Zur neupositivistischen Philosophie der Mathematik.

Von Arnulf Molitor.

1. Das Prinzip der „vollständigen Induktion" (in der Auffassung Ludwig Wittgensteins und Friedrich Waismanns) [1].

Der vielumstrittene Ursprung dieses Verfahrens, das gestatte, alle Grundgesetze der Arithmetik aus bloßen Definitionen herzuleiten, gilt auch unseren Autoren als „noch nicht ganz aufgeklärt". Zum Beweise werden die bekannten Ansichten Poincarés und Freges, „des größten Mathematikers und des größten Logikers um die Jahrhundertwende", einander gegenübergestellt. Die Leistung dieses „Schlusses von n auf n + 1", wie das Prinzip auch genannt wird, sieht Poincaré darin, daß es eine unendliche Anzahl von Schlüssen sozusagen in eine einzige Formel konzentriert [2]. Aber eine analytische Verifikation desselben sei nicht möglich; dazu müßte eben „der Abgrund" des mathematischen „Unendlich" „übersprungen werden, welchen die Geduld des Analysten, der auf die formale Logik als einzige Quelle beschränkt ist, niemals ausfüllen kann". Es ist also nach Poincaré „das Gesetz des rekurrenten Verfahrens", wie er unser Prinzip zumeist nennt, nicht auf das prinzipium contradictionis zurückführbar, somit nicht logischer Natur, auch keine Sache der bloßen Konvention, wie das Poincaré bei den Axiomen der Geometrie haben will, sondern ein synthetisches Urteil a priori. Während die geometrischen Axiome nur Konventionen (Festsetzungen) sind, hält Poincaré gegen Kant die Lehrsätze

[1]) Die nachstehenden Erörterungen beziehen sich in der Hauptsache auf Gedanken, die L. Wittgenstein in einem unveröffentlichten Manuskript niedergelegt hat und mit denen sich F. Waismann, dem es gestattet war, in dasselbe Einblick zu nehmen und es bei Abfassung seines Werkes *Einführung in das mathematische Denken* (Gerold & Komp., Wien 1936) zu benutzen, identifizieren will. Von der genannten „Einführung etc." kommt für das folgende hauptsächlich S. 71—79 in Betracht.

[2]) Poincaré, *Science et hypothése*, 1. Chap.

der Geometrie für analytisch; aber auf dem Gebiete der Arithmetik dagegen behalte Kant recht[3]).

Frege dagegen will durch seine Untersuchungen „wahrscheinlich gemacht haben, daß die (sämtlichen! M.) arithmetischen Gesetze analytische Urteile und folglich a priori sind. (Also auch der Schluß von n auf n+1. M.) Demnach würde die Arithmetik nur eine weiter ausgebildete Logik, jeder arithmetische Satz ein logisches Gesetz sein". Kant habe das zwar verkannt, behalte aber immerhin auf dem Gebiete der Geometrie recht, deren Wahrheiten auch Frege für synthetisch und a priori hält[4]).

Für B. Russell, den Lehrer Wittgensteins, ist die vollständige Induktion eine Definition und überhaupt kein Prinzip[5]). „Es gibt gewisse Zahlen", sagt Russell, für die sie gilt, und andere, für die sie nicht gilt (d. s. die „überendlichen" Kardinalzahlen Cantors). Wir definieren die »natürlichen Zahlen« als diejenigen, auf die man die mathematische (i. e. die vollständige) Induktion bei Beweisen anwenden kann. Daraus folgt, daß solche Beweise auf die natürlichen Zahlen angewendet werden können. Dies ist nicht irgendeine

---

[3]) Einen Poincaré verwandten Standpunkt nimmt (außer den Intuitionisten im engeren Sinn, wie vor allem Brouwer) Felix Klein ein, der den Ursprung des rekurrenten Schließens gleichfalls „für echt intuitiv" hält.

[4]) Der Standpunkt R. Dedekinds, wie er in dem vielzitierten Schriftchen *Was sind und was sollen die Zahlen?* begründet wird, ist dem Freges ähnlich: die „unter dem Namen der vollständigen Induktion bekannte Beweisart... ist... wirklich beweiskräftig, und auch die Definition durch Induktion... ist... bestimmt und widerspruchsfrei". — Poincaré indes ließ sich durch Dedekind nicht überzeugen: „Man kann leicht von einer Aussage zur andern übergehen und sich so der Einbildung hingeben, als hätte man die Rechtmäßigkeit des rekurrenten Verfahrens bewiesen. Aber man wird immer auf ein Hindernis stoßen, man wird immer (wieder) zu einem unbeweisbaren Axiom gelangen, welches im Grunde nichts weiter ist als der zu beweisende Satz, in eine andere Sprache übersetzt." (Von mir gesperrt. — Ich kann nicht finden, daß Poincaré das im speziellen Falle von *Was sind und was sollen die Zahlen?* bewiesen hätte, und das wäre nicht ganz überflüssig gewesen, auch dann nicht, wenn Poincaré letzten Endes in der Sache recht hat. M.).

[5]) Waismann selbst äußert sich diesbezüglich nicht ganz konsequent. S. 65 l. c. nennt er — ausdrücklich — „das Prinzip der vollständigen Induktion nicht eine Prämisse, aus der geschlossen wird, sondern eine Anweisung, nach der man schließt". (Der Unterschied wird nicht recht klar, da eine solche „Anweisung" ja jedenfalls dem mathematischen Schließen ganz allgemein zugrunde liegt und insofern auch eine Prämisse desselben bildet.) S. 78 l. c. nennt er es — ebenso ausdrücklich — eine Festsetzung (im Anschluß an Wittgenstein). Nur ist „Anweisung" und „Festsetzung" doch nicht genau dasselbe!

mysteriöse Intuition oder irgend ein Axiom oder Prinzip. Es folgt vielmehr einfach aus dem Satze selbst"[6]).

Das war sozusagen die wissenschaftshistorische Situation — im großen und ganzen wenigstens, — die Wittgenstein vorfand. Seine eigenen Entwicklungen nehmen von einem elementaren Rechenbeispiel ihren Ausgang[7]), nämlich der Division

$$\begin{array}{l} 1 : 3 = 0{,}3333\ldots \\ 10 \\ \;\;10 \\ \;\;\;\;10 \\ \;\;\;\;\;\;\ldots \end{array}$$

Wir schließen aus der Wiederkehr des Restes, daß es nun immer so weiter gehen werde. Die Rechnung aber ergibt das in Wirklichkeit eigentlich nicht, denn jede (praktisch ausgeführte) Division muß schon nach endlich vielen Schritten abbrechen. Andererseits zeigt allerdings schon der erste Schritt der Rechnung, daß der Rest wiederkehrt und sich daher die Ziffern des Quotienten periodisch wiederholen. Diese Periodizität oder vielmehr die Erkenntnis derselben bedeutet aber nicht weniger als die Konstruktion eines neuen Kalküls. Dabei ist zu beachten, daß die nach einigen Teildivisionen etwa ausgesprochene Behauptung »es werden nun lauter Dreien folgen« keineswegs den von Poincaré erwähnten Abgrund „überspringt" (s. o. S. 1), denn wir haben mit jener Periodizität ein Gesetz entdeckt, das Ziffern angibt, und haben es — entgegen dem ersten Anschein — nicht etwa mit einer unendlichen Extension zu tun (den „unendlich vielen" Ziffern, die noch folgen). 0,333 ... ist nicht eine notgedrungene Abkürzung, sondern ein (prinzipiell) neues Symbol, für welches seine eigenen (endlichen!) Rechenregeln gelten. Der angebliche Sprung ins Unendliche enthüllt sich so in Wirklichkeit als ein harmloser Übergang zu einem neuen Kalkül, der keine logische Folge des alten und in keiner Weise aus ihm ableitbar ist, sich aber in bestimmter Hinsicht an ihn anlehnt.

Nach dieser Einleitung will Wittgenstein auf das Wesen der vollständigen Induktion eingehen. Beweise, mit Hilfe der letzteren geführt, zeichnen sich durch eine völlig andere Struktur aus, als sie sonst mathematischen Beweisen zukommt. Es erfolgt dort kein Übergang von einer Formel zur nächsten nach fixen Regeln, sondern der

---

[6]) Vgl. Russell's *Einführung in die math. Philosophie*, deutsch von Gumbel und Gordon, Kap. 3.

[7]) In der Darstellung Waismanns.

Induktionsbeweis führt gar nicht zu der zu beweisenden Formel — was l. c. an dem Beispiel des Beweises des assoziativen Gesetzes der Addition dargetan wird [8]). In diesem Beweise kommt der bewiesene Satz gar nicht vor. Aber die Behauptung etwa, daß zu der im Beweise auftretenden Kette von Gleichungen noch ein besonderer Schluß hinzutrete, der den „Abgrund" überbrücke, der Schluß nämlich: also gilt der Satz für alle Zahlen" — diese Behauptung bezeichnet Waismann als eine schiefe Ausdrucksweise, geeignet, das Problem zu verdunkeln. Das gilt auch von der — gewöhnlich gemachten — Unterscheidung zwischen dem Satz als solchem, der einfach konstatiere, daß die fragliche Eigenschaft für alle Zahlen gelte, und dem Beweise durch Induktion, der nur einer der Wege sei, die zur Erkenntnis des Satzes führen. Denn ein Absehen vom Beweise läßt den Sinn des Satzes unerklärt, d. h. es läßt uns ohne Antwort auf die Frage, wie man denn den Satz anzuwenden und was man als Kriterium seiner Wahrheit anzusehen habe. Da es für uns nicht nur praktisch, sondern auch logisch unmöglich ist, „alle Zahlen zu durchlaufen, bleibt der Beweis durch Induktion in der Tat das einzige Kriterium der Wahrheit (des Satzes) — und dann aber gibt uns erst dieser Beweis den Sinn des Satzes an. — Eine Bemerkung, die nach Waismann viel allgemeiner gelten soll, vor allem für die Rechtmäßigkeit von Existenzbeweisen: „Der Intuitionist läßt nur solche Existenzbeweise gelten, die konstruktiv sind, d. h. in welchen ein Verfahren angegeben wird, den betreffenden Gegenstand in endlich vielen Schritten herzustellen. Alle anderen Existenzbeweise verwirft er als »sinnlos«; während der Formalist auch nichtkonstruktive Beweise zuläßt. Wenn unsere Bemerkung richtig ist, so zeigt sie, wie müßig dieser ganze Streit ist. Denn das Wort Existenz hat von vornherein noch keine klar umrissene Bedeutung und erhält eine solche erst durch den Beweis. Wenn nun der Beweis einmal konstruktiv, das andere Mal nichtkonstruktiv geführt wird, so hat eben die Existenzbehauptung einen verschiedenen Sinn". (Soweit Witgenstein bzw. Waismann.) Es bleibt aber m. E. die Frage durchaus offen — wenigstens die vorliegende Argumentation beantwortet sie nicht — inwiefern und weshalb das Wort „Existenz" im allerallgemeinsten Sinne wenigstens (nicht speziell im logisch-mathematischen, dessen „Bedeutung" doch

---

[8]) Ausgehend von der Definition (D) $a + (b + 1) = (a + b) + 1$ und der Annahme (A), der Satz gelte schon für eine bestimmte Zahl c: $a + (b + c) = (a + b) + c$, folgert W., daß der Satz auch für $c + 1$ gilt: $a + (b + [c + 1]) = a + ([b + c] + 1)$ (nach D) $= a + (b + c) + 1$ (nach D) $= ([a + b] + c) + 1$ (nach A) $= (a + b) + (c + 1)$ (nach D).

nicht so ganz unklar ist) erst durch einen (Existenz-)Beweis und nicht wenigstens ebenso durch den in Frage stehenden Gegenstand (bzw. die Gegenstandssphäre) die vermißte „klar umrissene Bedeutung“ erhalten soll. Und wenn es auch richtig ist, daß je nach dem Beweisverfahren die Behauptung der — mathematischen! — Existenz einen verschiedenen Sinn haben kann, so handelt es sich dennoch eigentlich auch hier um verschiedene (nämlich verschieden konstruierte bzw. nicht konstruierte) Gegenstände, und die angebliche Müßigkeit des Streites zwischen Intuitionisten und Formalisten erscheint insofern nicht erwiesen, als der Intuitionist nicht bloß eine solche „Existenz“, sondern schon derartige (nichtkonstruktive) „Beweise“ eben nicht als solche gelten läßt. Diese Streitfrage dreht sich gar nicht unmittelbar um den Begriff bzw. das Wort „Existenz“, sondern um die Zulässigkeit von gewissen Beweisverfahren.

Die Erkenntnis, daß der Beweis durch Induktion das einzige Kriterium der Wahrheit solcher Sätze wie des assoziativen Gesetzes z. B. ist, gibt uns den eigentlichen Schlüssel zum Verständnis des Wesens der Induktion. Durch den Beweis nämlich, daß der Satz für alle Zahlen gilt, wird erst der Sinn des Wortes „alle“ bestimmt, der hier ein völlig anderer ist als etwa in dem Beispiel »alle Sessel dieses Zimmers sind aus Holz«. Denn die Verneinung dieser letzteren Aussage bedeutet: »Es gibt wenigstens einen Sessel hier, der nicht aus Holz ist«; die Negation eines für alle natürlichen Zahlen gültigen Gesetzes besagt dagegen nur: »(Mindestens) eine der Gleichungen etc. des Beweises des Gesetzes ist falsch«, nicht aber »Es gibt eine Zahl, für die das Gesetz nicht gilt« — es wäre denn, daß man den Sinn dieses Gesetzes durch dieses (negativ gewendete) Kriterium definieren wollte.

Hier beginnen aber die Entwicklungen Wittgensteins dogmatisch zu werden. Daß die Verneinung eines für alle natürlichen Zahlen geltenden Gesetes A ausschließlich die von Wittgenstein und Waismann behauptete Bedeutung haben soll, wird, soviel ich zu sehen vermag, gar nicht weiter begründet, und verstößt m. E. durchaus gegen den herrschenden Sprachgebrauch, auch den der Mathematiker, wenigstens bis in die allerneueste Zeit. Nach jenem bedeutet die Negation von „A gilt für alle natürlichen Zahlen“ sehr wohl das Vorhandensein mindestens einer Zahl, für die A nicht gilt. Diese gewöhnliche, ursprüngliche Bedeutung erschien vielleicht Wittgenstein als eine verallgemeinerte, da aus ihr sich umgekehrt die eingeschränktere herleiten läßt, die Wittgenstein ausschließlich gelten lassen will (ohne eine Berechtigung zu dieser Einschränkung auch nur als Zweckmäßigkeit einer ad hoc getroffenen Festsetzung nachzuweisen); denn wenn es eine solche Zahl eben gibt, ist jeder Gegenbeweis hinfällig. Umgekehrt kann natürlich ein (scheinbarer) „Beweis“ für A sich als falsch herausstellen, und im Hinblick darauf, daß dieser Fall, grundsätzlich betrachtet, stets möglich ist, wäre es wohl verständlich zu behaupten, daß aus der Negation des Beweises noch nicht die Existenz des zu Beweisenden, im speziellen einer solchen Zahl folge; aber ein falscher Beweis ist eben keiner! — Einen klaren Ausdruck finden aber diese vielleicht vage gefühlten Beziehungen bei Wittgenstein und Waismann nicht.

Für Wittgensteins Ansicht soll auch folgendes sprechen: Wenn ich eine allgemeine Formel verneine, so soll ich damit meinen: »nicht diese Formel gilt, sondern jene (die richtige)«. Die Negation soll also nur den Zweck haben, eine allgemeine Formel in Gegensatz zu einer anderen solchen zu bringen, nicht aber den, eine Existentialaussage zu formulieren, — ähnlich wie ich etwa sage: »nicht grün, sondern gelb« oder dgl., wo die Verneinung einer Angabe nur auf eine andere solche vorbereite. Völlig anders aber soll es mit dem Beispiele »nicht alle alten Menschen bekommen graue Haare« bestellt sein, welcher Satz nur besagen soll, daß es alte Menschen gibt, deren Haar nicht ergraut. — In Wahrheit aber beweisen, wie ich glaube, diese Beispiele wenig. Die Analogie mit »nicht grün, sondern gelb« mag zutreffen, wenn es sich tatsächlich um in der mathematischen Formelsprache ausgedrückte „Identitäten“ wie etwa $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ handelt. Aber selbst solche Allsätze bzw. ihre Negationen, in die gewöhnliche Wortsprache übertragen etwa „Nicht für alle Zahlen gilt, daß das Quadrat der Summe von je 2 derselben gleich ist . . . u.s.w.“ werden vom mathematisch nicht Gebildeten als Existentialaussagen verstanden werden: „Es gibt mindestens eine solche Zahl . . . u.s.w.“ Und was vollends das Beispiel der Grauhaarigen betrifft, so beruht dessen scheinbare Beweiskraft bzw. Exemplifikation des Unterschiedes durchaus darauf, daß wir aus inhaltlichen, empirischen Gründen schon wissen, wie die betreffende Aussage zu verstehen ist; denken wir sie uns in eine (ev. ad hoc zu erweiternde) logistische Formelsprache gebracht, so scheint es mir doch nicht so über allen Zweifel erhaben, daß das richtige Verständnis jenes Unterschiedes schon aus ihrer bloßen Form, ihrer logischen Struktur hervorgehen müßte (auf die es doch hier allein ankäme).

Wie dem auch sei, Wittgenstein und Waismann halten nach dem Gesagten dafür, daß allgemeine Formeln der Mathematik und Existentialaussagen nicht demselben logischen System angehören.

(Für nichtmathematische Existenzbehauptungen ist das natürlich unbedenklich zuzugeben.) Kennzeichnend für die Stellung beider Autoren zum Intuitionismus, dem sich insbesondere Waismann im Gegensatz zu anderen Neupositivisten wie R. *Carnap* und *Hans Hahn* auch sonst gelegentlich sehr nähert, ist, daß sie sich hierbei auf *Brouwer* berufen: auch dieser habe mit Recht bemerkt, daß die Unrichtigkeit einer allgemeinen Aussage über Zahlen noch nicht die Existenz eines Gegenbeispiels bedeute. — Ich glaube jedoch, daß man auch dann, wenn man einräumt, daß derartige allgemeine Zahlenformeln und Existenzbehauptungen verschiedenen logischen Sphären angehören, noch nicht streng schließen kann, daß die *Unrichtigkeit* einer solchen allgemeinen Aussage nicht die Existenz eines Gegenbeispiels involviere. Man könnte höchstens sagen: Aus der *Negation des Beweises* einer solchen Aussage (dessen Richtigkeit prinzipiell stets dahingestellt bleiben kann) folgt noch nicht jene Existenz. Und weiter erscheint, wenn wir die erwähnte Ansicht *Brouwers* mit Waismann als richtig annehmen, der oben erwähnte Streit zwischen Intuitionisten und Formalisten (s. o. S. 430) keineswegs „müßig", wie das Waismann haben will, sondern zugunsten der ersteren entschieden.

Aus dem Vorhergehenden soll uns aber die eigentliche *Leistung* der Induktion klar werden: „sie ist nicht ein Schluß, der uns ins Unendliche trägt", . . . sondern . . . „ein ganz neuer *Kalkül*[9]), der aus den Rechnungen der elementaren Arithmetik in keiner Weise abgeleitet werden kann; und das ist das Richtige von *Poincarés* Bemerkung, das Prinzip der Induktion sei nicht logisch zu erweisen. Aber es stellt auch nicht, wie er meinte, ein synthetisches Urteil a priori dar, es ist überhaupt keine Wahrheit, sondern eine *Festsetzung*, welche besagt: Wenn die Formel $f(x)$ für $x = 1$ gilt und $f(c+1)$ aus $f(c)$ folgt, so sagen wir, es sei ‚die Formel $f(x)$ für alle natürlichen Zahlen bewiesen'," — und dazu dient, den Kalkül mit Buchstaben dem Kalkül mit natürlichen Zahlen anzupassen. Es sei auch keineswegs paradox, daß das assoziative Gesetz obwohl es doch für jede einzelne Zahl richtig ist, dennoch nur aus einer bloßen Definition (der Formel $a + (b+1) = (a+b) + 1$, s. o. S. 430, Fußnote 8) hervorgehe. Denn diese Definition soll keine Definition im Sinne der Schullogik sein, d. h. keine Ersetzungsregel, sondern eine *Anweisung zur Bildung von Definitionen*. In ihr soll also schon die Allgemeinheit beschlossen sein, die sich dann (von ihr) auf den induktiven Beweis überträgt. Aber auch der letztere selbst

---

[9]) Vgl. oben S. 429.

kann im Sinne unserer Autoren als eine bloße Anweisung zur Bildung von Beweisen für einzelne Zahlgleichungen angesehen werden, „als das allgemeine Glied einer Reihe von Beweisen". Man könnte ihn „geradezu in Form einer Reihe von Gleichungen mit einzelnen Zahlen hinschreiben, als ein Reihenstück mit einem „u.s.w.", und er verliert dadurch nicht seine Strenge". Zugleich soll diese Schreibweise viel klarer dartun, „daß die allgemeine Formel gar nicht aus dem Induktionsbeweise folgt — in der Formel kommen ja nur Buchstaben vor, in dem Beweise aber nur Ziffern".

Das beunruhigende Moment in dem Verfahren der vollständigen Induktion erblickt Waismann darin, daß wir den Zusammenhang zwischen der allgemeinen Vorhersage und der besonderen Rechnung nicht sehen. Aus diesem Grunde sei man immer geneigt gewesen, allgemeine Formeln als Zusammenfassungen aller einzelnen Rechnungen zu betrachten; nicht mit Recht, denn in Wahrheit gleichen solche allgemeine Formeln vielmehr einem die Reihe der Zahlen entlang ins Unendliche weisenden Pfeile. Der Unterschied ist (nach Waismann) ungefähr der nämliche wie der zwischen den Sätzen ‚Der Scheinwerfer scheint ins Unendliche' und ‚Er beleuchtet die Unendlichkeit'.

In diesen Bemerkungen über die eigentliche Leistung der vollständigen Induktion, mit denen Waismann seine Ausführungen beschließt, liegt der Schwerpunkt derselben. Ich vermag sie aber keineswegs für restlos befriedigend zu halten. Was zunächst die Bemerkung über die Unableitbarkeit des Induktionsprinzips aus der elementaren Arithmetik und Poincarés bekannte Ansicht betrifft, so wäre zunächst zu bedenken, daß die arithmetische Ableitbarkeit nicht schlechthin mit logischer Beweisbarkeit identisch ist, zum mindesten nicht auf dem Standpunkte Waismanns, der den Logizismus Freges, Russells und anderer verwirft. In der Tat hat W. Dubislav in seiner *Philosophie der Mathematik in der Gegenwart*[10] (Phil. Forschungsber. Bd. 13, 1932) einen logistischen Beweis des Prinzips angegeben, allerdings unter Voraussetzung eines intuitiven Unendlichkeitsaxioms, das zur formalen Logik hinzutreten müsse, um die elementare Arithmetik ableiten zu können. Aber dieses Unendlichkeitsaxiom selbst — die intuitive Einsicht, die Zahlenreihe ohne Ende fortsetzen zu können — ist noch nicht das Prinzip der vollständigen Induktion. Diese intuitive, nachträglich zum Axiom erhobene Einsicht scheint mir das Richtige an Poincarés Bemerkung zu sein, nicht

[10]) Die Waismann nicht erwähnt.

die an sich unbestreitbare Unableitbarkeit aus der Arithmetik, deren Sätze vielmehr selbst mit Hilfe des Induktionsprinzips deduziert werden. Zu behaupten oder zu bestreiten, daß unser Prinzip ein synthetisches Urteil a priori sei, ist letzten Endes wohl Geschmackssache; zu erklären, daß es überhaupt keine Wahrheit, sondern bloße Festsetzung sei, ist jedoch unbewiesenes Dogma. Warum man gerade diese und keine andere Festsetzung trifft, bleibt unbeantwortet; Waismann könnte auch schwerlich auf deren Zweckmäßigkeit hinweisen, weil sich da die weitere Frage erhöbe, warum sie denn so zweckmäßig ist[11]). Bei ihm erscheint sie nur als willkürlich ersonnene Annahme, wie um einer Verlegenheit zu entgehen. Immerhin halte ich es nicht für geradezu undenkbar — wenn man schon an dieser „Festsetzung" festhalten will — auf anderem Wege eine Art Rechtfertigung derselben zu versuchen: es könnte vielleicht jene intuitive Einsicht, daß wir in der Zahlenreihe ohne Ende fortschreiten können, zu solcher „Festsetzung" geführt haben — oder besser gesagt diese letztere nur ein weniger passender Name für erstere sein. Es wirkt auch einigermaßen befremdend, wenn behauptet wird, die (obige) Definition D (s. Fußnote 8) sei keine „Definition im Sinne der Schullogik", nämlich keine „Ersetzungsregel" (also offenbar keine Nominaldefinition), sondern nur eine Anweisung zur Bildung von Definitionen („Ersetzungsregeln"?), — und dann doch von ihr wie von einer „schullogischen" (Nominal-)Definition ausgegangen wird, um für das assoziative Gesetz einen logischen Beweis zu geben. Und vor allem: steckt in einer solchen (doch ohne Zweifel unbeschränkt, ohne endliche Grenze zu denkenden) „Anweisung" nicht schon das verkappte Prinzip der vollständigen Iduktion, so daß hier also das Problem nur verschoben, nicht gelöst wird?

Diese Auffassung wird von Waismann selbst indirekt zugegeben, wenn er sagt, daß „in dieser Anweisung schon die Allgemeinheit (d. h. also schon das Induktionsprinzip! M.) liegt und ... sich von da auf den induktiven Beweis (der dann also eine petitio principii wäre! M.) .. überträgt". — Wie ferner aus dem Umstande, daß die allgemeine Formel nur Buchstaben, der Beweis nur Ziffern enthalte, zu schließen wäre, daß jene nicht aus diesem folge, ist nicht ganz leicht einzusehen; und der Unterschied vollends, der durch den Vergleich mit dem die Zahlenreihe entlang ins Unendliche weisenden

[11]) Deren Beantwortung unvermeidlich entweder eine Aussage über den menschlichen Verstand oder eine solche über die Gebilde der Mathematik involvierte.

Pfeil dargetan werden soll, beruht wohl nur auf einem Wortstreit: das Zusammenfassen unendlich vieler Einzelsätze ist nur ein anderes Bild für die nämliche Tatsache, die das ins-Unendliche-Weisen ausdrücken soll. Nicht besser ist es mit dem Scheinwerfervergleich bestellt, der gerade dort hinkt, worauf es ankommt: wenn der Scheinwerfer ins Unendliche scheint, so wird die Beleuchtungsintensität immer schwächer, je weiter er dringt — was für das Induktionsprinzip gewiß nicht zutrifft.

Es scheint also, im ganzen betrachtet, der Ursprung und das Wesen des Prinzips der vollständigen Induktion durch die Entwicklungen Wittgensteins der völligen Aufklärung kaum näher gebracht worden zu sein.

(Fortsetzung folgt.)