von Johann Bolyai, nachdem er mit dessen Ideen sich allmählich vertraut gemacht hatte. Alle seine diesbezüglichen Ausführungen sind letztlich Gedanken Johanns. In dem § 16 des Tentamen, der über die Parallelen handelt, findet sich mehrere Male die Behauptung der Unentscheidbarkeit aus den übrigen Axiomen. „Wenn daher beide Systeme (Σ und S) ausgearbeitet sind, so gibt es, obwohl sich mittels der übrigen Axiome nicht entscheiden läßt, welches in Wirklichkeit gilt, in dem Sinne eine Geometrie . . . Obwohl uns die Größe von u in concreto gleichsam vor Augen steht, so läßt sich darüber dennoch a priori nichts entscheiden, außer daß sie nicht 0 und nicht größer R ist . . . Da sich aber alle jene Ausdrücke von Größen, die im ganzen Raume von der Größe des u abhängen, mit den übrigen Axiomen in gleicher Weise vertragen, . . . so läßt sich die Größe von u aus denselben Axiomen nicht bestimmen. . . . Will man aber keins der vorgeschlagenen unter die Axiome aufnehmen, so gibt es zwar eine Geometrie, aber die Größe von u wird immer unentschieden bleiben; die reine Quelle der Wahrheit liegt in der Ewigkeit und lockt uns durch die Nacht der Gräber zum Lichte, während es sterblichen Lippen nicht vergönnt ist, davon zu trinken"

(St. II, S. 95—99). Auch im „Kurzen Grundriß" sagt er ähnlich (St. II, S. 153).

b) Die Unentscheidbarkeit a posteriori.

Der Prüfung a priori stellen die beiden Bolyai diejenige a posteriori gegenüber; und um die Erklärung des Ausdrucks vorweg zu nehmen, kann man ganz allgemein sagen, daß sich auch bei ihnen der Begriff im allgemeinen mit dem Inhalt füllen läßt, den Kant ihm gegeben hat: a posteriori = abhängig von der Erfahrung.

Am deutlichsten tritt die Bedeutung dieses Ausdrucks in der Auseinandersetzung Johann Bolyais mit Lobatschefskijs „Geometrischen Untersuchungen" zu Tage, wo er zu dessen Messungen Stellung nimmt. Der Sinn liegt hier auf der Hand, indem durch Messungen im physikalischen Raum unter Benutzung der feinsten Meßinstrumente, der größtmöglichsten Entfernungen, der günstigsten metereologischen Bedingungen untersucht werden soll, welche Geometrie in diesen Dimensionen die richtige ist. Als Fehlergrenze berechnet er $^1/32$ Sek., d. h. um so viel dürfte die Winkelsumme im Dreieck von 2 R abweichen, ohne daß deshalb die Euklidische Geometrie ungültig zu sein brauchte. „Aber nehmen wir an, daß man mit der Zeit durch noch schärfere Fernrohre $^1/100$ Sek. erreichen könne. . . . Wenn man im größten irdischen Dreieck die Winkelsumme gleich 2R — $^1/100$ setzt und dann die bis dahin beobachtete Uebereinstimmung der wirklichen und der berechneten Bewegung der Himmelskörper aufhört und der Widerspruch mit dem Unterschiede von 2 R eine Weile wächst, so kann man daraus mit Recht schließen, daß in dem genannten Dreieck die Winkelsumme weniger als $^1/100$ Sek. von 2 R verschieden ist". Aber bei diesen Messungen spielen die Störungsfaktoren eine zu große Rolle; insbesondere ist die atmosphärische Strahlenbrechung so unberechenbar, daß es ganz und gar unmöglich ist — weder in dem Falle, daß die Winkelsumme genau 2 R ergibt, als auch wenn sie mehr oder weniger groß gefunden würde — dadurch eine Entscheidung herbeizuführen; denn „wenn wir auch die Winkel und damit die Winkelsumme möglichst genau abmessen und genau 2 R bekommen, wer kann nun versichern, daß die atmosphärische Strahlenbrechung und der Einfluß anderer unberechenbarer Umstände keine auch für uns merklichen Fehler verursacht? Umgekehrt, wenn

die Winkelsumme, sagen wir um 16 Min., weniger gefunden würde, . . . wer kann dann behaupten, daß ein solches, oder daß überhaupt irgendein S richtig sei und nicht Σ? Ja, es könnte sogar bei den Messungen das ganz naturwidrige Resultat herauskommen, daß die Summe größer 2 R" (naturwidrig nicht mehr im Riemannschen Raum). „Mithin kann durch irdische Messungen nicht entschieden werden, ob Σ oder irgendein S gilt" (St. I, S. 156).

Wolfgang hatte ähnliches schon im Tentamen gesagt. „Anders steht es, wenn der Gegenstand nicht a priori, sondern hinsichtlich der Praxis betrachtet und der Winkel der Geraden $\overline{ac}$ für eine Gegebene $\overline{ab}$, solange jene noch die Gerade $\overline{bd}$ schneidet, a posteriori gemessen wird; dann wird es wenigstens a posteriori feststehen, daß u von einem Rechten für so große Linien, wie wir erproben können, nicht erheblich verschieden ist. Wie stände es aber, wenn $\overline{ab}$ bis zum Sirius verlängert würde oder noch weiter? Wie dem auch sei, so kommt die Zeit, die seit Ewigkeit verschwisterte Genossin des Raumes, diesem zu Hilfe, und ermahnt, da die Bewegungen der Himmelskörper mit den Rechnungen übereinstimmen, die auf der Annahme u = R beruhen, für den ganzen Bereich unserer Messungen in der Praxis bei dieser Annahme unbedenklich stehen zu bleiben" (St. II, S. 96).

Johann Bolyai sagt, auch die Massenanziehung der Gestirne, die reziprok zum Quadrat der Entfernung wächst, möge mit der Voraussetzung, daß die Winkelsumme gleich 2 R sei, dazu benutzt werden, den Ort der Himmelskörper zu bestimmen. Läßt man dann eine kleine Abweichung von dieser Winkelsumme zu, so wird sich zeigen, „daß man mit einer im ganzen Gebiete unserer praktischen Untersuchungen ausreichenden Genauigkeit, aber freilich nie und nirgendwo mit theoretischer Genauigkeit, Σ annehmen darf" (St. I, S. 156).

Man sieht aus diesen Aeußerungen, die sich nur bei dieser Gelegenheit bei ihm finden, daß er der Entscheidung im physikalischen Raum keinen großen Wert beilegt. Da die Messungen die benötigte Genauigkeitsgrenze nicht erreichen können, scheiden sie nach seinem Urteil aus, wenigstens so lange, „bis die gewonnenen Ergebnisse nicht durch Verbesserung der optischen und Meßinstrumente geändert werden" (St. I, S. 157). In seiner Frühzeit erwähnt er dergleichen überhaupt nicht. Erst in seiner

Spätzeit nimmt er, veranlaßt durch Lobatschefskijs „Geometrische Untersuchungen", Stellung dazu. Wirklich mit ihm gegangen ist nur die Frage nach der logischen (mathematischen) Möglichkeit seiner Absoluten Geometrie, von der er in bezug auf die Ebene überzeugt war, die nachzuweisen für den Raum ihm nicht gelang.[1])

Als Mathematiker mußte er nach einer Lösung dieser Entscheidungsfrage auf apriorischem Wege suchen, auf dem er zu dem Resultate kam, „ob an sich eigentlich Σ oder S bestehe, bleibt hier (und, wie der Verfasser beweisen kann, für immer) gänzlich und schlechterdings unentschieden" (Appendix § 33, St. II S. 201).

In einem Briefe aus dem Jahre 1835 erwähnt er noch einen andern Weg, der a posteriori, aber auf mathematischem Wege, zum Ziele führen könnte, nämlich durch Konstruktion, Aufzeigen und Messen der konstruierten Größen in der Anschauung, also durch Erfahrung. „Wenn wir ein vollkommenes planum, eine vollkommene recta machen könnten, und einen eben solchen circinus, dann könnten wir a posteriori (und in dieser Form auch nur so) i wenigstens approximativ determinieren". Wenn wir also die genannten Größen konstruieren könnten, so wäre damit auch das i konstruierbar und damit wenigstens approximativ in seiner Größe bestimmbar. „Wir könnten (so unmöglich es auch ist, ein vollkommenes planum etc. zu machen) mit einer, in Rücksicht auf das vorgesteckte Ziel, für die Praxis durchaus genügenden Akkuration i konstruieren" (St. I, S. 120).

In demselben Sinne gebraucht er, wenn auch zu anderem Zwecke, den Ausdruck „a posteriori" = „durch Anschauung" in der Raumlehre, 2. Teil § 7; doch gehe ich darauf nicht näher ein.

Damit ist die Frage, ob die Entscheidung a posteriori getroffen werden kann, erledigt. Um vollständig zu sein, kann ich hier noch erwähnen, daß der Ausdruck a posteriori auch einmal in seinem ursprünglichen Sinn von ihm gebraucht wird. „Es läßt sich jedoch (auch a priori am leichtesten aber unmittelbar a posteriori) zeigen, daß die Grenze eines jeden die Größe i enthaltenden . . . Ausdrucks bei dem unendlichen Wachsen von i genau die ausgedrückte Größe für den Fall von Σ ausdrücke".

[1]) Ueber den gegenwärtigen Stand der Frage nach der Möglichkeit einer physikalischen Entscheidung zwischen den zur Konkurrenz zugelassenen Geometrien vgl. die ausgezeichnete Diskussion dieser Frage bei H. Reichenbach, *Philosophie der Raum-Zeitlehre* (Berlin 1928).

(Appendix § 32). In diesem Zusammenhang heißt also a posteriori = nachträglich zeigen, daß die vorgegebenen Formeln der Absoluten Geometrie durch Grenzübergang in die bekannten Formeln der Euklidischen Geometrie übergehen. Die Versinnlichung dieser Formeln durch schriftliche Zeichen kann in diesem Falle nicht gleichbedeutend gesetzt werden mit „durch Erfahrung prüfen"; denn sie sind ja vollkommen unwesentlich, die Operationen sind rein logischer Art und bedürfen dieser Anschauung zu ihrem Vollzuge durchaus nicht.

Wir haben also bis jetzt folgendes Ergebnis: 1. Es läßt sich niemals durch rein logische Schlüsse aus den übrigen Axiomen bestimmen, welches System den Anspruch auf Wahrheit machen kann. Denn alle sind gleich widerspruchsfrei.

2. Auch durch Messungen a posteriori ist keine Entscheidung möglich; es bliebe noch

3. die Möglichkeit einer Lösung durch die von Kant betonte reine Anschauung.

c) Die Unentscheidbarkeit durch die reine Anschauung.

Kant zufolge ist ja der Raum nur eine Form der Anschauung, und die geometrischen Axiome sind notwendige synthetische Urteile a priori. Gibt nicht demzufolge die reine Anschauung Auskunft über das umstrittene Axiom? In vorhergehenden Zitaten (S. 22, 23) wird schon die Antwort gegeben, aber ich möchte noch versuchen, den Gedanken der beiden Bolyai in bezug auf diese Frage näherzukommen. Ich habe im Anfang schon darauf hingewiesen, daß Wolfgang sich nur sehr schwer zu der Leistung seines Sohnes bekennen wollte. Erst eigentlich die „Autorität" Gauß war es, die in dem Briefe vom 6. März 1832 ihn überzeugte. (Gauß Werke. Bd. 8 und Leipz. Berichte, 1907, letztere enthalten den vollständigen Brief in Faksimile.) Wolfgang Bolyai war sehr stark philosophisch eingestellt, er war Philosoph in vielleicht noch höherem Grade, als er Mathematiker war.

Er war in Deutschland mit der Kantischen Philosophie bekannt geworden; das zeigen manche Stellen aus dem Tentamen, besonders in seiner Auffassung von Raum und Zeit, z. B. in der Einleitung (St. II, S. 28). „Die Beschaffenheit dieser letzten Orte, nämlich der Zeit und des Raumes, wie sie in der Anschauung vermöge der Abstraktion zurückbleiben, erforscht die reine Mathematik, aus der die angewandte hervorgeht. Jedes von beiden (Raum und Zeit) wird aus der Verknüpfung der Vor-

stellungen abgesondert, damit es Gegenstand des Denkens sein kann; ob diese durch die Vorstellungen sozusagen vorausgesetzten und gleichzeitig mit ihnen entstandenen Orte außerhalb der Anschauung Realität haben, wird hier weder bejaht noch verneint". Die gesperrten Stellen berühren sich mit dem, was Kant in seiner „Kritik der reinen Vernunft" in der Elementarlehre über Raum und Zeit sagt: „. . . wenn man von diesen Gegenständen abstrahiert, eine reine Anschauung, welche den Namen Raum führt". (a. a. O. A^2, S. 43.) Ob sie „außerhalb der Anschauung Realität haben", läßt Bolyai dahingestellt. Entweder will er Kant überhaupt nicht beipflichten, wenn dieser sagt: „Raum und Zeit gelten, als Bedingungen der Möglichkeit, wie uns Gegenstände gegeben werden können, nicht weiter, als für Gegenstände der Sinne, mithin nur der Erfahrung; über diese Grenze hinaus stellen sie gar nichts vor; denn sie sind nur in den Sinnen, und haben außer ihnen keine Wirklichkeit", (a. a. O., S. 148) oder aber er ist durch die Möglichkeit einer Absoluten Geometrie, die ihm bis zur Drucklegung des Tentamen schon näher getreten war, zweifelnd daran geworden, daß der Raum nur eine Form der äußeren Anschauung sei. Wie dem auch sei, so sei zur Charakterisierung seiner Auffassung noch die Einleitung zum „Baum der Arithmetik und der Geometrie", dem 5. Teile des Tentamen, angeführt: „Von den äußeren und inneren Vorstellungen gelangt man auf dem Wege der Abstraktion zu den Urständen von jeglichem, was in der äußeren Welt vorhanden ist, und was in der äußeren und inneren Welt geschieht, zu Raum und Zeit, die wir teils gesondert, teils vereinigt betrachten. Wird nämlich von der äußeren Welt jeder Körper von dem Orte, den er einzunehmen scheint, weggenommen und fragt man, was übrig bleibt oder was darüber hinaus noch existiert, so entsteht die Anschauung des reinen Raumes, und wenn sich dasselbe an verschiedenen Orten oder Verschiedenes an demselben Orte befindet, oder wenn verschiedene Vorstellungen in demselben vorstellenden Wesen auftauchen, so entsteht die Anschauung der Zeit" (St. II, S. 110).

In dem „Kurzen Grundriß" vom Jahre 1851 trägt er den Gedanken in der Form vor: „Der Begriff des Raumes entsteht durch Wegdenken aller Erden und Sonnen: es ist der Ort der ganzen Außenwelt. . . . Die Anschauung zeigt ihn ringsum unendlich, ewig, stetig, homogen, unwandelbar, so daß kein Teil an-

dere Veränderungen erfahren kann, als daß er bald einem, bald einem anderen Beweglichen zum Orte dient" (St. II, S. 153, § 34).

Dieselben Eigenschaften nennt er im § 1 des „Allgemeinen Grundrisses" (Tentamen IV): „Die unmittelbare Anschauung zeigt folgendes: Der Raum ist eine Größe, ist ein Kontinuum, nach allen Seiten unendlich (vergl. Kant, a. a. O., S. 39, 455 bis 463), ewig, alle seine Teile sind stets gegenwärtig, außerdem ist er einzig und unwandelbar als Ganzes wie hinsichtlich jedes Teiles, abgesehen davon, daß darin seine Teile, nämlich ihre Oerter vertauscht werden können" (St. II, S. 49). Aehnliche Eigenschaften für die Zeit. Unter Anschauung wird er hier die reine Anschauung im Sinne Kants verstehen; denn einen Grund zu diesen Behauptungen für die Eigenschaften gibt er nicht an; der Raum der Anschauung h a t diese Eigenschaften.

Die Unendlichkeit des Raumes und damit die der Geraden wird von ihm des öfteren erwähnt, z. B. in den §§ 10, 11, 14 des Tentamen und in den §§ 44, 58, 61, 69 des Kurzen Grundrisses. Auch die Homogeneität des Raumes wird von Wolfgang Bolyai an verschiedenen Stellen besonders hervorgehoben. Auch dabei beruft er sich wieder ausdrücklich auf die Anschauung; zugleich zeigt eine Stelle deutlich, wie er zwischen dem „Raum" und der „äußeren Welt", also zwischen dem Raum als Raum der Anschauung, — dem konstituierenden Prinzip der sinnlichen Wahrnehmungen nach Kant — und den Erscheinungen im Raum unterscheidet: „Kehren wir aus dem R a u m e in die äußere W e l t zurück, aus der er abgeleitet wurde und erblicken wir denselben Körper nicht immer an demselben Orte, so entsteht die Frage, ob seine verschiedenen Oerter gleich sind? Die Anschauung zeigt, daß sie gleich sind" (St. II, S. 50, § 3). Hier benutzt er unter Berufung auf die Anschauung die Voraussetzung, daß, nach dem heutigen Sprachgebrauch, der Raum, in dem er sich befindet, ein Raum konstanten Krümmungsmaßes ist, und zwar, um zum Begriff der Kongruenz zu kommen, die ja auch nur in Räumen konstanten Krümmungsmaßes verwirklicht ist (St. II, S. 50).

Schon Helmholtz[1]) und neuerdings die Relativitätstheorie weisen darauf hin, daß die Unveränderlichkeit von Maßstäben, des „Beweglichen" bei Bolyai bei Transport von einem Ort zum andern n i c h t selbstverständlich ist, da das Gegenteil durchaus denkbar und, bei Veränderung aller Längen, auch gar nicht kon-

[1]) H e l m h o l t z, *Schriften zur Erkenntnistheorie.* Herausgegeben von H. Hertz u. M. Schlick. Berlin 1922.

trollierbar sein würde. Es wird also an dieser Stelle von Bolyai dem Raume aus der Anschauung her eine Eigenschaft als Voraussetzung beigelegt, die er gar nicht notwendig zu besitzen braucht, und für deren tatsächliches Vorhandensein auch kein Beweis erbracht wird. Es ist eine axiomatische Voraussetzung, die der naive Mensch immer machen wird, die auch in der Nichteuklidischen Geometrie von Bolyai—Lobatschefskij und Riemann gemacht wird, bis ihre Problematik durch die Relativitätstheorie aufgedeckt wurde.

Wenn Wolfgang Bolyai sich als Philosoph auf Kant stützt, so doch letzten Endes mit ihm auf Euklid, den Kant auch voraussetzte. Euklid hat unter seinen Voraussetzungen auch viele, die nicht eigens hervorgehoben werden, so die Unendlichkeit, die bei der Definition der Geraden zu Tage tritt, die Homogeneität und Isotropie des Raumes, die in dem Postulat, alle Rechten sind gleich, verborgen liegt, wie Lindemann in seiner Nichteuklidischen Geometrie nachweist (S. 548).

Wie ich oben andeutete, sind Johanns Aeußerungen über das Wesen des Raumes und dessen Eigenschaften viel spärlicher als die des Vaters; er ist nie zu solchen philosophischen Betrachtungen, wie sie Wolfgang in der Einleitung zum Tentamen anstellt, übergegangen; aber wenn seine Behauptungen ähnlich lauten, so darf man wohl mit Recht annehmen, daß sie letztlich durch Wolfgang in Johann hervorgerufen wurden. Die Unendlichkeit des Raumes, damit die der Ebene und der Geraden wird auch von ihm vorausgesetzt. Ich machte vorhin schon darauf aufmerksam, daß die Voraussetzung dieser Eigenschaften über Kant hinaus bis auf Euklid zurückgeht.

Es ist verständlich, daß Johann Bolyai sich weniger mit dem Raumproblem beschäftigt. Wie ich in den Erörterungen über die mathematische Existenz betonte, hat er diese an erster Stelle im Auge. Wenn er dort zwischen den unendlich vielen Hypothesen und dem einen i, das „in Wirklichkeit" gilt, scharf trennt, so meint er mit dieser Wirklichkeit den physikalischen Raum, den er dadurch von den möglichen, mathematisch konstruierbaren Räumen wohl unterscheidet; besonders im § 32 des Appendix (St. II, S. 201): „Wobei jedoch keineswegs zu glauben ist, man könne das System der Geometrie selbst wirklich verändern und z. B. (in der Voraussetzung der Realität von S) i nach Belieben größer oder kleiner oder auch ganz verschwinden

machen. Dies ist an und für sich so unmöglich, als die Natur des Raumes schlechterdings unwandelbar und in sich selbst bestimmt ist. Denn entweder gibt es ein i oder nicht (d. h. im physikalischen Erscheinungsraum), und im ersten Fall ist die Größe davon an sich vollkommen bestimmt und ewig unveränderlich". Also nimmt er eine ewig in ihrer Struktur beständige Raumform an, die den physikalischen, unendlichen, homogenen Raum beherrscht. Weitere Andeutungen, inwieweit er den Raum als Form der reinen Anschauung von Kant, bezw. aus den Ansichten Wolfgangs akzeptiert, finden sich nicht; ich möchte aber annehmen, daß er in seiner Frühzeit derselben Ansicht ist, ohne sich jedoch mit philosophischen Fragen viel zu belasten. Dagegen findet sich aus seiner Spätzeit die Bemerkung auf einem Zettel bei der Ausarbeitung der Raumlehre (1851 bis 1858):

„Ob Zeit und Raum wirklich da seien oder bloß zu sein scheinen, muß dem verständigen und vernünftigen Denker (Philosophen) offenbar ebenso gleichgültig sein und außer weitere Betrachtung gesetzt werden, als es im strengsten Sinne unentscheidbar ist, und übrigens diese Ideen von der Art scheinen, daß sie sich auf Realitäten beziehen müssen. Es scheint nämlich, daß der Anschein (Idee) des Daseins von Zeit und Ort richtig sei, und versteigen würde man sich, wollte man darüber noch weitere Zweifel erheben. . . . Uebrigens scheint der Tastsinn, der zur Hervorbringung der Idee vom Raume einzig notwendige Sinn zu sein" (St. I, S. 257).

Wenn ich versuche, eine Erklärung für diesen Ausspruch seiner Spätzeit zu geben, so scheint mir folgendes möglich zu sein: Bei der ersten Konzeption seiner Absoluten Geometrie ist ihm die mathematische Existenzmöglichkeit ganz klar geworden. Es ist für ihn evident, daß diese Absolute Geometrie widerspruchsfrei ist. Ferner ist klar, daß diese nach Prinzipien a priori konstruierte Geometrie im Sinne Kants auf die äußeren Erscheinungen, d. h. das Geschehen im physikalischen Raum, das ist, auf den mit Gegenständen erfüllten Raum, anwendbar sein muß. Sie ist es für hinreichend große i tatsächlich, aber ebenso auch die Euklidische Geometrie.

Aber, so wendet man ein, muß nicht die Form unserer Anschauung fest bestimmt sein? Ihre Struktur muß doch so beschaffen sein, daß sie die eine Geometrie als ihr entsprechend

bejaht, die andere verneint. Aus der mathematischen Möglichkeit der unendlich vielen Systeme folgt nun aber, daß unser Geist nicht so konstruiert ist, daß er nur die Euklidische oder nur eine von den unendlich vielen der Absoluten Geometrie als wahr ansieht. Also gilt es nicht, daß der Raum nur eine Form der Anschauung ist.

So dachte offenbar Gauß, wenn er in seinem Antwortschreiben vom 6. März 1832 sagt: „Gerade in der Unmöglichkeit, zwischen Σ und S a priori zu entscheiden, liegt der klarste Beweis, daß Kant Unrecht hatte, zu behaupten, der Raum sei nur Form unserer Anschauung". Aehnliches kann man in den Briefen an Olbers 1817, an Taurinus 1824, an Bessel 1829 finden. (Gauß Werke, Bd. 8, S. 177, 187, 200.) Er folgert daraus, daß der Geometrie etwas physikalisch Gegenständliches zugrunde liegt, daß sie nicht rein a priori im Sinne Kants konstruiert wird. Auch Helmholtz, Erdmann, Poincaré und andere stehen auf diesem Standpunkt.

Ich habe zu zeigen versucht, wie Wolfgang Bolyai die Raumauffassung Kants ganz deutlich zeigt. Diese hinderte ihn, im Anfang die Leistung seines Sohnes richtig zu beurteilen. Als Johann ihm 1825 auseinandersetzte, daß es unzählig viele hypothetische Systeme geben könne (mathematische Existenzmöglichkeit), „behauptete er ganz verzweifelt, daß es nur zwei Systeme, (denkbar subjektive successive) gebe, nämlich entweder das Euklidische oder, wenn dieses nicht ist, ein anderes, worin die Größe des Parallelwinkels absolut bestimmt sei, und . . . konnte es . . . nicht einsehen, daß es doch unzählig viele hypothetische Systeme geben könne" (St. I, S. 87). Wie man aus dem Tentamen sieht, hat er sich mit dem Gedanken einer möglichen Nichteuklidischen Geometrie später vertraut gemacht und ihre mathematische Existenz als etwas anderes als ihre wirkliche ansehen gelernt. (Vergl. Tentamen IV, § 16, St. II, S. 95—96.)

Ueber diese Frage zwischen der Kantischen Form der reinen Anschauung, die sich in seinem Sinne nur auf die ihm bekannte Euklidische Geometrie erstrecken kann, und die Möglichkeit Nichteuklidischer Geometrien ist viel gestritten worden. Cassirer gibt darauf die Antwort: „Statt den Raum als ein für sich bestehendes Wirkliches zu betrachten, das gleich andern Wirklichkeiten aus bindenden Kräften erklärt und abgeleitet werden müsse, fragen wir nun vielmehr, ob nicht jene a priorische

Funktion, jene allgemeine ideelle Beziehung, die wir „Raum" nennen, verschiedene mögliche Ausgestaltungen in sich birgt, und unter ihnen auch solche, die geeignet sind, eine exakte und erschöpfende Darstellung bestimmter physikalischer Verhältnisse, bestimmter „Kraftfelder" zu liefern. Die Entwicklung der allgemeinen Relativitätstheorie hat diese Frage bejaht: sie hat das, was bei Riemann als geometrische Hypothese, als bloße Möglichkeit des Denkens auftrat, als ein Organ der Wirklichkeitserkenntnis erwiesen" (Lit. Nr. 4, S. 111).

Carnap zeigt, daß in diesem Falle der Begriff „Raum" von Philosophen, Mathematikern und Physikern nicht eindeutig gefaßt wird, daß der Raum 1. eine bloß logische Mannigfaltigkeitsordnung ist, die rein in sich besteht, aber auf alle möglichen Dinge, nicht bloß auf geometrische Grundgebilde, sondern z. B. auch auf Farben, Gleichungen und andere Dinge anwendbar sei;

2. daß eine solche Anwendung auf Punkte, Linien, Flächen den anschaulichen Raum ergibt, den Raum der Anschauung im Sinne Kants, wenn er von den geometrischen Axiomen und den daraus folgenden Sätzen spricht;

3. daß der physikalische Raum endlich die reale Ordnung der Dinge enthält; sein Gefüge kann nur e i n e s sein und welches, darüber hat Erfahrung zu entscheiden. Uebrigens betont Kant, wenn er auch diese dreifache Bedeutung des Raumes nicht hervorhebt, die Anwendbarkeit der Sätze aus 2 auf das Geschehen in 3.

Nun war Johann Bolyai, wie ich hervorhob, in seinem anfänglichen Schaffen sich über folgendes ganz klar: Es gibt eine Geometrie a priori, die sich aus gegebenen Axiomen (den Euklidischen mit Ausnahme des Parax) rein deduktiv aufbauen läßt ohne logische Widersprüche; daher ist eine Entscheidung über den Wahrheitsanspruch dieser oder der Euklidischen a priori nicht möglich. — „In Wirklichkeit" (= physikalische Wirklichkeit) kann nur eine bestehen, die gerade in ihrer alleinigen Anwendbarkeit auf das physikalische Geschehen das Wahrheitskriterium tragen würde. — Welche, bleibt aber immer (nach seinem Urteil) unbestimmt. Die Evidenz seiner Absoluten Geometrie bleibt aber auf die Ebene beschränkt.

Er hat unendlich viel Mühe und Arbeit aufgewandt, um rein rechnerisch auch die Geometrie des Raumes absolut zu begründen. In seinen räumlichen Betrachtungen versucht er, gleiche

Beziehungen zwischen den Seiten und Winkeln eines Systems von 4, 5, 6 Punkten, von denen nur je 3 in einer Ebene liegen, auf mehrfache Art auszudrücken. Er hofft, dadurch evtl. einmal keine Identität für eine und dieselbe Beziehung zu erhalten und so einen Widerspruch in der Absoluten Geometrie zu entdecken, deren Formeln er verwendet. Bis zu einem System von 6 Punkten hat er die Rechnungen durchgeführt, ohne auf einen Widerspruch zu stoßen, damit natürlich noch nicht den Nachweis der allgemeinen Widerspruchsfreiheit erbracht. Es gelang ihm nicht, die Beziehungen, die er für die Ebene so weit als widerspruchsfrei nachgewiesen hatte, wie Euklidische und sphärische Geometrie es sind, nun auch für räumliche Verhältnisse, also für das Dreidimensionale, ganz allgemein als widerspruchsfrei darzutun, beziehungsweise durch Benutzung räumlicher Verhältnisse einen Widerspruch aufzudecken.

Wäre ihm derartiges gelungen, so wäre wahrscheinlich die Einstellung zur Existenzfrage die gleiche geblieben, etwa: „Es gibt eine Absolute Geometrie a priori des Raumes; — welche speziell für den physikalischen Raum gilt, bleibt unentschieden."

Statt dessen kann er den ersten Teil nicht mehr behaupten; auch das Gegenteil nicht beweisen. Das mathematische Gefüge des absoluten Raumes entzieht sich hartnäckig allen seinen Bemühungen; und da wird er daran irre, daß der Raum nur eine Form der Anschauung sei, die allen damaligen Kantianern als einzige und fest gegebene Form, unwandelbar wie der „ewige, unwandelbare Raum" erscheint, also irre an der Idealität des Raumes der Anschauung, und gleichsam widerwillig neigt er sich der Möglichkeit zu, daß diese Ideen Realität besitzen könnten. Aber die Behauptung, Kant habe Unrecht, wie Gauß sie formuliert hat, wagt er jedenfalls nicht.

Die Unentscheidbarkeitsbehauptung in bezug auf Idealität oder Realität des Raumes fließt also, wie mir scheint, aus seiner Unentscheidbarkeitsbehauptung für das mathematisch mögliche System irgendeiner Geometrie des Raumes.

Während er also in seiner Frühzeit bis 1837 (Appendix, Vorwort zur Raumlehre, Bittschrift an den Erzherzog Johann, Responsio) von der Widerspruchslosigkeit seiner Absoluten Geometrie für jeden reellen Wert von i überzeugt ist und demgegenüber die wirkliche Geometrie des Raumes als eine und nur eine in sich bestimmte festhält — also ganz deutlich zwischen mathematischer und physikalischer Existenz unterscheidet, wenn

er auch nicht diese Bezeichnung verwendet, — sind ihm diese Erkenntnisse in der Spätzeit in etwa verloren gegangen, teils dadurch, daß eine physikalische Entscheidung nicht möglich war, teils, und wohl hauptsächlich deswegen, weil es ihm nicht gelang, eine in sich widerspruchsfreie Geometrie des Raumes vollkommen durchzuführen.

Daß ihm aber jemals Zweifel an der Wahrheit dessen gekommen sei, was er im Appendix aufgebaut hat, ist ganz ausgeschlossen; es findet sich für einen derartigen Zweifel, also den Zweifel an der mathematischen Existenz der Absoluten Geometrie für die Ebene, auch nicht die leiseste Andeutung; im Gegenteil wies ich in dem Zusammenhang mit der sphärischen Trigonometrie einen Beleg aus der Spätzeit nach für meine Annahme, daß ihm die Widerspruchslosigkeit für die Ebene niemals zweifelhaft werden konnte. Er sucht aber als ein notwendiges Kriterium für seine Geometrie die Anwendung auf den Raum; und da diese in der physikalischen Welt nicht deutlich wurde und er dazu in dem Aufbau der rein mathematischen Konstruktion auf unüberwindliche Schwierigkeiten stieß, konnte er letztlich zu dem Zweifel kommen, ob nicht vielleicht doch die Euklidische Geometrie, die man vollständig besitzt, die Geometrie des physikalischen Raumes sei und nicht eben deswegen auch eine Durchführung der Absoluten Geometrie in dem mathematischen Aufbau unmöglich sei, wenn nämlich die Idee des Raumes nicht nur ideale, sondern reale Existenz besitze.

Belegstellen für diesen Zweifel, den ich hier in seinem Entstehen zu erklären versuchte, sind: „Aber ob i endlich oder unendlich sei, bleibt bei der Betrachtung in einer Ebene ewig unentschieden. Nun ist aber die Frage, ob nicht etwa Betrachtungen im Raume doch zur Rechtfertigung von Σ verhelfen könnten.“ Nach den Angaben Stäckels stammt diese Bemerkung aus den Jahren 1851—1858. In dem ersten Teil finde ich wieder meine Vermutung bestätigt, daß er an der Widerspruchslosigkeit der Absoluten Geometrie der Ebene bis zuletzt festgehalten hat; denn die Unentscheidbarkeit basiert ja im wesentlichen gerade auf der Widerspruchsfreiheit aller möglichen Systeme; denn mit der Aufdeckung eines Widerspruchs wäre die Entscheidung gegen das eine oder andere System gefallen. In dem zweiten Teil spricht er die Vermutung aus, daß Untersuchungen über

den Raum vielleicht eine Entscheidung zu Gunsten der Euklidischen Geometrie geben.

„Bei der lateinischen Ausgabe der Grundzüge der neuen selbständigen Raumlehre (Appendix) hoffte der Verfasser noch die Unmöglichkeit (der Entscheidung) zeigen zu können. Bei näherer Untersuchung zeigte es sich vielmehr, daß sowohl eine Möglichkeit da sei, für das Euklidische System zu entscheiden als auch eine des Unentschiedenbleibens, und daß man . . . weder von einer Entscheidbarkeit noch von einer Unentscheidbarkeit a priori einen Beweis geben könne. . . . Das 11. Axiom ist entweder erweislich oder unerweislich. Eine Unerweisbarkeit läßt sich durchaus nicht erweisen (— im Gegensatz zu den Behauptungen der früheren Jahre! —), und auch ein Beweis davon könnte nur durch die Tat selbst, d. i. durch einen wirklichen Beweis nachgewiesen werden“ (St. I, S. 122). „Ob entschieden werden . . . könne, welches von beiden statthabe, ob i endlich oder unendlich, ist bis jetzt unbekannt“ (St. I, S. 122).

Während er also anfangs behauptete, einen evidenten Beweis der Unentscheidbarkeit zu haben, (z. B. Brief vom 15. 3. 1835, St. I, S. 119; Appendix §§ 32, 33, Briefe vom 8. 8. 1832 und 20. 4. 1834, St. I, S. 233 und S. 102), der sich allerdings nirgends vorfindet, behauptet er später: „Weder eine Beweisbarkeit noch eine Unbeweisbarkeit läßt sich beweisen.“ Wahrscheinlich hat er die Aufzeichnungen, die er früher zum Beweise der Unentscheidbarkeit gemacht hat, als fehlerhaft oder unzulänglich erkannt und vernichtet, statt dessen aber versucht, durch räumliche Untersuchungen eine Entscheidung herbeizuführen.

An derselben Stelle, die ich vorhin aus Cassirers *Erkenntnistheoretischen Betrachtungen zur Einsteinschen Relativitätstheorie* anführte, macht dieser logische Einfachheit als eine Vorzugseigenschaft für die Existenz der Euklidischen Geometrie geltend (a. a. O., S. 104), ebenso Poincaré in *Wissenschaft und Hypothese* (S. 52). Dasselbe tut Bolyai zur Rechtfertigung von Σ in seiner Spätzeit: „Spräche zwar neben anderen Umständen und Eigenschaften der Euklidischen, auf das 11. Axiom begründeten Geometrie als jenen der ausschließlichen Einzigkeit und größten Einfachheit derselben . . . hauptsächlich der von mir in diesem Werke streng bewiesene Umstand, daß, im Falle eine diesfällige Entscheidung dennoch möglich wäre, selbe nur zu Gunsten des Euklidischen Systems ausfallen könnte, einiger-

maßen für die Wirklichkeit derselben oder die Unwahrheit des Antieuklidischen . . . Raumsystems."

Das erste, das die größere Einfachheit für die Euklidische Geometrie spräche, ist also nur ein Wahrscheinlichkeitsgrund und ist als solcher von ihm bewertet worden, wie sich in einer Aufzeichnung aus der allerletzten Zeit noch zeigt: „Insofern wenn S logisch denkbar ist, auch Σ es ist (als besonderer Fall), nicht aber umgekehrt S, scheint Σ mehr für sich zu haben, obschon keineswegs ausgemacht" (St. I, S. 187). Andererseits behauptet er, den Umstand streng bewiesen zu haben, daß die Entscheidung, wenn sie möglich wäre, nur für das Euklidische System fallen würde. Wie er sich diesen strengen Beweis zu Gunsten der Euklidischen Geometrie gedacht hat, kann ich nicht angeben; es finden sich, soweit ich aus den Angaben schließen muß, keinerlei Andeutungen dafür in der Raumlehre, aus deren Vorwort im Jahre 1851 diese Stelle stammt. — Zum dritten ist auch hier wieder zu betonen, daß er die Entscheidung als unmöglich hinstellt: „Allein gebührend klar und streng entscheidend können und dürfen alle diese Umstände vernünftigerweise dennoch und ewig nur um so weniger angesehen werden, als die vorerwähnte Voraussetzung der Entscheidbarkeit und somit auch der darauf gebaute Entschluß einer Entscheidung für das Euklidische System durchaus und gänzlich wegfällt und bloß äußere sinnliche Wahrscheinlichkeit unsere sichere und untrügliche Leiterin . . . nicht sein kann, und Augenmaß . . . unser geometrischer Maßstab nicht sein kann" (St. I, S. 238).

Das Urteil der Spätzeit kann man dementsprechend etwa so zusammenfassen:

1. Eine Entscheidung ist, wie es scheint, unmöglich. Die Unentscheidbarkeit der Frage nach wahr oder falsch wird aber im allgemeinen nicht mehr so strikte behauptet wie in der Frühzeit.

2. Die wahrscheinlichste Ursache dieses Schwankens ist die Unmöglichkeit, das absolute System auch für den Raum vollkommen durchzuführen, also eine mathematische Existenz durch W.-F. der Absoluten Geometrie im Raume vollständig nachzuweisen.

3. Daraus folgt der Zweifel, daß die Geometrie eine rein a priorische Wissenschaft sei, die ihre Gesetze nur aus der Form

der reinen Anschauung nimmt. Ob ihr nicht deshalb etwas Reales, ein reales Sein des Raumes zu Grunde liegt, das wir nicht beurteilen können?

4. Damit schwindet die Klarheit der Scheidung zwischen mathematischer Existenz und physikalischer Existenz, die er in seiner Frühzeit klar erfaßt hatte.

Aus 3 erklären sich dann jene Stellen, die uns die Einsicht in das Wesen des Raumes vollständig absprechen. „Es liegt eben in der Natur der Sache, daß dieses nicht durch logische Schlüsse, nur durch unmittelbare Anschauung erkannt werden könne. Ja, selbst auch für Engel ist es unzugänglich, wenn sie es nicht unmittelbar erschauen. Es gibt nur ein Wesen, dessen Anschauung die ganze Natur offen steht, Gott, dem Raummeister" (St. I, S. 121). Das wäre eben die Entscheidung a priori, wenn wir durch logische Schlüsse eine Entscheidung über das Parallelenpostulat treffen könnten, die nur aus den übrigen Axiomen Euklids hervorginge. Diese Entscheidung rein logischer Art ist nicht bloß uns, sondern auch Wesen mit höherer und höchster Intelligenz in rein logischem Schließen unmöglich. Dasselbe sagt der auf S. 23 zitierte Titel der Raumlehre, „auch selbst dem Allwissenden nur durch unmittelbare Anschauung offenbar." Sichere Auskunft gibt nur eine unmittelbare Einsicht in das verborgene Wesen des Raumes durch Anschauung, die einem sterblichen, beschränkten Wesen auch nur in beschränktem Maße zuteil wird, so zwar, daß uns die übrigen Axiome anschaulich erkennbar sind, nicht aber das Parallelenaxiom.

IV. Veranschaulichung der Absoluten Geometrie.

Andererseits ist vielleicht noch folgendes über Anschaulichkeit und Veranschaulichung zu erwähnen: Alles in der Geometrie muß anschaulich vorstellbar und darstellbar sein. Man wird „nicht den mindesten Zweifel daran haben, 1. daß einzig und allein Dinge und sogar nur wirklich existierende Größen (mögen sie materiell, d. h. Teile der körperlichen oder äußeren Welt sein oder doch denkbar und möglich) Gegenstände der gesunden Forschung sein können. 2. Daß es ganz von selbst feststeht und sich ergibt, daß alle in der Raumlehre und irgendwo anders auftretenden Größen durchaus in der Anschauung aufgezeigt und konstruiert werden können" (Abhandlung über die imaginären Größen § 11, 1837).

Obschon die Aeußerung 1 hauptsächlich auf imaginäre Größen sich bezieht, so liegt doch in dem Satz: „Mögen sie materiell . . . oder doch denkbar und möglich sein," auch ein Hinweis auf seine Auffassung von der Existenz der Nichteuklidischen Geometrien. Da sie ohne Widerspruch denkbar sind, können sie Gegenstände gesunder Forschung sein, d. h. sie haben wissenschaftliche Daseinsberechtigung, und falls sie, wie die Absolute Geometrie aufgebaut werden, wissenschaftliches Dasein, wie Wolfgang sagt: „Die auf jeden Fall allgemeine Geometrie bliebe für die Wissenschaft interessant" (Kurzer Grundriß, § 32, St. II, S. 152). Doch das sei nur ein Hinweis.

In diesem Zusammenhang lege ich das Hauptgewicht auf die Veranschaulichung, die er für alle in der Geometrie auftretenden Größen fordert. Für die Nichteuklidischen Geometrien der 2-dimensionalen Mannigfaltigkeit macht die Veranschaulichung keine Schwierigkeit, da sie auf Flächen realisiert sind, die im 3-dimensionalen Euklidischen Raum liegen. Und wenn Bolyai dies auch noch nicht gesehen hat, so betont er doch die Nebenordnung der Geometrien der Kugel, der F-Fläche, der Ebene und der von dieser äquidistanten Flächen, (vergl. § 9 der Responsio, Wolfgangs Zusatz zum Appendix), wobei nur der Radius bei den F-Flächen gegen unendlich geht, in den beiden anderen Fällen der Parameter der Fläche imaginär wird. Die erste ist anschaulich vorstellbar, die zweite als auf Kugeln mit unendlichem Radius jedenfalls in kleinen Dimensionen, die man sich irgendwie gekrümmt vorstellt. Er selbst bedient sich in seinen Darstellungen für die Asymptoten zur Veranschaulichung gerader Linien, die nach unserer gewohnten Anschauung zu konvergieren scheinen, für die L-Linien der Kreisbogenstücke[1]).

Auch Wolfgang fordert reelle Anschaulichkeit für alle Größen, die in der Mathematik behandelt werden: „Alles, was sie behandelt, soll reell anschaulich sein" (St. II, S. 122). Es ist auffallend, wie die Ausdrücke wieder fast wörtlich mit denen Kants übereinstimmen, wenn er in der *Kritik der reinen Vernunft* S. 8 sagt: „Die Mathematik gibt uns ein glänzendes Beispiel, wie weit wir es unabhängig von der Erfahrung in der Erkenntnis a priori bringen können. Nun beschäftigt sie sich zwar mit Gegenständen und Erkenntnissen bloß so weit, als sich solche in der Anschauung darstellen lassen".

[1]) Vgl. die Zeichnungen S. 49 dieser Zeitschrift.

Zusammenfassend könnte man die Auffassung der beiden Bolyai über Anschauung und Veranschaulichung folgendermaßen formulieren:

1. Alle Größen in der Geometrie müssen reell anschaulich und konstruierbar sein.

2. In der Absoluten Geometrie wissen wir zwar über die wahre Größe des i, des ausschlaggebenden Faktors in dieser Geometrie, nichts weiter, als daß es seiner Bedeutung nach eine Länge und seinem Charakter nach eine reelle Größe ist. Das genügt aber für die Veranschaulichung. Zeichnungen sind nur Bilder, die den wahren Sachverhalt versinnlichen; wir können aus ihnen nichts über das Wesen der Dinge und die Wahrheit der Aussagen herauslesen.

3. Das könnte nur eine reine Anschauung, d. h. eine Einsicht in das Wesen des Raumes, die uns aber versagt ist. Unsere beschränkte Anschauung gibt nur beschränkte Einsicht; darum ist aus der reinen Anschauung heraus eine Entscheidung für uns nicht möglich.

Die Erörterung der Veranschaulichung Nichteuklidischer Räume, wie sie H. Reichenbach in seiner *Raum-Zeit-Lehre*, Berlin 1928, so interessant entwickelt, fällt bei Bolyai absolut fort; sie muß es schon aus dem Grunde, weil ihm die vollkommene Durchführung einer „Raum"-Lehre nicht gelang; denn die Frage ist sekundärer Natur und erst zu stellen, wenn es möglich ist, ein gedankliches Gebäude vollkommen zu konstruieren, das in seiner inneren Struktur ganz von dem gewöhnlichen, anschaulich gewohnten abweicht. Nachdem er es immer wieder betonen muß, daß uns 1. die Anschauung in das Wesen des Raumes versagt ist, wir also keine gegebene apriorische Gewißheit in bezug darauf haben, 2. eine solche uns durch logische Schlüsse auch nie zuteil werden wird, 3. sogar zweifelhaft ist, ob eine absolute, d. h. Nichteuklidische Geometrie des Raumes mathematisch konstruierbar ist, kann er natürlich die Frage nicht erörtern, ob eine solche Geometrie evtl. anschaulich wäre, weil ihm das logische Beziehungsgefüge nicht zur Verfügung steht, das erst in seiner Anwendbarkeit auf sinnliche Dinge anschaulich prüfbar ist. — Das gilt aber, wie ich ausdrücklich betone, für Nichteuklidische Räume; bei der der Ebene appelliert Bolyai durch seine Zeichnungen der Asymptoten, L-Linien, Parallelwinkel hinreichend an die sinnliche Anschauung, um eine Veranschau-

lichung, die sich ja immer nur auf beschränkte Gebiete bezieht, für möglich zu halten. Für die Ebene hat er ja auch das 3. oben, die logische Struktur der Geometrie in seinem Besitz.

Resultate.

Es gibt eine Absolute Geometrie a priori.

1) Die Absolute Geometrie ist wenigstens für die Ebene widerspruchsfrei, soweit die Euklidische und die sphärische es sind.
2) Es gibt „überall gleichförmige Flächen" (— Flächen konstanten Krümmungsmaßes —) im absoluten Raum, auf denen allen die gleiche Geometrie verwirklicht ist; unter ihnen eine mit der bekannten Euklidischen Geometrie. Ob diese Fläche eine Ebene ist, bleibt unbestimmt.
3) Ob es eine absolute Geometrie für den Raum gibt, bleibt unentschieden. Die Behauptungen sind anfangs zuversichtlich bejahend, später zweifelnd, behauptete Beweise finden sich nicht.
4) A priori, d. h. durch logische Schlußfolgerungen aus den Axiomen, ist in keiner Weise eine Entscheidung herbeizuführen, welche Geometrie in Wirklichkeit gilt, weder
   a) durch Aufzeigen eines Widerspruchs, noch
   b) durch Auffinden irgendeiner näheren Bestimmung des fraglichen i, als nur, daß es real ist.
5) Die Natur des Raumes, und damit das i, ist in Wirklichkeit nicht bloß bestimmt, sondern sogar unwandelbar.
6) Durch praktische Messungen, deren wir bis jetzt fähig sind, ist auch keine Entscheidung möglich, da
   a) die Abweichungen so klein sind, daß sie vollkommen innerhalb der Fehlergrenze liegen und
   b) größere Abweichungen auf andere physikalische Ursachen zurückgeführt werden können.
7) a) Nach 1) bis 4) gibt es einen mathematischen Raum mit Geraden, Ebenen, . . . der a priori nach Gesetzen der Logik aus gegebenen Axiomen konstruiert wird. Da die Axiome variieren können (speziell das i bei Bolyai), sind unendlich viele derartige Gebilde, also mathematische Anschauungsräume, möglich.

b) Nach 5) bis 6) existiert ein physikalischer Raum, ewig, unwandelbar, auf den die Daten der mathematischen Konstruktion anwendbar sind. Deshalb sind die unter 7) a) genannten Räume zunächst hypothetische, deren Wirklichkeit eventl. durch diese Anwendbarkeit entschieden wird.

8) a) Die sinnliche Anschauung verträgt sich mit der Annahme sowohl der Euklidischen als auch der Nichteuklidischen Geometrie, wenn nur das i hinreichend groß gesetzt wird. Beide Geometrien sind demnach anwendbar auf die Erfahrung.

b) Eine reine Anschauung, die a priori den Geist zwingen würde, in seinen Vorstellungen nur den einen Raum als gegenständlich anzunehmen, den andern abzulehnen, gibt es für menschliche Wesen in d i e s e m Punkte nicht. Gibt es eine Anschauung a priori, so gibt sie für das Parallelenpostulat keine Entscheidung.