

Der Streit um die Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Von Arnulf Molitor, Perchtoldsdorf bei Wien.

(Fortsetzung.)

3. Die Häufigkeitstheorie Mises'.

Wie Mill in bewußtem Gegensatz zu der klassischen Grundlegung durch Laplace, so verfißt Mises gegen moderne „Subjektivisten“ wie Hermann Weyl und vor allem J. M. Keynes den „objektiven“ Standpunkt der Häufigkeitslehre.¹⁾ — Eine folgerichtige Durchführung der Wahrscheinlichkeitstheorie unter dauernder Zugrundelegung der klassischen Definition

$$\text{(Wahrscheinlichkeit)} = \frac{\text{Anzahl der [einem Ereignis] günstigen Fälle}}{\text{Gesamtzahl der „gleichmöglichen“ Fälle}}$$

sei noch nie versucht worden. Man beginne zwar gewöhnlich mit dieser Definition, verlasse sie aber bei passender Gelegenheit, um unvermerkt in eine die Häufigkeit verwendende hinüber zu gleiten. Der gewöhnliche Sprachgebrauch nennt zwei Vorgänge oder dergl. „gleichmöglich“, wenn sie sich mit gleicher Mühe, gleichem Arbeitsaufwand u.s.w. verwirklichen lassen (?), — was die Laplace'sche Definition aber nicht meint. In anderer Bedeutung nennt man ein Ereignis „eher möglich“ als ein anderes, wenn man damit einer Vermutung über sein Eintreffen Ausdruck geben will. In diesem Sinne versteht die klassische Definition die Gleichmöglichkeit: „gleichmöglich“ und „gleichwahrscheinlich“ sind hier vollkommen synonym, gleiche Wahrscheinlichkeit bedeutet einfach gleich berechnete Vermutung. Aber die hierin liegende (apriorische) Zurückführung irgendwelcher allgemeiner Verteilung auf Gleich-

¹⁾ Richard von Mises, *Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit*, Berlin 1928, J. Springer.

verteilung (s. u.) ist nicht begründet.¹⁾ Im Rahmen dieser „Gleichmöglichkeits-theorie“ — das Beispiel des „richtigen“ Würfels gehört hierher — kann man nun allerdings im Wesentlichen alle jene Aufgaben lösen, in denen die Verteilungen (der einzelnen Fälle) in den „Ausgangskollektivs“ als gleichförmige, als Gleichverteilungen gegeben sind. („Kollektiv“ bedeutet, kurz und oberflächlich erklärt,²⁾ eine Gesamtheit von Ereignissen o. dergl., die sich im einzelnen durch irgend ein beobachtbares Merkmal (wie Zahl, Farbe, u.s.w.) unterscheiden, — z. B. Würfelwürfe aus einem Becher).

Wenn aber die Verteilung in den Ausgangskollektivs nicht gleichförmig, wenn z. B. der Würfel ein „falscher“ ist, so gestattet nach Mises der Wortlaut der klassischen Definition überhaupt keine Anwendung der Wahrscheinlichkeitsgesetze bzw. Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung, denn nach dieser Definition gebe es keine Wahrscheinlichkeit mehr, wo es keine „gleichmöglichen“ Fälle gibt (vgl. jedoch Anm. 1!), d. h. es soll beim „falschen“ Würfel nicht mehr von einer Wahrscheinlichkeit die Rede sein können, die Augenzahl 3 zu werfen, noch zu behaupten sein, daß die Wahrscheinlichkeit eines geradzahligem Wurfes die Summe der Wahrscheinlichkeiten der Würfe der Augenzahlen 2, 4 und 6 sei, — und darin sieht Mises einen wesentlichen Mangel. Daß aber die sechs Seiten eines Würfels z. B. überhaupt „gleichmögliche“ Fälle sind, wissen wir für beliebige Würfel ja gar nicht von vornherein sondern nur für bestimmte, durch Beobachtung geprüfte oder ad hoc „richtig“ erzeugte Würfel. Ebenso gibt es in der Praxis des Versicherungsmathematikers Fälle, wo von „gleichmöglichen“ und „günstigen“ Fällen sinnvoller Weise wohl nicht die Rede sein kann, z. B. wenn eine Sterblichkeitstabelle die Wahrscheinlichkeit dafür ziffernmäßig angibt, daß ein

¹⁾ Mises geht da vielleicht insofern etwas zu weit in seiner Kritik, als die klassische Definition auch so interpretiert werden könnte, als verstünde sie unter der Anzahl der „gleichmöglichen“ Fälle die aller (in Betracht kommenden) überhaupt, ohne daß dabei stillschweigend eine Gleichverteilung eingeschmuggelt, bzw. über „gleichberechtigte“ Vermutungen überhaupt etwas ausgemacht oder vorausgesetzt würde.

²⁾ Die endgültige, strenge Fassung dieses Begriffs lautet wie folgt: Ein Kollektiv ist ein Wiederholungsvorgang (Massenerscheinung), der (die) folgenden Forderungen genügt: a) es muß die relative Häufigkeit jedes in Betracht kommenden Merkmals (Zahl, Farbe etc.) einen bestimmten Grenzwert besitzen, und es muß b) dieser Grenzwert ungeändert bleiben, wenn man durch willkürliche Stellenauswahl einen Teil der Elemente (der Erscheinung), z. B. einen Teil der Würfelwürfe, heraushebt. — „Relative Häufigkeit“ ist der Quotient der durch ein bestimmtes Merkmal ausgezeichneten Fälle durch die Gesamtzahl aller Fälle, z. B. die Zahl der Einswürfe, gebrochen durch die aller Würfe.

vierzigjähriger Mann im Laufe eines Jahres stirbt. Bei derartigen Beispielen pflegt eben die klassische Definition vergessen und einfach behauptet zu werden, man könne Wahrscheinlichkeiten, die nicht a priori gegeben (bezw. errechenbar) sind, sehr wohl a posteriori bestimmen, indem man die „relativen Häufigkeiten“¹⁾ ermittle; ja bisweilen beruft man sich, noch darüber hinausgehend — in zirkelhafter Weise — auf das „Gesetz der großen Zahlen“ oder das „Bernouillische Theorem“ als (angebliche) Brücke zwischen apriorischer („subjektiver“) und aposteriorischer („objektiver“) Wahrscheinlichkeit (s. u. S. 321). Davon ganz abgesehen, bestehen schon gegen die gewöhnliche Auffassung der „Wahrscheinlichkeit a priori“ als solche Bedenken, denn der „Apriorist“ versteht unter der „Homogenität“ des Würfels meist nichts anderes, als daß dessen Schwerpunkt mit seinem geometrischen Mittelpunkt zusammenfällt und daß die Trägheitsmomente für die zwölf Kanten als Drehungsachsen gleich sind. Daß nun gerade diese Bedingungen, in denen die aus Erfahrungssätzen abgeleitete Kinetik starrer Körper steckt, apriori evident sein sollen, erscheint Mises durchaus unglaublich.²⁾ Man könne aber nicht einmal (vom „apriorischen“ Standpunkte aus) einwenden, daß bei bekannter „kinetischer Symmetrie“ des (richtigen) Würfels die Wahrscheinlichkeit (des Auffallens einer bestimmten Augenzahl) gleich $\frac{1}{6}$ wenigstens auf Grund einer Erfahrungswissenschaft von deterministischem Charakter notwendig folge; denn man könne mit einem solchen Würfel ja auch falsch spielen.³⁾ — Mises scheint aber dabei zu übersehen, daß ein solches „Falschspiel“ gegen seine eigene Forderung des „ausgeschlossenen Spielsystems“⁴⁾ verstößt, die er der Anwendbarkeit der Wahrscheinlichkeitsrechnung überhaupt zu Grunde legt, — weshalb die Frage, ob das erwähnte Beispiel für den aprioristischen Standpunkt spreche oder nicht, eigentlich gegenstandslos

¹⁾ Siehe Fußnote 2 der vorhergehenden Seite.

²⁾ Man wäre hier vielleicht versucht, gegen Mises einzuwenden, daß gleichwohl dem Nichtphysiker wenigstens die Sache rein gefühlsmäßig a priori evident erscheint, ob nun mit Recht oder nicht, und daß ganz im allgemeinen ursprünglich durch Erfahrung erworbene Denkgewohnheiten allmählich und unbewußt in (wenigstens als solche empfundene) Denk„notwendigkeiten“ übergehen können, derart, daß im Nachhinein die Aufdeckung solcher instinktiver als solcher zum Problem werden kann. — Ähnlich äußert sich übrigens an anderer Stelle (*Ueber kausale und statistische Gesetzmäßigkeit etc.*, „Erkenntnis“ Bd. I. 1931, S. 190) Mises selbst über das Trägheitsgesetz.

³⁾ Indem man beim Einlegen (in den Becher) oder beim Rütteln „falsch“ vorgeht.

⁴⁾ Als solches bezeichnet Mises die Forderung b) der Fußnote 2, S. 318.

wird, bzw. falsch gestellt ist und daher sinnvoller Weise auch nicht mit „Nein“ beantwortet werden dürfte. Vermutlich meint aber der Apriorist hier nichts anderes, als daß bei wenigstens grundsätzlichem Ausschluß eines solchen Falschspiels ebenso grundsätzlich jene Behauptung auf Grund des deterministischen Charakters der Erfahrungswissenschaft folge, und dieser Einwand wird von Mises nicht widerlegt.

Da ungeachtet der schon von Mill erhobenen Gegengründe die Aprioristen noch immer (wenn auch nicht mehr so unkritisch) vom „Indifferenzprinzip“ (dem sog. „Satz des mangelnden Grundes“¹⁾ ausgehen, sucht Mises deren eigentlichen Denkfehler aufzudecken. — Wenn man von der Körperlänge von 6 Personen, oder dem Auffallen der 6 Würfelseiten nichts weiß, mag man vermuten, daß sie alle gleich lang sind bzw. gleich oft auffallen, und diese richtigen oder falschen Vermutungen mit dem gewöhnlichen Sprachgebrauch (?) als mehr oder minder „wahrscheinlich“ bezeichnen. Hier greift nun der spezifisch-aprioristische Gedankengang ein: »Ich halte diese Fälle für gleich wahrscheinlich« wird gleich gesetzt mit: »Diese Fälle sind gleich wahrscheinlich«, — weil doch eben die Wahrscheinlichkeit etwas Subjektives sei.²⁾ Auf diese Weise „folgt“ allerdings aus dem Nichtwissen die Gleichwahrscheinlichkeit, aber mit demselben Recht auch jede andere, z. B. daß die betreffenden Wahrscheinlichkeiten sich wie die Quadrate der Zahlen 1 bis 6 verhalten, denn als Vermutung sei auch das möglich. — In der Tat aber wird und kann zum mindesten der neuere „Apriorismus“ (etwa Keynes'), wohl gemerkt, durchaus nicht schließen, daß die Wahrscheinlichkeiten sich wie jene Quadrate verhalten, weil da (mit

¹⁾ E. Czuber (*Enzykl. d. math. Wiss.* Bd. I, Teil 2, S. 736) formuliert ihn also: „Nach dem Prinzip des mangelnden Grundes stützt sich die Konstatierung der Gleichmöglichkeit auf absolutes Nichtwissen über die Bedingungen des Daseins oder der Verwirklichung der einzelnen Fälle...“ Nach Mises räumt zwar Keynes ein, daß nach diesem Prinzip jeder Satz, über dessen Richtigkeit nichts bekannt ist, die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ hätte (da er mit seinem kontradiktorischen Gegenteil zwei gleichmäßige Fälle bilde, s. o. Teil I, Abschnitt 2, S. 188), kommt aber nicht auf den einfachen Gedanken, daß man auch nichts über die Wahrscheinlichkeit einer Sache sagen könne, wenn man über diese selbst nichts wisse. — Mises hätte hier aber wohl erwähnen müssen, daß Keynes selbst diese Form des Indifferenzprinzips fallen läßt und ihm eine (allerdings nicht sehr klare) exakt sein sollende Fassung gibt.

²⁾ Der Leser vergleiche mit diesen Ausführungen das im I. Teil, 2. Abschnitt an einleitender Stelle Gesagte, — um zu sehen, daß Mises den Gedankengang Keynes' (vgl. dessen *Ueber Wahrscheinlichkeit*, deutsch von Urban, S. 3 ff.) zum mindesten nicht genau wiedergibt.

Recht oder nicht) seine „Intuition“, sein „direktes Urteil“ (s. o. Teil I Abschn. 2) vor der Anwendung des Indifferenzprinzips in Wirksamkeit tritt. (Mises erleichtert sich die Argumentation, wenn oder indem er diesen Umstand nicht berücksichtigt.)

Die Sonderstellung, die die klassische Definition der Gleichverteilung eines Ausgangskollektivs einräumt, kommt letzterer überhaupt nicht zu — darin liegt einer der wesentlichsten Einwände Mises'. Man darf sich nicht nur auf Gleichverteilungen als Ausgangswahrscheinlichkeiten beschränken, die gefühlsmäßig, instinktiv, apriori erschlossen werden.¹⁾ Der zweite Haupteinwand ist der, daß diese Definition zu enge ist, da sie nur einen Teil der tatsächlich vorliegenden Aufgaben umfasse und gerade die wichtigsten (wie Lebensversicherung und ähnliches) ausschließe.²⁾ Es soll aber innerhalb der klassischen Theorie eine „Brücke“ geben, die die Gleichmöglichkeitsmit der Häufigkeitsdefinition verbinde, nämlich das sog. „Gesetz der großen Zahlen“, — jedoch im Sinne der Erfahrungstatsache verstanden,³⁾ daß sich die relative Häufigkeit bei steter Fortsetzung der Versuche immer mehr einem festen Wert nähert. Dabei darf aber nicht übersehen werden, daß Poisson — nach Mises mit mehr Recht — auch noch einen anderen Satz „Gesetz der großen Zahlen“ nennt, der heute meist als „Poisson'sches Gesetz“ bezeichnet wird und besagt, daß bei n -maliger Wiederholung eines einfachen Alternativversuchs von der Wahrscheinlichkeit p die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Versuch mindestens $(pn - \varepsilon n)$ mal und höchstens $(pn + \varepsilon n)$ mal positiv ausfällt, — ε beliebig klein vorgegeben — mit wachsendem

¹⁾ Darin soll vielleicht ein Hinweis auf die allerdings etwas vage Rolle der „Intuition“ vor der Anwendung des Satzes des mangelnden Grundes liegen. Aber dennoch wird auch hier Mises m. E. Keynes nicht ganz gerecht.

²⁾ Eine explizite Begründung hierfür vermag ich — hier — bei Mises nicht zu finden.

³⁾ Diese Erfahrungstatsache formuliert Poisson folgendermaßen: »Erscheinungen verschiedenster Art sind einem allgemeinen Gesetz unterworfen, das man Gesetz der großen Zahlen nennen kann. Es besteht darin, daß, wenn man sehr große Anzahlen gleichartiger Ereignisse beobachtet, die von konstanten Ursachen und von solchen abhängen, die unregelmäßig, nach der einen oder anderen Richtung veränderlich sind, ohne daß ihre Veränderung in einem bestimmten Sinne fortschreitet, man zwischen diesen Zahlen Verhältnisse finden wird, die nahezu unveränderlich sind. Für jede Art von Erscheinungen haben diese Verhältnisse besondere Werte, denen sie sich umso mehr nähern, je größer die Reihe der beobachteten Erscheinungen ist, und die sie . . . bei Ausdehnung der . . . Beobachtungen ins Unendliche . . . in aller Strenge erreichen würden.« (Zitiert nach Mises.)

n gegen 1 konvergiert.¹⁾ Diese Aussage ist jedoch rein arithmetischer Natur; sie bezieht sich nur auf gewisse Zahlen und deren Eigenschaften, nicht auf das, was (beim Würfeln oder dgl.) wirklich geschieht, und gestattet keinen Schluß auf den Ablauf der Versuchsreihe, da die angenommene klassische Definition nur etwas über das Zahlenverhältnis der „günstigen“ und „ungünstigen“ (bzw. möglichen) Fälle, nichts aber über die Häufigkeit besagt, mit der ein Ereignis eintritt. (Dagegen wäre m. E. zunächst zu fragen, wodurch sich diese Häufigkeit von jenem Zahlenverhältnis eigentlich unterscheidet, wenn als „günstig“ eben jene Fälle angesehen werden, in denen das Ereignis eintritt, — und ferner, warum nicht (wie das inzwischen tatsächlich in Vorschlag gebracht wurde) unsere Ver-

¹⁾ Der Zusammenhang zwischen diesen beiden „Gesetzen der großen Zahlen“ stellt sich nach Mises also dar: Die klassische Definition nimmt nicht Bezug auf die Häufigkeit des Auftretens, sondern erklärt rein formal „Wahrscheinlichkeit“ als den Quotienten der Zahl der „günstigen“ durch die der „möglichen“ Fälle. Nach dieser Erklärung, die der Ableitung des Poisson'schen Gesetzes ausschließlich zu Grunde liegt, ist „Wahrscheinlichkeit nahe an 1“ gleichbedeutend mit der Aussage, daß fast alle „gleichmöglichen“ Fälle zu den „günstigen“ gehören. Führt man nun mit einer Münze n Würfe aus, so gibt es bei großem n außerordentlich viele Ergebnismöglichkeiten; es können die ersten 10 Würfe „Kopfwürfe“, die übrigen „Wappenwürfe“ sein, u.s.w. Jede dieser Ergebnisreihen muß als „gleichmöglich“ gelten, wenn die Wahrscheinlichkeit eines Kopfwurfes $p = \frac{1}{2}$ gesetzt wird. Oder in arithmetischer Darstellung: für die Kopfseite der auffallenden Münze werde jedesmal eine 1, für die Wappenseite eine 0 geschrieben. Dann entspricht jeder möglichen Reihe von 100 Würfeln eine bestimmte 100-stellige Zahl, deren Ziffern lauter Einsen und Nullen sind. Wenn nun etwaige Nullen vor der ersten 1 gestrichen werden, so stellt auch jede solche Zahl von weniger als 100 Stellen eine Versuchsreihe dar. Man kann dann im Prinzip alle diese Zahlen (von denen also jede ein gleichmögliches Ereignis darstellt) schematisch der Größe nach geordnet aufschreiben:

0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000,

Dabei bedeutet z. B. 101, daß in der Versuchsreihe zuerst 97 Nullen stehen, dann eine 1, dann eine 0, dann wieder eine 1, u.s.f. Das „Poisson'sche Gesetz“ ist nun nichts als eine Aussage über diese Zahlen. Betrachten wir nun alle diese Zahlen bis beispielsweise zu den 100-stelligen, so mögen etwa 16 % von ihnen 49 bis 51 Einsen aufweisen; gehen wir bis zu den 1000-stelligen, so werden (beispielsweise) etwa 47 % dieser Zahlen diese Eigenschaft zeigen, u.s.w. Dieses Verhalten wird bei Vergrößerung der Stellenzahl immer ausgeprägter. — Der eigentliche Inhalt des Poisson'schen Gesetzes läßt sich, $p = \frac{1}{2}$ und $\varepsilon = 0.01$ angenommen, nun kurz so aussprechen: Schreibt man alle aus Nullen und Einsen bestehenden Zahlen der Größe nach geordnet bis einschließlich der n -stelligen, so bilden diejenigen unter ihnen, bei denen die Anzahl der Einsen mindestens $0.49n$ und höchstens $0.51n$ beträgt, eine mit wachsendem n immer stärker werdende Majorität.

mutungsintensität, also die „apriorische“, „subjektive“ Wahrscheinlichkeit, dieser „relativen Häufigkeit“ gleich oder besser proportional gesetzt werden könnte?) Ueberdies sei die Wahrscheinlichkeit ($p = \frac{1}{2}$ des Kopfwurfs einer Münze), die zu Beginn in die Rechnung Poissons eingehe, nur die der klassischen Definition entsprechende sein, diejenige aber, die am Ende aus seiner Rechnung hervorgehe, soll vielmehr bedeuten, daß das betreffende Ereignis fast immer zu beobachten sei — was auf die heimliche nachträgliche Zugrundelegung einer Häufigkeitsdefinition hinauskomme. — H. Weyl¹⁾ macht Mises (nicht ganz mit Recht) zum Vorwurf, daß auch er diese „Brücken“konstruktion durch eine „Hilfshypothese“ zu retten suche, die auf einer „wenn auch eingeschränkten“ (stillschweigend eingeführten) Häufigkeitsdefinition beruhe.²⁾ Wenn man die Wahrscheinlichkeit (eines „Kopf-

¹⁾ Herm. Weyl, *Philosophie der Mathematik u. d. Naturwissenschaft* (Abt. II, Bd. 1 der Sammlung „Handbücher d. Philosophie“, hg. v. A. Baeumler und M. Schröter), S. 150 ff.

²⁾ Weyl sagt l. c. S. 152: »Es liegt... nahe, zur objektiven Begründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung direkt von den Versuchsreihen auszugehen und die Wahrscheinlichkeit... als Limes der relativen Häufigkeit bei unbegrenzt wachsender Zahl der Versuche... zu definieren. Freilich wird dadurch die unmögliche Fiktion eingeführt, daß tatsächlich eine unendliche Anzahl von Versuchen vorgenommen werde, und man geht insofern über den Inhalt der Wahrscheinlichkeitsaussage hinaus, daß man für eine derartige Versuchsfolge nicht nur mit einer „der Gewißheit sich unbegrenzt nähernden Wahrscheinlichkeit“, sondern absolut sicher die Uebereinstimmung zwischen Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit voraussagt. Es wird behauptet, daß jede... ceteris paribus... veranstaltete Versuchsfolge zu dem gleichen Häufigkeitwert w führt. Damit die mathematischen Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung zutreffen, müssen die Versuchsfolgen gewissen Forderungen genügen, deren exakte Fassung bisher kaum restlos gelungen ist (von mir gesperrt — M.) und die so etwas wie „Ordnung im großen, Unordnung im kleinen“ verlangen. Aber verdeckt diese durch die erkenntnistheoretische Haltung des strengen Empirismus bedingte „objektive Begründung“ der Statistik nicht lediglich die apriorische Wahrscheinlichkeit hinter der dogmatischen Fassung eines fingierten Häufigkeitsbegriffs, der an die unsinnige Vorstellung der unendlichen Versuchsfolge geknüpft ist? Ist es nicht vernünftiger, die Wahrscheinlichkeit hinzunehmen als ein nicht weiter zu reduzierendes Element der Natur, bezw. ihrer theoretischen Konstruktion? (Sperrungen von mir. M.) Wirklich scheint die moderne Physik diesem Standpunkt, der auch die statistische Unabhängigkeit zu einem Urbegriff erhebt, recht zu geben: für die atomaren Einzelvorgänge bestehen A priori-Wahrscheinlichkeiten, die im allgemeinen nicht durch reines Denken zu finden sind, sondern durch Naturgesetze bestimmt werden. (Sperrungen von Weyl selbst. — Vgl. hierzu o. S. 319 u. 320.) Aber genau wie im Gebiete der Einzelgesetzmäßigkeiten gibt es

wurfs“ z. B.) als den Grenzwert der relativen Häufigkeit (mit der der „Kopf“ fällt) definieren will, so muß man — das gibt Mises zu — allerdings schon voraussetzen, daß es einen solchen Grenzwert auch gibt, d. h. m. a. W. daß das „Gesetz der großen Zahlen“¹⁾ gilt. Aber des Poisson'sche Gesetz²⁾ enthält dann — ungleich mehr — überdies eine Aussage über die Anordnung (der Kopf- und Wappenwürfe) bei unbegrenzt fortgesetzter Versuchsreihe, nämlich die Aussage, daß bei Betrachtung genügend langer Erscheinungsreihen (wegen der „vollständigen Regellosigkeit“, s. o.) innerhalb fast jeder dieser Reihen schon ein annähernder statistischer Ausgleich der verschiedenen Ergebnismöglichkeiten stattfindet. Nur also wenn vorn vornherein die Wahrscheinlichkeit als Grenzwert der relativen Häufigkeit betrachtet wird, bedeutet das Poisson'sche Gesetz (wenn es in dem betreffenden Falle gilt) auch eine ganz bestimmte Aussage über den Erscheinungsablauf. (Versteht man aber hier unter „Wahrscheinlichkeit“ die „subjektive, apriorische“ W. und setzt diese gleich bzw. proportional jenem Grenzwert (was Mises natürlich nicht tun kann), so mag diese seine These als ein allerdings sehr unwillkürlicher Hinweis darauf angesehen werden, daß es vielleicht doch so etwas wie eine „Brücke“ zwischen „subjektiver“ und „objektiver“ Wahrscheinlichkeit geben könnte.)³⁾

Auf den Haupteinwand Keynes aber, die Schwierigkeit, die das Prinzip der (sog. unvollständigen) Induktion für die objek-

besondere Fälle, wo sie allein aus dem Prinzip des zureichenden Grundes (?) abgeleitet werden können. (Gleichgewichtsgesetz des Hebels — gleiche Wahrscheinlichkeit der 6 Seiten eines homogenen Würfels [?]); und nur auf diese Fälle ist die klassische Definition . . . anwendbar. — Die „Hilfshypothese Weyls, von der Mises spricht, vermag ich weder aus dem vorstehenden Zitat noch aus dem diesem vorangehenden bzw. folgenden Text (Weyls) herauszulesen. Weyl berührt hier jedenfalls deutlich das Problem der Induktion (durch den Hinweis auf die — wenigstens für den mathematischen „Finitisten“, — „unsinnige Vorstellung der (als vollzogen fingierten) unendlichen Versuchsfolge“), ohne es jedoch beim Namen zu nennen, was in einem zum großen Teil der Philosophie der Naturwissenschaften gewidmeten Werke immerhin merkwürdig ist.

¹⁾ Siehe Fußnote 3, S. 321.

²⁾ Siehe Fußnote 1, S. 322.

³⁾ Mises führt überdies Beispiele an, für die trotz vorhandener Grenzwerte der relativen Häufigkeiten das Poisson'sche Gesetz nicht gilt, — um „den Einwand Weyls zu entkräften, wonach schon mit der Annahme der Häufigkeitsdefinition das Bestehen des Poissonschen Gesetzes postuliert würde“. — Auch diese Behauptung vermag ich bei Weyl nicht zu entdecken.

tivistische Auffassung der Wahrscheinlichkeit bildet, bleibt Mises die Antwort schuldig; dieses Problem wird von ihm nicht nur nicht gelöst, sondern wohl nicht einmal berührt.¹⁾ Die Auseinandersetzung damit blieb den beiden Autoren vorbehalten, denen wir uns nunmehr zuwenden.

4. Reichenbachs „induktiver“ Wahrscheinlichkeitsbegriff.

In teilweisem Gegensatz gegen Mises entwickelt der Physiker Hans Reichenbach eine (gleichfalls objektivistische) Wahrscheinlichkeitstheorie sui generis.²⁾ Wahrscheinlichkeit wird zunächst rein formal als eine Beziehung, genauer als eine Implikation zwischen den Elementen zweier Klassen behandelt, wobei diese Elemente in Form einer Folge (also geordnet) vorliegen müssen. Definiert wird diese Implikationsbeziehung durch Axiome — also implizit —, welche letztere dabei als Formeln erscheinen, die Vorschriften für den Gebrauch der von Reichenbach verwendeten Zeichen enthalten. Demgemäß läßt sich mit diesen Formeln sowohl operieren, ohne daß noch dem neuen Zeichen für die Wahrscheinlichkeit eine inhaltliche Bedeutung gegeben wird, als auch andererseits so, daß es jede mit seinen axiomatisch formulierten Eigenschaften verträgliche Deutung erhalten kann.³⁾ Das Ergebnis ist, daß auf diese Weise alle Theoreme der W.-Rechnung ohne Bezugnahme auf inhaltliche Deutung (also rein formal) ableitbar, wohl aber nachher inhaltlich anwendbar werden, indem sie z. B. im Sinne einer Häufigkeitstheorie gedeutet werden. Daß diese Deutung ein geeignetes Modell seines Axiomensystems ist, geht für Reichenbach daraus hervor, daß sich auf diese Weise sämtliche Axiome der W.-Rechnung als tautologisch erfüllt nachweisen lassen. Anders als Mises verzichtet Reichenbach auf alle weiteren speziellen Eigenschaften des W.-Begriffs, insbesondere auf Mises' Regellosigkeitsprinzip⁴⁾ und überhaupt „auf irgendwelche Vor-

¹⁾ Es soll daraus (wie aus anderen hier berührten Mängeln) nicht etwa gegen Mises ein Vorwurf erhoben werden; diese mögen durch die populärwissenschaftliche Tendenz seines Buches bedingt sein.

²⁾ Vgl. dessen Abhandlung *Die logischen Grundlagen des Wahrscheinlichkeitsbegriffs*, „Erkenntnis“ 1932/33, S. 402 ff.; ferner die zwischen Mises, Reichenbach, Carnap, Grelling, Waismann u. a. (mündlich) geführte Diskussion über den W.-Begriff (Prag 1930), abgedruckt in der „Erkenntnis“ 1931, S. 263 ff.

³⁾ Hilberts axiomatische Behandlung bzw. Axiomatisierung der Mathematik hat hier jedenfalls als Vorbild gedient.

⁴⁾ S. o. Abschn. 3., Fußnote 3, S. 319 (Forderung b).

schriften für die Ordnung der W.-Folgen“. — Andererseits erklärt er gleich auf der folgenden Seite („Die logischen Grundlagen“ etc. S. 405), daß „natürlich eine derartige W.-Rechnung auch Vorstellungen über die Ordnung der W.-Folgen entwickeln“ müsse, und daß Mises' „Regellosigkeit“ nur ein Spezialfall dieser verschiedenen Ordnungstypen sei. (Von mir gesperrt. M. — Es wird nicht klar, ob Reichenbach wirklich Nachdruck legen wollte auf den Unterschied zwischen „Vorschriften“ und „Vorstellungen“, oder ob er sich vielmehr widerspricht. Für beträchtlich vermäglich — im vorliegenden Zusammenhange — jenen Unterschied nicht zu halten.) Wenn wir nun ein Verfahren kennen, nach dem für eine vorliegende Ereignis-Folge ein Limes der Häufigkeit, falls vorhanden, auch bestimmbar ist, so ist damit die Anwendung der W.-Rechnung schon sichergestellt; denn alles noch Hinzukommende ist nur tautologische Umformung, da ja sämtliche Axiome für Folgen von Limes-Charakter tautologisch erfüllt sind.¹⁾ Mit der Untersuchung aber, wie jener Häufigkeitsgrenzwert bestimmbar ist, erhebt sich jedoch die eigentliche philosophische Schwierigkeit des W.-Problems, denn die in der Natur auftretenden W.-Folgen sind niemals durch eine Vorschrift, also nie intensional gegeben, sondern stets nur fallweise Aufzählung ihrer Glieder, also extensional. Infolgedessen kann auch stets nur ein erster endlicher Abschnitt einer W.-Folge gegeben sein, ohne daß über den unendlichen Rest eine bestimmte Aussage möglich wäre, speziell keine solche über den Grenzwert der Häufigkeit, — und damit ist die Sinnhaftigkeit von Aussagen über diesen Limes — wegen grundsätzlich mangelnder Entscheidbarkeit — in Frage gestellt, wenigstens im Rahmen der bisherigen „zweiwertigen“ Logik, der zufolge jeder Satz entweder „wahr“ oder „falsch“ sein müsse, unter Ausschluß jeder andern Möglichkeit. Reichenbach sieht daher den Ausweg in einer „mehrwertigen“ Logik, die zwischen die Terme „wahr“ und „falsch“ eine stetige Skala von „mehr oder minder wahrscheinlich“ einschalte. Die „Zweiwertigkeit“ soll überhaupt nur auf willkürlicher Festsetzung beruhen, nur konventionell, keineswegs notwendig sein; die Aussage »das Wetter ist sommerlich« z. B. könne sehr wohl „mehr oder weniger wahr“, „wahr im Grade w“ genannt werden. Andere diesbezügliche Festsetzungen würden gleichwertige Beschreibungen (der Tatsachen) liefern können, die sich in einander (und in die der „zweiwertigen“ Logik) trans-

¹⁾ Eine eingehendere Begründung wird nicht gegeben.

formieren ließen.¹⁾ Mit der (bloßen) Einführung einer „mehrwertigen“ Logik an sich ist aber noch nichts gewonnen, sie liefert eben nur gleich-, nicht höherwertige Beschreibungen; das eigenartige Problem der Wahrscheinlichkeitslogik besteht vielmehr darin, daß eine solche mehrwertige Logik zu schaffen ist, welche gilt, obwohl für Einzelaussagen an der Zweiwertigkeit festgehalten wird, die also „im Rahmen einer zweiwertigen Logik konstruiert wird“. Denn wir nennen ja ein zukünftiges Ereignis wahrscheinlich, obgleich wir wissen, daß eine Aussage über dasselbe nach seinem Eintreten als wahr oder falsch gilt. Jene Konstruktion gelingt, wenn von der Deutung (der W.) durch Häufigkeit Gebrauch gemacht wird, denn diese Deutung führt den Wahrscheinlichkeitsgrad²⁾ auf Zählung der Wahrheitswerte von Einzelaussagen zurück und reduziert dadurch den W.-Begriff auf den Wahrheitsbegriff. Aus diesem Grunde kann aber die W. nicht Prädikat von Einzelaussagen sein, sondern muß sich auf allgemeinere logische Gebilde beziehen, welche aus Einzelaussagen ähnlich aufgebaut sind wie eine Folge aus ihren Elementen.

Nun ist aber Wahrheit eine Eigenschaft einer Aussage allein, W. dagegen eine Beziehung, d. h. eine Ereignisfolge besitzt W. nur in Bezug auf eine andere Folge (was Reichenbach, hier vielleicht einen ähnlichen Gedanken Keynes' verwertend [s. o. Abschn. 2], an anderer Stelle eingehender begründet.)³⁾ Einen Ausweg aus dieser Schwierigkeit, den W.-Begriff analog zum Wahrheitsbegriff zu fassen, eröffnet die Erweiterung des Begriffes der Aussage zu dem der Satzfolge. Die Aussage entsteht aus einer Satzfunktion, indem man dieser einen Spezialwert des Arguments zuordnet⁴⁾; analog wird die Satzfolge aufgefaßt als entstanden durch Zuordnung einer Argumentfolge zur Satzfunktion. Und wie die Aussage Wahrheits-

¹⁾ Man möchte hier fragen, ob man mit gleichem Recht (wie „mehr oder weniger sommerlich“) z. B. sagen könnte „mehr oder weniger (gültig) getauft“, oder „mehr oder weniger Säugetier“? — Auch wenn andere Festsetzungen möglich sind, so ist damit noch kein Beweis geliefert, daß die der Zweiwertigkeit rein willkürlich ist; schlimmstenfalls hätte man sie als eine Art Vorurteil anzusehen.

²⁾ Entsprechend obiger stetiger W.-Skala.

³⁾ *Kausalität und Wahrscheinlichkeit*, „Erkenntnis“ 1930, S. 518 ff.; *Axiomatik der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Math. Zeitschr. 1932, S. 568; ferner *Wahrscheinlichkeitslogik*. Ber. Preuß. Ak. d. Wiss., Math. natw. Kl., 1932.

⁴⁾ z. B.: ‚x war ein Grieche‘ — Satzfunktion (= Aussagenfunktion); ‚Sokrates war ein Grieche‘ — Satz (= Aussage); ‚Sokrates war ein Grieche, Platon war ein Grieche, Aristoteles war ein Grieche‘ etc. etc. — Satzfolge.

wert besitzt, so kommt — analog — der Satzfolge Wahrscheinlichkeitswert zu. (Die Aussage aber erscheint dabei als derjenige Spezialfall der Satzfolge, in welchem die der Satzfunktion zugeordnete Argumentfolge nur aus einem Element besteht.) — Die „Wahrscheinlichkeitslogik“ ist nun nicht anders als ihrerseits eine Verallgemeinerung der „Aussagenlogik“, nämlich: eine Logik der Satzfolgen. Ihre Eigenart ist, daß sie von der Deutung der W. durch Häufigkeit im gleichen Sinne Gebrauch macht wie die Wahrscheinlichkeitsrechnung; denn W. kommt in ihr nicht den Einzelaussagen zu, sondern der Satzfolge, und der Wahrscheinlichkeitswert erfährt dementsprechend eine „extensionale Reduktion“ auf die Zählung von Wahrheitswerten. (s. o.) Die W. selbst brauchen wir dann nicht mehr als neben dem Wahrheitswert bestehende zum Sinn der Aussage gehörende Eigenschaft zu betrachten, sondern können sie als durch die Wahrheitswerte der einzelnen Elemente der Satzfolge vollständig bestimmt ansehen. — „Wenn aber die Wahrscheinlichkeit nur eine Eigenschaft von Satzfolgen ist, welche Bedeutung besitzt dann der Wahrscheinlichkeitsgrad für Einzelaussagen?“ „Der Spieler“, beantwortet sich Reichenbach seine Frage, „muß sich vor jedem Spiel für einen bestimmten Ausgang entscheiden, obgleich er weiß, daß die berechnete W. erst für größere Anzahlen Bedeutung besitzt; er fällt diesen Entscheid, indem er auf den „wahrscheinlichen“ Ausgang setzt.“ Dieses „Setzen“ soll nicht bedeuten, daß er des Ausganges gewiß sei; er fälle überhaupt kein Urteil über den Einzelfall, sondern nur darüber, daß sein (des Spielers) Eintreten für den wahrscheinlicheren Fall eine günstigere¹⁾ Handlung darstelle als das Gegenteil. (Sperrungen von mir. M. — Es bleibt nur zu fragen, ob denn jener „Einzelfall“ im vorliegenden Zusammenhang nicht immer eben als der „wahrscheinlichere“ gilt? Man gewinnt den Eindruck, als mache Reichenbach krampfhaftige Anstrengungen, um den „Aprioristen“ (Keynes z. B.) nicht ihre „Intuition“, ihr „direktes Urteil“ oder dgl. zugestehen zu müssen (wobei er sich aber in Widersprüche verwickelt, s. u.). Oder noch deutlicher: „Einen

¹⁾ Den . . . Begriff „günstiger“ können wir wieder durch eine Häufigkeitsaussage auflösen: Wenn der Spieler es sich zum Prinzip macht, stets auf den wahrscheinlicheren Fall zu setzen, so darf er im ganzen mit einer größeren Trefferzahl rechnen . . . (als sonst). Die Häufigkeitsdeutung vermag es danach sehr wohl zu rechtfertigen, daß wir auf den wahrscheinlicheren Fall setzen; zwar vermag sie . . . nicht zu garantieren . . ., aber sie liefert uns (dafür) ein Prinzip, welches bei stets wiederholter Anwendung zu einer größeren Trefferzahl führt als . . . ohne dieses Prinzip“ (erreicht würde).

Fall setzen heißt nicht, ihn als notwendig eintretend, die Aussage über ihn als wahr bezeichnen . . . ; mit diesem „Setzen“ machen wir überhaupt keine Aussage, sondern vollziehen eine Handlung, von der wir . . . nur wissen, daß sie sich einem Prinzipie einfügt, das zu einer größtmöglichen Trefferzahl führt.“ Dieser Begriff der Setzung, „das entscheidende logische Moment in diesen Ueberlegungen“, liefert also Reichenbach eine „Brücke“, — zwar wie er sagt „zwischen der Wahrscheinlichkeit der Satzfolge und dem Zwang zu einem Entscheid im Einzelfalle“, — in Wahrheit aber zwischen „objektiver“ und „apriorischer“ Wahrscheinlichkeit, denn die der Satzfolge entspricht ersterer, der „Zwang zum Einzelentscheid“ aber kommt letzterer zum mindesten verzweifelt nahe oder ist vielleicht nur eine sprachliche Verkleidung derselben. Eine Setzung, die dem „Prinzip der größten Trefferzahl“ (s. o) entspricht (das auch dann seine Anwendung finden soll, wenn es sich nicht gerade um Wiederholungen gleichartiger Einzelfälle handelt), nennt Reichenbach eine „optimale Setzung“, und die zu ihr gehörige Wahrscheinlichkeit ihre Beurteilung. Letztere ist also die Wahrscheinlichkeit der Satzfolge, deren Element die betreffende Setzung ist. (Von mir gesperrt. M.) — Man beachte: Die „Setzung“ ist nach Reichenbachs ausdrücklicher Erklärung eine Handlung, und keine Aussage, noch weniger ein Folge von solchen (Satzfolge). Wenn aber die Setzung keine Aussage ist, kann sie auch wohl nicht Element einer Satzfolge, d. h. einer Folge von Aussagen sein. Der Widerspruch oder zum mindesten die Unklarheit steckt also schon in dem — und gerade in dem —, was „das entscheidende logische Moment“ dieser Ueberlegungen sein soll!

„Der Begriff der „Beurteilung“ tritt also an Stelle des unhaltbaren Begriffs der Wahrscheinlichkeit einer Einzelaussage; dieser kann zwar nicht W , aber doch einer Beurteilung zugeordnet werden, durch welche die Wahrscheinlichkeit der zugehörigen Satzfolge mittelbar für den Einzelfall Bedeutung erhält.“ — Diese Ueberlegungen leiten aber schon zum „eigentlichen Zentralproblem des W -Begriffs“, dem der Induktion. Es gibt Fälle, in denen die Wahrscheinlichkeiten der zu „optimalen Setzungen“ gehörigen Satzfolgen unbekannt sind, und somit solche Setzungen unmöglich machen. M. a. W.: Wie ist der Limes einer extensional gegebenen unendlichen Folge zu bestimmen, von der jedoch nur ein endlicher Abschnitt bekannt ist? Reichenbach sucht dieses Problem durch seinen Begriff der „Setzung“ zu lösen: „Wenn wir in dem vorliegenden endlichen Abschnitt der Folge eine Häufigkeit h beobachtet haben, so setzen wir darauf, daß die Folge

bei weiterer Verlängerung (auch) einen Limes innerhalb $h \pm \delta$ zustrebt.“ (δ ist eine vorgegebene kleine Größe.) Jedoch kennen wir hier — anders als bei der „optimalen Setzung“ — die W. der zugehörigen Satzfolge nicht; es handelt sich nur um die Wahrscheinlichkeit für das Vorliegen einer anderen Wahrscheinlichkeit. Aber die Häufigkeitsdeutung wäre auch hier an sich anwendbar; man hätte die einzelne Folge als Glied einer Serie von Folgen aufzufassen, innerhalb deren die Häufigkeit einer Folge von bestimmtem Wert des Limes gezählt wird. Das setzt jedoch voraus, daß tatsächlich eine Serie von Folgen vorliegt — während wir es im allgemeinen nur mit einer einzigen Folge zu tun haben. Wir müssen also die „Setzung“ machen, ohne die zugehörige „Beurteilung“ zu kennen; „das ist das eigenartige Problem des induktiven Schlusses, denn das betrachtete Verfahren stellt ja nichts anderes als den induktiven Schluß dar“. Gewöhnlich wird dieser zwar nur in der engeren Form betrachtet, daß das Ereignis in einer großen Zahl von Fällen eingetreten ist, und wir dann schließen, daß es immer eintreten wird; aber dieser Fall ist nur der Spezialfall der Reichenbach'schen Induktion, in dem der Limes den Wert 1 hat, — denn das gleiche Problem liegt vor, wenn der Limes irgendeinen andern Wert h besitzt. Wichtig aber ist es vor allem, zu erkennen, daß der induktive Schluß keine „wahre“ Aussage ergibt, sondern daß hier eine „Setzung“ vorliegt. Diese „approximative Setzung“ (wie sie Reichenbach zum Unterschied von der „optimalen“ nennt) tut also so, als ob das Ziel schon erreicht wäre, und wird nur dadurch gerechtfertigt, daß sie schließlich einmal das Richtige treffen muß,¹⁾ „wenn überhaupt ein Limes der Folge existiert.“ (Von Reichenbach gesperrt. — Um letzteres festzustellen, gibt es aber kein Verfahren, oder besser: wo eine solche Feststellung möglich ist, kann eben nicht mehr von Induktion die Rede sein.) Die Existenz des Grenzwerts ist und bleibt also letzte Voraussetzung des induktiven Schlusses der „approximativen Setzung“. Natürlich läßt sich nicht etwa beweisen, daß alle in der Natur auftretenden Folgen einen solchen Limes besitzen; aber was wäre die Folge, wenn sie keinen besäßen? Dann wäre alles systematische Voraussagen unmöglich. In der Tat stehen wir hier vor einer Unbestimmtheit: wir wissen nicht, ob (im einzelnen Falle) ein Limes der Häufigkeit besteht. Falls er aber

¹⁾ Wenn nämlich die Folge überhaupt einem Limes zustrebt, so folgt aus der Definition des Limes, daß von einem bestimmten n (Stelle oder Glied der Folge) ab die geschilderte Setzung zu dem richtigen Ergebnis führen muß.

besteht, so werden wir durch „approximative Setzung“ schließlich einmal zu treffenden Voraussagen gelangen; ist er aber nicht vorhanden, so werden wir niemals dahin gelangen. Und darin sieht Reichenbach die — quasi-pragmatistische — Rechtfertigung des induktiven Schlusses: er ist das einzige *Verfahren*, das sicher zum Ziele führt, wenn überhaupt das Ziel erreichbar ist. Und sein Problem findet dahin seine Aufklärung, daß es für die Anwendung der Induktion nicht nötig sei, eine positive Voraussetzung zu kennen, sondern die Anwendung schon legitim ist, wenn nur das Vorliegen einer negativen Voraussetzung (d. h. der Nichtexistenz des Limes) nicht bekannt ist.¹⁾ Da aber nur unter Zuhilfenahme der Induktion die Häufigkeitsaussagen einen für die Anwendung auf die wirklichen Dinge faßbaren Sinn erhalten, ist die Wahrscheinlichkeitstheorie keine mathematische Theorie mehr. Eine ideale mathematische Wahrscheinlichkeitsrechnung gibt es überhaupt nicht. Der (vorstehend entwickelte) „induktive“ W.-Begriff ist vielmehr ein physikalischer Begriff, d. h. besser gesagt ein solcher, „ohne den die Physik nicht auskommen kann“.

Aus den Ausführungen Reichenbachs ergeben sich aber vielleicht über deren Thema hinausweisende bemerkenswerte Konsequenzen, die er z. T. selbst zieht. Wer sich auf den Standpunkt (Carnaps etwa) stellt, daß jede Aussage „wahr“ oder „falsch“ sein muß, d. h. prinzipiell bestätigt oder widerlegt werden könne, der müsse allerdings jede Wahrscheinlichkeitsaussage über die Zukunft, die mehr als (letzten Endes eigentlich) ein bloßer Bericht über Vergangenes ist, für sinnlos halten (weil im Sinne der „zweiwertigen“ Logik unentscheidbar). Aber Reichenbach glaubt, daß man solche „unentscheidbare“ Aussagen dennoch sehr wohl zulassen könne; schon das tatsächliche Verhalten jedes Menschen beweist ihm, daß es induktive Entscheidbarkeit (bei der es sich nicht um „entweder wahr oder falsch“, sondern um „mehr oder weniger wahrscheinlich“ handelt) wirklich gibt. Darüber hinaus erklärt es Reichenbach (auf eine Frage Carnaps hin) ausdrücklich für wissenschaftlich gerechtfertigt, „mehr zu sagen, als wir wissen“, d. h., daß es erlaubt sei, schließend über unsern Wissensbestand hinauszugehen, wenn dieses Schließen nur „nach bestimmten Prinzipien geregelt“ sei (nämlich nach dem Induktionsprinzip). M. a. W.: es gibt — zulässige — Schlüsse auf Dinge, die wir noch nicht wissen.

¹⁾ Reichenbach hätte also kaum Grund, den Aprioristen daraus einen Vorwurf zu machen, daß sie aus dem Nichtwissen Schlüsse ziehen.

Was aber für die Wahrscheinlichkeitstheorie, bzw. -betrachtungen der Naturwissenschaften billig ist, müßte auch für die Metaphysik recht sein, und Carnap hat in gewissem Sinne recht, wenn er Reichenbach diesbezüglich eine Inkonsequenz zum Vorwurf macht.¹⁾

Zusammenfassend wäre etwa zu sagen, daß zwar die Theorie Reichenbachs an dem (oben hervorgehobenen) in seinem Begriff der „Setzung“ liegenden fundamentalen Widerspruch krankt, der die darauf fußenden Ueberlegungen in Frage stellt, daß aber ihr Autor wohl als erster unter den Objektivisten die zentrale Bedeutung des Induktionsproblems für die Wahrscheinlichkeitstheorie erkannt und gerade im Zusammenhang damit seine Ausführungen ein über die Philosophie der Mathematik hinausgehendes Interesse beanspruchen können.

¹⁾ Vgl. Fußnote 2, S. 325.

(Fortsetzung folgt.)