

Infinitum prius finito

Von HENRY DEKU

Nicht alles, was auf den ersten Blick verschieden aussieht, muß es auch wirklich sein. So sind zum Beispiel Kreis und Ellipse vom Standpunkt der affinen Geometrie aus überhaupt nicht mehr unterscheidbar. Die projektive Geometrie geht noch weiter, insofern sie auch noch Parabeln und Hyperbeln in dieselbe Klasse tut als Gebilde, die durch Projektion auseinander hervorgehen. Die äußeren Unterschiede treten immer mehr zurück im Maße es nur noch auf die tiefer liegenden Wesenseigentümlichkeiten ankommt. So werden dann die einzelnen Geometrien zu speziellen Anwendungsfällen einer umfassenden Invariantentheorie, das heißt sie spezialisieren sich gemäß der Invarianz ihrer Inhalte gegenüber der affinen Gruppe der Parallelprojektionen, der projektiven Gruppe der Zentralprojektionen oder der topologischen Gruppe der stetigen Punkttransformationen. So daß am Ende, wenn auch nicht gerade verschieden dimensionierte Gebilde wie einseitige und zweiseitige Flächen, so doch immerhin schon Kugeln und Pyramiden vertauschbar werden. Die Mengenlehre schließlich hebt dann auch den letzten, den dimensional Unterschied auf: Strecken, Flächen, Körper können in umkehrbarer Eindeutigkeit aufeinander abgebildet werden, weil sie derselben Mächtigkeitsklasse angehören. Was übrigbleibt, ist lediglich der Unterschied zwischen endlichen und unendlichen Punktmengen. Der läßt sich nicht mehr reduzieren — an einer ganz bestimmten Stelle scheint Quantität so etwas wie einen qualitativen Unterschied zu erzeugen: und doch ist es unmöglich, diese Grenzstelle zu fixieren, das heißt die Bereiche des Endlichen und des Unendlichen fein säuberlich voneinander zu sondern. Denn dieses Unendliche hat die beunruhigende Eigenschaft, gleichsam überall mit dabei zu sein. Es läßt sich nicht ausschließlich außerhalb der räumlichen Grenzen beliebig großer endlicher Bereiche ansiedeln, es taucht mitten im Endlichen ebenfalls auf, zum Beispiel als die unendliche Dezimalbruchentwicklung von π oder $\sqrt{2}$ — wieweil letztere Entdeckung des Irrationalen noch für Aristoteles so faszinierend war, daß er insgesamt 28mal in seinen Werken darauf zu sprechen kam. Ja, die unendliche Teilbarkeit jeder endlichen Strecke macht es sogar scheinbar unmöglich, daß der schnellste Läufer die langsamste Schildkröte auf einer gemeinsamen Rennbahn jemals einholen, geschweige denn überholen könnte. Anstandshalber wird er ihr natürlich einen Vorsprung konzedieren: wenn er aber die Ablaufstelle der Schildkröte erreicht hat, ist diese selber schon ein Stück weiter. Und ebenso weiter in infinitum. Der Vorsprung wird sich zwar stetig verringern, aber wie könnte er jemals 0 werden? Mit anderen Worten: jeder Körper müßte, um irgendwo anzukommen, erst eine unendliche Anzahl von Punkten durchlaufen haben. Was in endlicher Zeit natürlich unmöglich ist. Also gibt es gar keine reale Bewegung! Gäbe es allerdings so etwas wie atomare Bestandteile körperlicher

und linienhafter Natur, dann könnte man diesen Einbruch des Unendlichen gewiß verhindern: man würde dann eben letzte Streckenatome annehmen, *ἄτομοι γραμμαί*, von denen man jeweils nur endlich viele zu addieren brauchte, um eine gewünschte Strecke zu erhalten. Aber solche Gebilde kann es nicht geben: entweder wären sie irgendwie ausgedehnt, also noch teilbar und nicht atomar — oder sie wären nicht ausgedehnt und dann wären sie eben keine Strecken. Außerdem stößt die Entdeckung des Irrationalen jeden Atomismus um: Quadratseite und Diagonale sind nicht mehr rational miteinander vergleichbar, was aber der Fall sein müßte, gäbe es eben Streckenatome als das gemeinsame Elementarmaß aller Strecken. So sind also nach jener Entdeckung der pythagoreischen Schule Raum und Zeit aus ausdehnungslosen Punkten beziehungsweise dauerlosen Momenten additiv zusammengesetzt. Und da die zusätzliche Entdeckung des Phänomens mathematischer Stetigkeit erst Aristoteles glückte, war es unmöglich, die Diskrepanz zwischen mathematischer Analyse eines Sachverhalts und dem physischen Stattfinden ebendesselben Ereignisses irgendwie zu überbrücken. Ein fliegender Pfeil ruht eben, da er sich in jedem Momente seiner Bewegung an einem wohlbestimmten der unendlich vielen Teilpunkte seiner Bahn befindet, nicht nur daß er infolge der unendlichen Anzahl der zu durchfliegenden Punkte nie ankommen könnte, er bewegt sich überhaupt gar nicht erst infolge der absoluten Ruhelage während unendlich vieler Momente!

Aristoteles löste nun die erste der Zenonischen Schwierigkeiten durch Einführung der Unterscheidung von aktueller und potentieller Unendlichkeit. Die unendlich vielen Teilpunkte einer Strecke zum Beispiel sind gar nicht tatsächlich — *actu, ἐνεργεία* — die die Strecke konstituierenden Summanden, sie existieren als in unendlicher Anzahl vorhandene überhaupt nur in der nachträglichen rechnerischen Analysis — nur *δυνάμει*. Tatsächlich — *actu* — gibt es immer nur eine, wenn auch beliebig vermehrbare, endliche Reihe von Punkten. Das Unendliche ist als ein Insgesamt körperlicher Elemente nie wirklich gegeben, es hat sein Sein lediglich in der unbegrenzten Möglichkeit des Fortschreitens, es ist, wie Aristoteles es mit beabsichtigter Zuspitzung phys 207 ausdrückt, weniger das, außerhalb dessen nichts mehr ist als das, außerhalb dessen immer noch etwas ist. Diese Theorie wird im großen und ganzen akzeptiert: noch die späteste Antike lehrt, daß das Unendliche sei *τὸ ἐν τῷ γίνεσθαι τὸ εἶναι ἔχον*: (Simplicius)¹. Vom rein Methodischen her gesehen liegt der Unterschied darin, daß Aristoteles Bewegungen als vollzogene Tatsachen ansieht, während Zenon das nachträgliche Produkt seiner denkerischen Analyse zu einer Art vorgängiger Bedingung macht für die Existenz des zu untersuchenden Gegenstandes. Statt nach Durchlaufung einer Strecke zu sagen, man hätte möglicherweise an irgendwelchen der unendlich vielen Teilpunkte Halt machen können, möchte Zenon darauf bestehen, daß man, um am Endpunkt anzukommen, erst einmal an unendlich vielen Zwi-

¹ εἰκότως ἄρα ἐν τῷ δυνάμει λέγεται εἶναι τὸ ἄπειρον καὶ οὐκ ἐν τῷ ἐνεργεία: Simplicii in Aristotelis physicorum libros quattuor priores ed. Diels: Commentaria in Aristotelem graeca vol. 9 p 493.

schenpunkten Halt gemacht haben muß! Aber daraus, daß man eine Linie in Gedanken beliebig oft unterteilen kann, folgt keineswegs, daß ebendiese Linie actu als Summe von unendlich vielen Teilstrecken existiert (phys 263 $\sigma\mu\beta\acute{\epsilon}\theta\eta\kappa\epsilon \gamma\acute{\alpha}\rho \tau\eta \gamma\rho\alpha\mu\mu\eta \acute{\alpha}\pi\epsilon\iota\rho\alpha \eta\mu\acute{\iota}\sigma\sigma\alpha \epsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota, \eta \delta' \omicron\upsilon\sigma\acute{\iota}\alpha \epsilon\acute{\sigma}\tau\iota\nu \acute{\epsilon}\tau\epsilon\rho\alpha \kappa\alpha\iota \tau\omicron \epsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota$): gleiches gilt für die Teilpunkte. Wirklich ist ein Punkt immer nur als Eck- oder Endpunkt. Beim Durchlaufen einer Strecke ist diese selbst wirklich, aber nur die beiden Endpunkte sind mehr als bloß potentiell. Mit diesem Ansatz läßt sich dann auch die Aporie der kontinuierlichen Gleichmäßigkeit oder des fliegenden Pfeiles lösen. Kein Ganzes besteht additiv aus ausdehnungslosen Elementarbestandteilen, also eine Linie nicht aus Raumpunkten. Würden nämlich, so kann man jetzt in entgegengesetzter Richtung schließen, ausdehnungslose Punkte einander berühren, so müßten sie doch, da sie als teillose Gebilde nicht gut mit ihren Enden aneinanderstoßen können, ganz zusammenfallen und demnach immer wieder nur einen einzigen Punkt, aber keine auch noch so winzige Linie bilden. Ebenso wenig besteht eine Bewegung aus letzten Bewegungselementen oder die Zeit aus dauerlosen Jetztpunkten ($\tau\acute{\alpha} \nu\upsilon\nu$ phys 231): infolgedessen kann auch kein Pfeil in irgendeinem imaginären (das heißt lediglich potentiellen) Zeitpunkt tatsächlich ruhen, womit bewiesen ist, daß er kontinuierlich fliegt, wenn er überhaupt fliegt (239).

Abschließend wird man zu diesen ursprünglichen Denkschwierigkeiten sagen können: der Atomismus, der mit endlich vielen Elementarbestandteilen operiert, opfert das Unendliche und behält dafür die Aktualität der Teilmengen; während der Pythagoreismus (dem man in diesem Falle auch noch zurechnen muß Aristoteles und Eudoxos, den Theoretiker des Irrationalen, der ja ein Schüler war des Pythagoreers² Archytas von Tarent!) das Unendliche beibehält, dafür jedoch auf die Aktualität der Teilmengen verzichten muß! Übrigens war der atomistische Finitismus als Arbeitshypothese gar nicht so übel: glückte doch mit seiner Hilfe die Volumenberechnung für Pyramide und Kegel. Aber Demokrit selber geriet ebendabei sofort auch in Continuumsschwierigkeiten, wie ein antikes Fragment uns berichtet (Mullach I p. 370: „es machte ihm nämlich die Frage Schwierigkeiten ob, wenn man einen Kegel parallel der Basis durchschneidet, die so entstehenden Schnittflächen einander gleich seien oder nicht. Sind sie gleich, meint er, so bestehe der Kegel aus gleichen Kreisen, was aber nur vom Cylinder gelte; sind sie aber ungleich, so müsse der Kegel auch ungleichmäßig, das heißt staffelförmig ansteigen“.

Mag sein, daß auch ohne die pythagoreische Mathematik die spätere Unendlichkeitsproblematik lediglich aus den immanenten Schwierigkeiten des Atomismus erwachsen wäre. Jedenfalls haben wir als das erste Resultat unserer Betrachtungen über das Unendliche im Endlichen erhalten, was der Aristoteleskommentator Simplicius so ausdrückt (phys 493) $\kappa\alpha\iota \xi\omicron\iota\kappa\epsilon\nu \acute{\epsilon}\pi\iota \tau\omicron\upsilon \acute{\alpha}\pi\epsilon\acute{\iota}\rho\omicron\upsilon \tau\acute{\alpha}\upsilon\tau\omicron\nu \epsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota \tau\omicron \delta\upsilon\nu\acute{\alpha}\mu\epsilon\iota \kappa\alpha\iota \tau\omicron \acute{\epsilon}\nu\epsilon\rho\gamma\epsilon\acute{\iota}\alpha$ (Wirklichsein geht im Möglichen auf). $\eta \gamma\acute{\alpha}\rho \tau\omicron\upsilon \acute{\alpha}\pi\epsilon\acute{\iota}\rho\omicron\upsilon \acute{\epsilon}\nu\epsilon\rho\gamma\epsilon\acute{\iota}\alpha \acute{\omega}\varsigma \acute{\alpha}\pi\epsilon\acute{\iota}\rho\omicron\upsilon \tau\omicron \delta\upsilon\nu\acute{\alpha}\sigma\theta\alpha\iota \acute{\alpha}\epsilon\iota \tau\iota \pi\lambda\acute{\epsilon}\omicron\nu$ Wirk-

² Eudoxos gegen Demokrit: Euklidscholia X 1. Anaxagoras frg 3 οὕτε γὰρ τοῦ μικροῦ ἐστὶ τό γε ἐλάχιστον, ἀλλ' ἔλασσον ἀεί.

lichsein ist das immer noch etwas mehr Können), da wenn jemand das vollendete Sein (ἐντελέχεια) beim Unbegrenzten suchen würde in etwas gleich wie einem Zustand oder einer Gestalt (στάσιν τινα καὶ εἶδος), er nichts anderes suchen würde als die Grenze des Unbegrenzten oder was dasselbe sagt: seine Vernichtung (πέρας τοῦ ἀπείρου, ταῦτόν δὲ εἰπεῖν φθοράν). τοῦτο δὲ ἀδύνατον. πᾶσα γὰρ ἐντελέχεια σώζειν ὀφείλει τὸ ὑποκείμενον (der Vollendungszustand konserviert) καὶ ὡς περ ἡ τοῦ κινήτου ἐντελέχεια φυλάττουσα τὸ δυνάμει (bewahrt das in der Möglichkeit sein) κίνησις ἦν, οὕτως καὶ ἡ τοῦ ἀπείρου das heißt also das Unendliche ist etwas von Wesen werdendes, es hat keine fertige Gestalt, weshalb es auch nie als Ganzes präsent sein kann: ihm eigentümlich ist die Bestimmung: „immer noch einmal einen Schritt weiter“. Es gibt einige versprengte antike Fragmente, die dieses „immer weiter“ (ἀεὶ πάλιν) auch schon vor Aristoteles vom Unendlichen ausgesagt haben (so Zeno frg 3 εἰ πολλὰ ἐστίν, ἅπειρα τὰ ὄντα ἐστίν· ἀεὶ γὰρ ἕτερα μεταξύ τῶν ὄντων ἐστί, καὶ πάλιν ἐκείνων ἕτερα μεταξύ); genüge hier der Hinweis darauf, daß noch Kant derselben Meinung ist, wenn er den Unendlichkeitsbegriff der philosophischen Dogmatiker verwerfend in seiner Kritik der reinen Vernunft schreibt (B 460): „der wahre Begriff der Unendlichkeit ist: daß die sukzessive Synthesis der Einheit in Durchmessung eines Quantum niemals vollendet sein kann“. Durch all das ist im allgemeinen der Eindruck hervorgerufen worden, als wäre den Griechen so etwas wie eine Unendlichkeitsscheu angeboren gewesen. Tatsächlich jedoch gilt die Gleichsetzung von endlich und vollkommen (phys 207) nur im Bereich der künstlerischen und religiösen Phantasie: ob es sich da um Ornamentik und dergleichen oder um die Verteilung übermenschlicher Funktionen an gewisse numinose Machtgebilde, die sogenannten Götter, handelt: in beiden Fällen wird das Verschwimmend-Unausgestaltete, das asiatisch Wuchernde ausgeschlossen. Auch um denkbar zu werden, muß etwas definierbar sein — und das bedeutet doch nur abgrenzbar gegen die unbestimmte Allheit möglicher Formen. So taucht denn in der bekannten Gegensatztafel der pythagoreischen Schule das Unendliche auf der Seite der negativen Qualitäten auf. Man darf aber diese sogenannte finitistische Einstellung nicht übertreiben, wie es etwa Spengler tat, oder E. Frank in seinem Buch über die Pythagoreer. Klar und eindeutig denken wollen bedeutet ja noch lange nicht, um die Probleme des Unendlichen sich herumdrücken zu müssen. So hat denn auch die klassische Mathematik offenbar keine nennenswerte Aversion gegen das Unendliche besessen, wenn Euklid zum Beispiel recht unbekümmert um angebliche diesbezügliche Vorurteile mit mustergültiger Präzision den Satz von der Unendlichkeit der Primzahlen deduziert. Auch kommt gelegentlich schon der Ausdruck κόσμος ἅπειρος vor (Herakleides Pontikos und Lucretius³). Man denke ferner an die unendlich vielen kleinen Weltbausteine des

³ Doxographi graeci, ed. Diels p. 328, cf. auch pp. 565, 590. Lucretius de rerum natura I 960 sqq., II 1013 sqq. Euripides frg. 941 N. Manilius astronomica I 211 sqq.; weiteres bei Schiaparelli, i precursori di Copernico nell' antichità 1873, in: scritti sulla storia dell. astronomia antica I p. 424; und Heath, Aristarch of Samos 1923, p. 309 ff. Das im Folgenden erwähnte „umfassende“ ἅπειρον (Anaximander A 11 nach Hippolyt. refut. 1,6; außerdem An-

Anaxagoras und die transfiniten Prozesse in der Kreisquadratur des Antiphon. Schließlich wird einem noch aus den Anfängen griechischen Philosophierens das *ἄπειρον* des Anaximander einfallen; wenn es von ihm heißt, daß es alles umfassend (*περιέχειν*) und eben unendlich sei, damit das Werden sich nicht erschöpfe, so ist doch damit eine positive Wertung der Unendlichkeit impliziert. Auch zweifelte niemand von Heraklit bis zur Stoa an einer unendlichen Abfolge von Weltperioden: daß die Zeit kein Ende habe, wurde durchaus nicht als Mangel empfunden — wenn auch tatsächlich diese Vorstellung nur dazu beigetragen haben mag, die schwermütige Grundstimmung der Antike nur noch zu intensivieren. Lediglich in jenem Augenblick, da man die Absurdität des Operierens mit unendlichen Mengen von infinitesimalen Elementen entdeckt, das heißt also bei der Aufstellung jener Zenonischen Paradoxien, bekundet sich eine gewisse Hilflosigkeit der ganzen Unendlichkeitsproblematik gegenüber, man versucht sogar, das Kind mit dem Bade auszuschütten. Und Aristoteles? Nun, Aristoteles mag gewiß für den naiveren Betrachter mit seiner Verweisung des Unendlichen ins Reich des Potentiellen jenem angeblichen Finitismus eine Konzession gemacht haben. Dabei bliebe nur gänzlich unbeachtet, daß es wie schon bei Platon auch bei ihm aktuelle Unendlichkeit im reinen Geiste gibt⁴. Unendlich ist zum Beispiel Gott als *causa finalis*, das heißt als Prinzip des ersten Anstoßes. Daß es ein solches überhaupt geben muß, ist unmittelbar evident — in unsere Vorstellungsweise übersetzt aus folgendem Grunde: 20 oder 50 Güterwagen bedürfen zur Fortbewegung einer Lokomotive. Ein Zug mit unübersehbar (oder gar unendlich) vielen Wagen dagegen müßte überraschenderweise von selber rollen können, wenn in analoger Weise das Universum ohne erste Bewegungsursache soll auskommen können. Nun ist aber eine unendliche körperliche Größe unmöglich, also ist die *prima causa* etwas schlechthin Einfaches, das heißt: Gott ist rein geistig, wie am Ende des 8. Buches der Physik deduziert wird.

Durch die intensive Religiosität der Spätantike begünstigt kristallisiert sich so auch terminologisch ein doppelter Unendlichkeitsbegriff heraus: der einer negativen Unbestimmtheit, worunter man die Formlosigkeit der bloßen Materie und die Unabgeschlossenheit ganz abstrakter Progressionen, kurz alle Potentialität versteht — und dereiner positiven, jenseits aller Zahl und Größenordnung liegenden reingeistigen Unendlichkeit, die man sich schon relativ früh gewöhnt hatte, mit dem Namen des *ἀγαθόν* zu bezeichnen: denn gerade das Wesen des Guten sei es, so meinte man, unerschöpflich zu sein, sich mitteilen und verschenken zu wollen, um eben darin neues Leben zum Blühen

axagoras frg. 2) wird von Tannéry, pour l'histoire de la science hellène 1930, p. 207, mit dem Lichtprinzip in Zusammenhang gebracht; ganz zu Recht, denn die vorsokratische Naturphilosophie ist, wenn auch nur ein stammelnder Versuch, doch weit mehr spekulativ und weit weniger mythisch als es die seit Nietzsche modisch gewordene Interpretation wahrhaben will. Ihr Prinzipienschema scheint zu sein: 1) ungeschiedenes Einssein (*χάος*, *ἄπειρον*), 2) Trennung (*δίχρη*, *πόλεμος*), 3) Verbindung (*ἔρωσ*, *ὕδωρ*, z. B. Parmenides frg. 13 und Euripides frg. 898): womit im Grunde aber nur die Lösung des spekulativen Einheit-Vielheit-Problems antizipiert ist.

⁴ Plotin 5,7, 1: τὴν δὲ ἐν τῷ νοητῷ ἀπειρίαν οὐ δεῖ δεδιέναι.

zu bringen — ohne jedoch in all dieser Selbstmitteilung weniger zu werden. Das Gute, unnötig zu sagen, daß etwas Fundamentaleres hiermit gemeint war als das bloß Moralische — das Gute ist von Wesen diffusivum sui⁵, etwas Überfließendes, das Anteil geben will an sich selbst, um auf diese Weise von Geist durchdrungenes Leben möglich zu machen neben sich selber. Aber weit entfernt davon, im unendlichen Sichverschenken an Wertfülle einzubüßen, nimmt es eher noch zu: gibt es doch für dieses fortschreitende Wachstum rein aus sich selbst heraus ein bemerkenswertes Beispiel bereits auf einer tieferen Stufe: denn auch alle einzelnen geistigen Güter, die seine schwachen Abbilder darstellen, sind streng genommen etwas Nichtendliches, da sie im Gegensatz zu materiellen Gütern durch Teilung anstatt weniger mehr zu werden pflegen (Simplicius in Epictet. 30). Ein Brot wird kleiner, wenn es aufgeteilt wird: je mehr daran partizipieren, desto weniger bekommt der einzelne. Aber weder wird der Professor ärmer an Wissen, wenn er doziert, noch lernt der Student notwendigerweise um so weniger, je größer das Auditorium ist! Handelt es sich aber um das Gut noch tiefer reichender Wahrheiten, dann profitieren zweifellos die an ihm Teilhabenden um so mehr, je größer ihre Zahl ist⁶. Denn solche Wahrheiten stiften neue Lebenszusammenhänge, die ohne sie gar nicht möglich gewesen wären. Wächst aber die Zahl gemeinsamer Anknüpfungspunkte in irgendeiner Lebensgemeinschaft, dann wird sich auch die Lebendigkeit der einzelnen, die zu ihr gehören, um so intensiver entfalten können. Es ist das genau jenes Phänomen, um dessen nähere Erklärung Dante seinen Führer Vergil bittet, als er nämlich wahrzunehmen glaubt, daß das Glück der Seligkeit für jeden einzelnen um so größer werde, je mehr Personen da sind, mit denen er es teilen kann: purgatorio 15, 49ff. (Gildemeister):

„weil eure Wünsche meistens dahin führen,
 wo durch Gemeinsamkeit entsteht Verlust,
 bläst gleich der Neid, die Seufzer anzuschüren.
 Dagegen wendete sich eure Lust
 empor zu jenem höchsten Sternenreigen,
 nie wäre solche Frucht in eurer Brust.
 Je mehr dort sagen: dies ist unser eigen,
 je höher wird dort jedermanns Gewinn,
 je höher auch die Nächstenliebe steigen.“
 Da sagt' ich: „Hungriger nach Wissen bin
 ich nun, denn ehe ich dich angegangen,
 und mehr des Zweifels heg ich auch im Sinn.
 Wie mag es sein, daß ein geteilter Segen
 die mehreren Besitzer reicher macht
 als wenn nur wenige des Schatzes pflegen?“

⁵ Bei Platon steckt diese scholastische Charakterisierung im ἀφθονον des Phaidros. Phaidros 247 und Timaios 29.

⁶ Demophilos bei Mullach I p 498: ἡγοῦ μάλιστα ἀγαθὸν εἶναι ὁ καὶ ἑτέρῳ μεταδιδόμενον πολὺ μᾶλλον αὐξέται.

Und er darauf: „Du gibst nur immer acht auf Dinge, die sich in der Zeit begrenzen, so wird dir denn aus wahren Lichte Nacht. Dort oben ist das Gut unsagbar, ohne Grenzen. Die Liebe kommt hinzu zur Seligkeit wie Sonnenlicht zu Körpern, die schon glänzen, und so viel Glut empfängt es, wie es auch verleiht; so auch die Liebe, die je mehr ihr Streben sich ausdehnt, mehr an ewiger Kraft gedeiht. Je mehr gegenseitig sich verstehn in jenem Leben, je mehr des Guten auch, je mehr liebt man das Gut und gibt's einander wie die Spiegel geben . . .“

Soviel zur qualitativen, geistigen Unendlichkeit im Endlichen. Kehren wir aber noch einmal zum quantitativen Aspekt des Problems zurück, zumal dieser zu Beginn der Neuzeit wiederum erhebliche Kopfschmerzen zu verursachen imstande war. Es handelt sich da um die berüchtigten infinitesimalen Größen des Differentialkalküls. Newton hatte sie zwar von vornherein scharf zurückgewiesen, und auch bei Leibniz dürften sie keine wesentliche Stütze finden. Und doch sollte zum Beispiel nach populärer Auffassung die Kurventangente im Punkte P die Verbindungslinie zwischen P und einem unendlich benachbarten Kurvenpunkt darstellen, das Volumen einer Kugel entsprechend die Summe der Volumina jener unendlich vielen Pyramiden, die entstehen, wenn man die Kugeloberfläche mit einem Netz unendlich kleiner Dreiecke bedeckt und dann den Kugelmittelpunkt mit den drei Ecken eines jeden solchen Dreiecks verbindet und dergleichen mehr. Daß eine solche Auffassung unhaltbar und überdies auch unnötig ist, wurde von Cauchy erkannt. Die Infinitesimalmethode darf sich nicht auf etwaige unendlich kleine Größen, sondern ausschließlich auf ein Limesverfahren stützen. Die Tangente ist nicht eine Gerade, die durch zwei „unendlich benachbarte“ Punkte geht — denn so lange ich noch zwei Punkte auf einer Kurve unterscheiden kann, gibt es offenbar noch weitere zwischen ihnen, so daß sie gar nicht so unendlich benachbart sein konnten. Oder aber sie sind gar nicht zu unterscheiden, dann sind sie aber auch nicht mehr zwei. Man kommt da nur weiter, wenn man vermeintliche Quanta ersetzt durch einen kontinuierlichen Grenzübergang: die Tangente ist dann — dynamisch verstanden — der Grenzfall einer Sekante, das heißt Gegenstand des Problems ist eine Bewegung, deren Maß die Geschwindigkeit ist. Die Geschwindigkeit der Zunahme wird Fluxion genannt, die entstehende Quantität Fluente: so Newton im tractatus de quadratura curvarum vom Jahre 1704, nachdem er das Limesproblem schon 1687 in den principia philosophiae naturalis mathematica aufgerollt hatte. An die Stelle kleinster Kurventeile trat nun das verschwindend-teilbare Kurvenstück. Man hatte zwar eingewandt, es könne kein letztes Verhältnis verschwindender Größen geben; denn bevor sie verschwunden seien, sei das Verhältnis nicht das letzte; nachdem sie verschwunden seien, existiere kein Verhältnis mehr.

Aber Newton hatte darauf erwidert, man könnte dann mit gleichem Recht behaupten, es gebe beim Aufhören einer Bewegung keine letzte Geschwindigkeit. Man verstehe jedoch unter dieser letzten Geschwindigkeit nicht eine, die noch bestand bevor die Bewegung zu Ende war, sondern vielmehr diejenige, die im Moment des Aufhorens vorhanden war. So wäre auch das Verhältnis verschwindender Größen das im Moment des Verschwindens stattfindende: die letzten Verhältnisse, mit denen die Größen verschwänden, seien eben nicht Verhältnisse letzter Größen, sondern Grenzwerte, denen sich die Verhältnisse der stetig abnehmenden Größen beliebig annäherten. Die mathematische Atomistik ist mit dieser Newtonschen Grundlegung des Infinitesimalkalküls endgültig überwunden, mit anderen Worten: die Aristotelische Theorie hat sich zum zweiten Male als die zuverlässigere erwiesen! Wenn nun Leibniz tatsächlich zuweilen von unendlich kleinen Größen sprach — er meinte nämlich, daß unendliche Teilbarkeit immer schon aktual-unendliche Geteiltheit voraussetze, so daß in jedem kleinsten Teil eine unendliche Welt wiederzufinden sei — so ist der Gegensatz zu Aristoteles doch nur ein scheinbarer, weil es sich bei Leibniz nicht um die empirischen Dinge handelt, sondern ausschließlich um das, was ihnen an metaphysischer Realität im intellectus divinus entspricht: und das sind Monadenaggregate, deren unendliche Zusammengesetztheit für ebenjenen intellectus allerdings unmittelbar evident ist. Ja, von einem solchen spiritualistischen Blickpunkt aus gibt es dann sogar wieder so etwas wie ein aktual Unendliches: „je suis tellement pour l'infini actual qu'au lieu d'admettre que la nature l'abhorre comme l'on dit vulgairement, je tiens qu'elle affecte partout pour mieux marquer les perfections de son auteur (an Foucher)⁷. Im Barock hat so das Endliche einen Charakter von Unendlichkeit erreicht, der nicht mehr gut überboten werden konnte: indem der Mikrokosmos dasselbe tut wie der Makrokosmos, nur in entgegengesetzter Richtung, sozusagen auch innen hinein sich ins Unendliche erstreckend, liefert auch er einen Beweis für die schlechthin überall wirksame Weisheit Gottes⁸. Andere Logiker des Jahrhunderts sind vom gleichen Phänomen fasziniert — in der Logik von Port Royal zum Beispiel (1684) findet sich eine Betrachtung darüber, wie man es verstehen könne, daß das kleinste Getreidekorn ebensoviele Teile enthalte wie die ganze Welt und daß es keinen Teil dieses Kornes gäbe, der nicht ebenfalls eine Welt in proportionaler Verkleinerung enthielte!

Die Infinitesimalstruktur der Dinge ist der greifbare Reflex der göttlichen Unendlichkeit, genauer: des Wissens Gottes von den Dingen. Cavalieri und Fermat bereits setzen daher voraus, daß alle Größen die Summen von unendlich vielen kleinen Elementarquanten derselben Art tatsächlich sind. Die

⁷ Dutens II 1, p. 243. cf. an père des Bosses 14. 2. 1706: infinitum actu in natura dari non dubito.

⁸ Plouquet, principia de substantiis et phaenomenis 1764 cap. 2: duplici modo divisibilitas spectari poterit aut enim de resolubilitate objectiva aut de subjectiva agitur, objective, h.e. in quantum materia effective pendet a repraesentationibus divinis eo usque est resolubilis quo usque resolubilitatem intellectus infinitus videt. Divisibilitas materiae subjectiva non ultra perceptiones nostras extenditur.

Mathematik, die also genau zwei Jahrtausende vordem der klassischen Seinsmetaphysik den unersetzlichen Analogiebegriff zur Verfügung gestellt hatte, hilft nunmehr in einer beinahe ebenso eingreifenden Weise mit, den Übergang von Gott als dem *Esse purum* zu Gott als dem reinen, die Welt konstituierenden Selbstbewußtsein — bei Eckhart bereits angebahnt — zwar nicht verständlich, aber doch psychologisch plausibel zu machen. Das Sein der Dinge ist ihr Gedachtwerden durch Gott, weil es *extra mentem divinam* ebenso ist wie in *mente divina*. Allerdings wird damit der Schöpfungsbegriff langsam überflüssig, aber in einer gewissen Weise ist ja ohnedies nur die antike Ausgangsposition wiedergewonnen: neben dem potentiellen Unendlich der nachträglich denkerischen Analyse und dem aktualen Unendlich des reinen Geistes gab es ja schon von Anfang an einen ebenso unselbstverständlichen Reflex geistiger Unendlichkeit wenn auch nicht in der Dimension räumlicher Infinitesimalstruktur, sondern in der einer zeitlichen Extension: in der Weise unendlicher Zeit als eines bewegten *εἰκὼν* göttlicher Ewigkeit (Platon, Tim. 37). Beides sind unbeweisbare Theologumena. Darüber hinaus scheinen sich übrigens Raum und Zeit in dieser Rolle des uneigentlichen Repräsentanten geistiger Unendlichkeit abzulösen. Wenn die Barockzeit die nominalistische Kritik an der aristotelischen Kosmologie konsequent zu Ende führt, und zwar nicht nur zugunsten eines Universums, dessen Zentrum überall ist, das also schon damit göttliche Eigenschaften übernimmt, weil es in ihm ja kein oben und unten mehr gibt (cf. Plotin 6, 3, 12), sondern auch zugunsten einer im *intellectus divinus* behéimateten Mathematizität alles Seienden⁹, dann wird sich von Kant ab das Schwergewicht der Betrachtung wieder auf die zeitliche Dimension unendlichen Fortschreitens verlagern: Gott selbst sogar wird allererst — nach der Meinung des deutschen Idealismus — in der Geschichte.

Nun ist aber bei allen diesen Betrachtungen noch keineswegs hinreichend klar geworden, wie weit eigentlich die eben behauptete gegenseitige Verklammerung des Endlichen und des Unendlichen reiche — ob dieses sich zum Beispiel auf das Phänomen der unendlichen Teilbarkeit beschränke; ob die makrokosmische Problematik des Unendlichen eine spezifisch andersartige und eventuell weiterführende sei und dergleichen mehr? Zu diesem Zwecke dürfte es sich empfehlen, die mathematischen Gebilde überhaupt nach zwei Gesichtspunkten zu unterscheiden: nämlich nach der Klasse derjenigen, die erst im Laufe mathematischer Untersuchungen angetroffen werden wie zum Beispiel die Weierstraßsche *p*-funktion, und der Klasse jener Gebilde, die immer schon vorausgesetzt sein müssen, bevor die Arbeit an irgendeinem konkreten Problem überhaupt in Gang kommen soll. Das Unendliche ist offenbar ein Begriff der zweiten Art, ebenso wie zum Beispiel die Begriffe der geraden Linie oder der Zahl Eins, die in apriorischer Anschauung gegeben sein müssen, da

⁹ Leibniz an Beyle 1687: la souveraine sagesse agit en parfait géomètre; monadologie § 65: autrement il serait impossible que chaque portion de la matière pût exprimer tout l'univers — wie das in klassischer Weise eben in der Mathematik der Fall ist: jede ihrer Disziplinen impliziert alle übrigen! Immerhin ein nobler Irrtum verglichen mit der in Anm. 20 zitierten Schwarmgeisterei.

man ja sonst gar nicht wüßte, woraufhin man denn etwa von den Unebenheiten aller empirischen Linien abstrahieren sollte, wenn eben nicht auf die empirisch niemals auch nur approximativ gegebene Geradheit der Geometrie hin. Genau so ist aber auch das Unendliche bereits im elementarsten Arithmetisieren impliziert: denn ohne Voraussetzung der unendlichen Reihe der natürlichen Zahlen ist sinnvolle Arithmetik gar nicht möglich: es kann keine Zahl geben, die keinen Nachfolger hätte, selbst wenn man lediglich mit Modulkongruenzen operieren wollte. Ohne die 2 ist die 1 nicht mehr Zahl, sondern nur noch ein Gedankending, das allenfalls selber zählbar wird. Der Begriff des Unendlichen ist somit in der Definition der endlichen Zahl als endlicher mitenthalten. Auch wenn er nicht ausdrücklich zum Gegenstand der Untersuchung gemacht wird, wird er doch immer schon als konstitutives Element all dessen, was nicht unendlich ist, implicite mitgewußt. Das war schon bei Galilei eine präzise Einsicht, wenn auch die Formulierung, die er ihr verlieh, etwas weniger präzise ausfiel: es heißt nämlich in seinen *discorsi*, daß wenn irgendeine Zahl das Attribut der Unendlichkeit haben sollte, es die Einheit sei, da man in dieser die Bedingungen und die nötigen Requisite der Unendlichkeit finde. Gewiß, denn die Elemente der Zahlenreihe sind ja nicht Individuen, die beliebig irgendwo angetroffen und dann erst nachträglich gleichsam in eine vernünftige Ordnung gebracht werden — sie existieren von vornherein ausschließlich als Elemente eines Systems, das sie erzeugt hat. Wollte man sich aber hinsichtlich des letzteren nur auf zwei *Characteristica* beschränken, nämlich die Voraussetzung einer Einheit und die Permanenz des Fortschreitens von n zu $n + 1$, so ist eben in dieser Permanenz die ganze Unendlichkeitsproblematik schon involviert. Das heißt: das Unendliche taucht nicht bei irgendeiner Progression an einer bestimmten Stelle erst auf, so daß bis dahin alles im Endlichen geblieben wäre, es ist vielmehr das methodische Erzeugungsprinzip der Progression als solcher. Es ist kein individuelles Element hinter allen endlichen: insoweit es fixierbar wäre, wäre es ja selber noch endlich, sondern ein Inbegriff, ein Klassentypus. Es ist wie Leibniz sagt „distributiv“ gegeben und gerade deshalb auch durch endlich viele Denkkakte erfassbar. Statt dazu verurteilt zu sein, auf dem Wege sukzessiver Abzählung hinter sein Wesen kommen zu müssen, erkennt man unmittelbar, daß sein inbegrifflicher Charakter allen individuellen Elementen im Denken voraufgeht. Recht verstanden darf man also sagen, das Unendliche sei früher als das Endliche, es sei dessen sachliches Prius. Das mag im Augenblick paradox klingen, ist aber doch selbst im Rahmen umfassenderer Betrachtungen so ganz unwahrscheinlich nicht. Könnte es denn wirklich nur Endliches geben? Könnte es denn grundsätzlich so sein, daß man immer nur auf Grenzen stieße? Heißt denn nicht im Gegenteil eine Grenze vorfinden immer schon — zumindest in Gedanken über ebendiese Grenze hinaus sein? So wie Materie für den erkennenden Geist als das geistlose Substrat möglicher Formung etwas schlechthin Unfaßbares ist, ein hypothetischer Begriff nur, so ist auch Endlichkeit eine widerspenstige Kategorie: denn was begrenzt ist, grenzt ebendarin an etwas *a n d e r e s*; und so scheint es die Natur des Endlichen

selber zu sein, über sich hinauszugehen¹⁰. Der Beginn der Neuzeit war auch von dieser Art eines mehr logisch-theologischen Unendlichkeitspathos erfüllt: das Unendliche galt ihm noch nicht als Gegensatz oder gar Widerspruch zum Endlichen, sondern als dessen Constituens, so bei Nicolaus von Cusa, so bei Cartesius (medit. 3, VII p. 45): nec putare debeo me non percipere infinitum per veram ideam, sed tantum per negationem finiti ut percipio quietem et tenebras per negationem motus et lucis: nam contra manifeste intelligo plus realitatis esse in substantia infinita quam in finita, ac proinde priorem quodammodo in me esse perceptionem infiniti quam finiti, hoc est Dei quam mei ipsius. Der Mensch ist gewiß endlich, aber als ein geistiges Wesen Schnittpunkt von Endlichkeit und Unendlichkeit, geradezu — und das ist bei diesem Vergleich das Entscheidende — ein Endliches, das erst, wenn vom Unendlichen durchdrungen, zu seiner spezifischen Vollendung gelangt. Leibniz nennt diesen Übergang den vom regnum naturae zum regnum gratiae; die Kirchenväter sprachen, weit weniger zurückhaltend noch, von der deficiatio des Menschen; nicht im pantheistischen Sinne, sondern um anzudeuten, daß erst in der Begegnung mit dem unendlichen (wenn auch selber Mensch gewordenen) Gott der Mensch ganz Mensch werde: plus elle nous déifie, plus la grâce nous humanise (S. François de Sales).

Man hat zwar gegen diese konstitutive Rolle des Unendlichen in der Arithmetik einwenden wollen, Endliches und Unendliches seien völlig disparate Spezifikationen eines primären, noch ganz indifferenten Zahlbegriffs, aber die dabei benutzte Definition der Zahl als gemeinsamer Eigenschaft gleichzahliger Klassen ist unannehmbar. Erstens nützt mir die vollendetste Äquivalenz nichts, wenn mir auf die Frage: wieviel Elemente die Menge M habe, geantwortet wird: sie habe ebensoviele wie all die Mengen, deren Elemente sich den Elementen von M ein-eindeutig zuordnen lassen. Und zweitens ist der Begriff der Klassenäquivalenz in der Arithmetik ohnedies sinnlos, da diese nur eine Zehn kennt, nicht aber qualitativ verschiedene Objektmengen von der Mächtigkeit 10. Zudem ist überall da, wo es sich um die Konstitution mathematischer, das heißt nichtempirischer Mengen handelt, der arithmetische Zahlbegriff bereits impliziert. Die Mengenlehre ist schlechterdings nicht fundamental genug, sie setzt die Arithmetik voraus. Im übrigen verwickelt man sich sofort in irgendeine der sogenannten Paradoxien, wenn man die innere Zugehörigkeit des Unendlichen zum Endlichen leugnet, was man auf die folgende Weise zeigen kann: Unter einer wohlgeordneten Menge verstehe man eine solche, die selber ebenso wie jede ihrer Teilmengen ein erstes Element besitzt. Infolgedessen gibt es in einer wohlgeordneten Menge zu jedem Element ein unmittelbar folgendes: denn die Menge der auf ein bestimmtes Element folgenden Elemente ist ja eine Teilmenge der Gesamtmenge, hat also definitionsgemäß ein erstes Element. Nun gibt es zu jedem Ordnungstypus m auch den nächstgrößeren $m + 1$; ihre Gesamtheit bildet selber eine wohlgeordnete Menge. Unter den unendlichen Ordnungstypen muß es einen klein-

¹⁰ Hegel, Werke ed. Glockner 15, p. 184: „im Bewußtsein der Schranke liegt das Darüberhinaussein“; so schon Aristoteles phys 203 b 21 sqq.

sten geben, da deren Teilmenge sonst kein erstes Element besäße: es ist das ω = Ordnungstypus der natürlichen Zahlenreihe, so daß wenn

$$\{1, 2, 3, 4, \dots\} = \omega$$

das kommutative Gesetz nicht mehr gilt:

$$\begin{aligned} m + \omega &= \omega & \text{aber } \omega + m &> \omega \\ \text{und } \{1, 3, 5, \dots, 2, 4, 6, \dots\} &= \omega + \omega = 2\omega \neq \omega 2 \end{aligned}$$

Menge W aller Typen wohlgeordneter Mengen ist selber wohlgeordnet und sei vom Typus η . Da W alle Ordnungstypen enthält, enthält es auch seinen eigenen. Andererseits ist innerhalb von W jeder Ordnungstypus zugleich der Ordnungstypus der ihm in W vorausgehenden Teilmenge

$$0, 1, 2, \dots, \omega, \omega + 1, \dots, \omega 2, \dots, \eta$$

Folglich ist η Typus der vorausgegangenen Teilmenge und zugleich Typus von W , also $\eta + 1 = \eta$, während tatsächlich doch nur $1 + \eta = \eta$. Also verhalten sich die Cantorsche Ordnungstypen widerspruchsfrei nur unter der Voraussetzung, daß ihre Reihe un abgeschlossen ist: es gibt kein größtes η ! Der Zählprozeß ist grundsätzlich infinit. Das Außerordentliche des Cantorschen Schrittes ins Transfinite lag gerade darin, daß ein ω eingeführt wurde, das auf alle natürlichen Zahlen folgte, dabei aber selber nicht als letzte definiert wurde — im Gegenteil, es war die erste einer neuen Reihe. Führt man dann aber hinter allen ω -Potenzen ein absolut letztes Element η ein, dann zerstört man mit ebendiesem Versuch, die weitere Zählung unmöglich zu machen, nur jenes Prinzip selber, mit Hilfe dessen aus den ersten Ordnungstypen alle weiteren erzeugt wurden. Übrigens liegt hier eine gewisse Parallele zur eingangs behandelten Continuumproblematik vor: so wie das Unendliche mit dem Zahlbegriff gegeben und den einzelnen Zahlen logisch vorausgeht, so ist auch das Continuum nicht das nachträgliche Ergebnis unendlich vieler Punktsetzungen, sondern die Gesamtheit aller möglichen Punktsetzungen: es ist allenfalls analysierbar, nie aber summierbar, denn es liegt seinen Punkten vorauf (phys 231): ἀδύνατον ἐξ ἀδιαίρετων εἶναι τι συνεχές. Was aber die übrigen sogenannten Antinomien der Mengenlehre anlangt, so ist bereits von Schoenflies in den Jahresberichten der Deutschen Mathematiker Vereinigung 1906 gezeigt worden, daß sie allesamt mit einem in sich widersprüchlichen Begriff operieren, nämlich dem einer Menge, die sich selbst als Element enthält, so daß wir sie mitsamt ihrer verschleierte Unendlichkeitsproblematik ganz auf sich beruhen lassen können . . .

Auch ist mit den von Kant formulierten Antinomien des Unendlichen bezüglich des Raumes und der Zeit nicht viel anzufangen, da ihre begriffliche Struktur unsauber ist. Zuerst soll bewiesen werden, die Welt habe einen Anfang in der Zeit (KdrV² 453 ff.): hätte sie den nämlich nicht, dann wäre bis zu jedem Zeitpunkt eine Ewigkeit abgelaufen. Nun sei aber Unendlichkeit sukzessiv nicht vollendbar, also sei ein Anfang der Welt notwendige Bedingung ihres Daseins. Dieser Schluß ist erstens überhaupt nicht einsichtig, zweitens sind Ewigkeit und unendliche Reihe ganz verschiedene Dinge und drittens ist leere Zeit eine willkürliche Fiktion. Welt muß ja nicht notwendig

einen Anfang in der Zeit haben, sie könnte ihn ja auch mit der Zeit haben! Auf dieser reinen Fiktion einer Leerzeit beruht aber auch der Beweis des Gegenteils, durch den die Antinomie erzeugt wird: „man setze: die Welt habe einen Anfang. Da der Anfang ein Dasein ist, wovor eine Zeit vorhergeht, darin das Ding nicht ist, so muß eine Zeit vorhergegangen sein, darin die Welt nicht war, das heißt eine leere Zeit. Nun ist aber in einer leeren Zeit kein Entstehen irgendeines Dinges möglich. Also kann zwar in der Welt manche Reihe der Dinge anfangen, die Welt selber kann keinen Anfang haben“ — doch könnte immerhin Zeit zugleich mit¹¹ Welt begonnen haben! Überall da wo von Antinomien geredet wird, scheint zunächst einmal unsauber gedacht worden zu sein. Doch müßte man der Gerechtigkeit halber hinzufügen, daß Kant seine Antinomien künstlich zurecht konstruiert hat, um etwas plausibel zu machen, was ihm schon von vornherein festgestanden hatte: nämlich daß Raum und Zeit gar keine letztinstanzlichen Erklärungsprinzipien darstellen; er will Welt nicht naturwissenschaftlich erklären, sondern aus einem geistschöpferischen Grunde; weshalb ihn trotz der Unendlichkeitsbegeisterung der Aufklärung, die noch im Worte vom „gestirnten Himmel“ zum Ausdruck kommt, die quantitative Unendlichkeit des Kosmos weit weniger faszinierte als die „wahre Unendlichkeit“ des mundus intelligibilis. Die Antinomien sollen lediglich die transzendente Ästhetik begründen helfen: der Raum ist nichts Reales wie etwa bei Newton oder noch in der eigenen vorkritischen Periode, wo es von ihm heißt, er sei der unendliche Umfang der göttlichen Gegenwart¹². Und damit wären wir noch einmal bei dem Unterschied zwischen quantitativer und geistiger Unendlichkeit angelangt, das heißt dem Unterschied zwischen der sogenannten „schlechten“, prinzipiell unabgeschlossenen Unendlichkeit progressiver Art und der wahren Unendlichkeit einfachen, werdelosen Vollendetseins. Bekannt geworden ist der Terminus schlechte Unendlichkeit erst durch Hegel, er findet sich aber schon in der recht ausführlichen Diskussion des gesamten Unendlichkeitsproblems, die Bonaventura geliefert hat in: de mysterio Trinitatis q 4 a 1: „so wird unendlich genannt, was bloß fähig ist beendet zu werden, aber nicht wirklich beendet ist; und so bedeutet es eine Unvollkommenheit. Oder es hebt schlechthin jedes Ende auf: aber das muß zweifach verstanden werden nach der doppelten Bedeutung von Ende als Grenze und Ende als Vollendung; im letzteren Falle malum dicitur infinitum; im ersteren kann nun wieder eine Grenze

¹¹ Philon de opificio 26; zu Kants Antinomien cf. Renouvier in Critique philosophique, supplément 1882/83.

¹² Akad.ausg. I, p. 306. Der Übergang von der göttlichen Intelligibilität des Raumes zu seiner transzendentalen Idealität war keineswegs abrupt, sondern im Zuge der zunehmenden Verbegrifflichung (Entwirklichung) Gottes langsam vorbereitet: cf. Maignan, cursus philosophicus concinnatus ex notissimis cuique principiiis (Toulouse 1653) II, p. 728: locus plus habet de ratione entis moralis quam de ratione entis physici. Das „Moralische“ ist das Gedachte; das mag hier noch seinen Sinn haben — aber anderthalb Jahrhunderte später ist auch Gott nur eine „moralische“ Idee; und der mehr als zweideutige Primat des Moralischen wird damit für diejenigen, die es nötig haben, zum wirksamsten Panzer gegen alles, was die Insichversponnenheit stören könnte.

eine doppelte Bedeutung haben: es gibt nämlich eine Grenze der stofflichen und der geistigen Quantität. Erstere heißt Quantität der Masse, letztere Quantität der Kraft. Unendlich durch Aufhebung der Grenze nach der Quantität der Masse bezeichnet immer eine Unvollkommenheit des Aktseins, weil es ein Abgehen von der Einfachheit bezeichnet: ein solches Unendliches ist nie actu, sondern nur der Möglichkeit nach, in Wirklichkeit also endlich. Das Unendliche jedoch durch Aufhebung der Grenze der Quantität der Kraft bezeichnet nicht irgendeine Unvollkommenheit, sondern das höchste Vollendetsein, da es nicht der Einfachheit widerspricht, ja nur im schlechthin Einfachen sein kann.“ Noch manche andere Einteilung des Unendlichen ist uns aus dem Mittelalter überliefert: *categorematicae* = vollendet geistige Unendlichkeit, *syncategorematicae* = non tot quin plures, also fortschreitend, potentiell, *infinitum in fieri* (Roger Bacon, Petrus Hispanus, Richard of Middleton) — deckt sich ungefähr mit *infinitum simpliciter* und *infinitum secundum quid*: auch endliche, das heißt von Gott verschiedene Gebilde können unendlich sein, dann aber stets nur *secundum quid* = in einer gewissen Hinsicht, zum Beispiel der der abstrakten Progression¹³. Thomas von Aquino scheint sogar die Existenz verschiedener transfiniten Cardinalzahlen zu postulieren, wenn er auch kein legitimes Beispiel anzuführen imstande ist— jedenfalls heißt es *quodlibeta 9 a 1: infinito enim non est aliquid majus in illo ordine quo est infinitum, sed secundum alium ordinem nihil prohibet aliquid esse aliud majus infinito: sicut numeri pares sunt infiniti: et tamen numeri pares et impares simul accepti sunt plures numeris paribus . . .* Heutzutage spricht man ja in Bezug auf diese beiden Mengen (n) und ($2n$) von einer Äquivalenz, das seit einem halben Jahrhundert neu hinzugekommene Problem ist nur das der Setzung unendlicher Gesamtheiten als fertiger Gebilde — als wären sie so etwas wie *simpliciter infinita* im mittelalterlichen Verstande. Das schlechthin einfach Vollkommene ist selbstverständlich, hat man erst einmal bewiesen, daß es überhaupt existiert, in aktueller Unendlichkeit da: es setzt sich ebenso wenig additiv aus disparaten Vollkommenheiten zusammen wie zum Beispiel das Wissen eines Dozenten sich zusammensetzen ließe aus dem seiner Hörer: infolgedessen könnte es auch gar nicht in eine werdende Folge aufgelöst werden wie alles potentiell Unendliche. Die Frage ist jetzt nur, ob es nicht doch in einer gewissen Hinsicht — *secundum quid* — ein nicht-einfaches, aktuelles Unendlich gebe — mit anderen Worten: es handelt sich um die Legitimität des Begriffs einer transfiniten Menge im Cantorschen Sinne. Hinsichtlich des Unendlich-Kleinen war ja die Entscheidung, die Bolzano, Cauchy und Weierstraß herbeigeführt hatten, endgültig negativ ausgefallen: infolge der oben geschilderten Reduktion auf Limesprozesse wurden unendlich kleine Größen völlig entbehrlich. Im Unendlich-Großen blieb die Lage jedoch ungeklärt. Man bezweifelte sogar schon die Existenz der Irrationalzahlen (Kronecker), da doch eine jede von ihnen durch eine Gesamtheit von unendlich vielen rationalen Zahlen definiert werden müßte: nun sei es doch aber nur mög-

¹³ Thomas Aqu. s. th. I qu. 50 a 2 ad 4 nihil prohibet aliquam creaturam esse secundum quid infinitum.

lich, die Intervallschachtelungen immer weiter zu treiben, tatsächlich stoße man eben bei jedem Schritt nur auf eine weitere rationale Zahl! Das Problem liegt hier doch insofern anders als beim Continuumproblem des Zenon, als die unendlich vielen Unterteilungen dort nachträglich ausgeführt wurden und in jedem Falle überflüssig waren, während es sich hier um die Konstitution wichtiger Zahlentypen handelt. Und dann kann man nicht einmal bei der Einführung irrationaler Zahlen stehenbleiben. Selbst wenn man sich die Cartesische Ebene mit einem unendlich feinen Gitter algebraischer Zahlen überdeckt denkt, so daß diese überall dicht liegen, dann läßt sich trotzdem mindestens eine Kurve angeben, nämlich $y = e^x$, die nur durch einen einzigen algebraischen Punkt $(0,1)$ geht — die Gesamtheit der reellen, der transzendenten Punkte ist nicht einmal mehr abzählbar; und die Menge aller reellen Funktionen mit reellem Argument übersteigt dann noch einmal die Mächtigkeit des Continuums. Gibt es nun aber auch diese unendlichen Gesamtheiten, so wie Cantor sie aktual unendlich sein ließ? Ohne daß wir uns dabei unerlaubterweise in den intellectus divinus versetzten oder mit den obigen Aristotelischen Ergebnissen in Konflikt kämen? Vielleicht wird man sagen dürfen, daß es so etwas wie ein aktuales Unendliche als ein antizipiertes Ganzes gibt secundum quid: nämlich als Stufe in einer Skala unter- und übergeordneter Unendlichkeitstypen — soll heißen: die unendlichen Gebilde sind keine Zahlen, mit denen sich in bekannter Weise rechnen ließe, sie stellen gar nichts wirklich Abgeschlossenes dar, sie sind vielmehr Typen, die eine sozusagen ins Unendliche transponierte Progression symbolisieren. Man mache die Reihe der natürlichen Zahlen antizipatorisch zu einem Inbegriff, der sich durch den Ordnungstypus ω vertreten läßt. Dann muß man aber gemäß dem Prinzip von der Permanenz der formalen Gesetze sofort weiterzählen: $\omega + 1$, $\omega + 2$, ... Genau so verhält es sich mit den transfiniten Cardinalzahlen Alef Null bis Alef n . Was sie repräsentieren, ist eigentlich nach wie vor un abgeschlossen; doch ist es durchaus legitim, zum Zweck der Charakterisierung verschiedener Mannigfaltigkeitstypen die Abgeschlossenheit gleichsam zu antizipieren: ohne diese Maßregel gelänge es wohl kaum, die progressive Skala der ω und der Alef aufzustellen, die übrigens ebenso wie die der natürlichen Zahlen kein angebbares Maximum hat ... Als ein sonst völlig übersehenes Kuriosum mag hier erwähnt sein, daß die ersten Versuche, ein aktuales infinitum auszudenken und sogar zu konstruieren, im Ausgang des Mittelalters gemacht wurden: es war da insbesondere Jean Mair, ein Schotte, der an der Sorbonne dozierte und im Jahre 1506 ein *propositum de infinito* veröffentlichte: *propterea si duo specula ponantur contra se, causantur infinita simulachra et hoc naturaliter* ...¹⁴. Die reine Mathematik war dagegen im allgemeinen anders gesinnt: Euler vertrat ganz entschieden die aristotelische Theorie¹⁵, von Gauß besitzen wir einen Brief an Schumacher,

¹⁴ Villoslada in: *Estudios ecclesiasticos* 1936. H. Elie, *le traité de l'infini de Jean Mair*, Paris 1938. Anneliese Maier, *Diskussionen über das aktuell Unendliche in der ersten Hälfte des 14. Jahrhunderts*, *Divus Thomas* 1947.

¹⁵ Euler, *opera postuma* 1862 II, p. 449 ff.

in dem es heißt: „so protestiere ich gegen den Gebrauch einer unendlichen Größe als einer Vollendeten, welcher in der Mathematik niemals erlaubt ist“. Und daß man selbst Cantor¹⁶ anders interpretieren könnte, möchte ich zumindest einer weiteren Untersuchung anempfohlen haben. Doch würde selbst im ungünstigsten Falle das Transfinite der Mengenlehre keineswegs mit dem aktualen Status ewigen Vollendetseins konfundiert werden können, jener qualitativen Unendlichkeit, welche bedeutet, daß unendlich viele positive Qualitäten, gegenseitig sich durchdringend und integrierend, zu einer vollkommenen Einheit zusammengefaltet sind — beispielsweise sei diese *connexio virtutum* (ein ciceronischer Terminus übrigens, cf auch s. Gregorius Magnus PL 76,212. s. Thomas Aqu. s. th. II 2 q 65 a 1, q 73 a 1. 3s. d 36 a 1 et 2) kurz erläutert: Gerechtigkeit ist doch nur da verwirklicht, wo sie sich durch andere Tugenden hat korrigieren lassen: schon die römische Justiz wußte, daß *summum ius summa iniuria*, daß bloßes Recht nicht einmal Recht sei, weil erst die *aequitas* das angerichtete Unheil zu heilen vermag; oder man betrachte das gegenseitige Bedingungsverhältnis von Wahrheit und Schönheit: was nicht wahr ist, kann auch nicht liebenswert sein, da es keine aufbauende Kraft besitzt, kein in sich sinnvolles Leben stiftet. Was nicht wahr ist, vermag allenfalls den Egoismus zu befriedigen: es ist höchstens verführerisch, aber nicht schön¹⁷. Geiz und Objektivität schließen einander aus, denn wer in erster Linie an sich selbst denkt, ist eben grundsätzlich nicht bereit, die Dinge so zu sehen, wie sie sind (*prout sunt*). So falten sich denn alle Tugenden zusammen in der *caritas* als *forma omnium virtutum* (als Nachfolgerin der antiken *δικαιοσύνη*, cf. Theognis ἐν τε δικαιοσύνη συλλήβδην πᾶσ' ἀρετῆ' στίβ.) So einigen sich — wie das eben nur im vollendeten Geiste möglich ist — alle positiven Qualitäten überhaupt im Sein Gottes: und das ist die einzige vollkommen aktuale Unendlichkeit. Demgegenüber kennt selbst die Mathematik nur die unendliche Vielheit, das Außereinander, also doch nur die schlechte Unendlichkeit der Sukzession. In Gott gibt es keine Macht, die nicht gemessen wäre durch Weisheit und Gerechtigkeit (eine Theodizee, die an einem unaufhebbaren Zwiespalt zwischen Allmacht und Allgüte laboriert, ist einfach komisch angesichts eines Gottes, zu dem man sagt *qui omnipotentiam tuam parcendo maxime et miserando manifestas*¹⁸), keine willkürlich blinde Allmacht, weil es im Absoluten sinnvollerweise keine Besonderungen geben kann; also ist wahre Unendlichkeit, das heißt das Fehlén auch innerer Abgrenzungen, nur da, wo es wirkliches Einssein gibt. So daß Weltliches streng genommen nie unendlich genannt werden dürfte: *non ausim vocare infinitum, meinte Cartesius (15 IV 1649), quia percipio Deum esse mundo majorem, non ratione extensionis . . . sed ratione perfectionis: in der Weise inneren Vollendetseins. Prior est Dei infinita perfectio quam nostra imperfectio quoniam nostra imperfectio est defectus et negatio perfectionis Dei; omnis autem defectus et negatio praesupponit eam rem a qua deficit et quam negat (16 IV 1648). Vollendete Unend-*

¹⁶ Gesammelte Abhandlungen, ed. Zermelo 1932, p. 396.

¹⁷ Plotin 2, 9, 17.

¹⁸ Meßformular vom 10. Sonntag nach Pfingsten.

lichkeit ist darum auch kein zufälliges Attribut, so wie sich etwa endliche und unendliche Mengen unter dem indifferenten Oberbegriff Menge klassifizieren lassen: es ist vielmehr ein durch andere Eigenschaften impliziertes Intensitätsphänomen. So wie reiner Geist nicht noch zusätzlich lebendig genannt zu werden braucht, weil das Ineinanderverwobensein seiner möglichen (künstlichen) Aufteilungsergebnisse, das Aufeinander-angewiesensein seiner möglichen Aspekte (τὸ γὰρ ἄνω πᾶν πάντα) bereits von sich aus Ausdruck höchster Lebendigkeit ist (met 1072b 27 ἡ γὰρ νοῦ ἐνέργεια ζωή), so auch das Unendliche non est quasi attributum vel passio entis sive ejus de quo dicitur, sed dicit modum intrinsecum illius entitatis (Duns Scotus ox I d 3 qq 1, 2). Das, was vollkommen eins ist, ist eo ipso unendlich: es bestimmt nämlich sich selber zu dem, was es ist, schon weil es gar keine partikulären Anknüpfungspunkte von außenher aufweist (Proklos, instit. theol. prop. 86 πᾶν γὰρ τὸ αὐθυποστάτως ὃν ἀμερές ἐστι καὶ ἀπλοῦν), während das Endliche gerade sein Wesen darin hat, daß es sich als Ganzes gerade nicht von sich aus bestimmen kann, da es sich ja sonst zu diesem Zwecke immer schon vorfinden müßte¹⁹.

Vier verschiedene Typen von Unendlichkeit würden sich somit aufzählen lassen: die aus dem Rahmen einzelwissenschaftlicher Betrachtungen herausfallende Absolutheit der Vollkommenheit, die fortzeugend lebensstiftende Unerschöpflichkeit geistiger Güter, die antizipierte Abgeschlossenheit transfiniten Mengen und die schlechte, am meisten mit Endlichkeit behaftete Unendlichkeit abstrakter Progressionen. Aber wie schon des öfteren angedeutet: nun, an fünfter Stelle gleichsam, Endliches als bloß-Endliches rein aus sich, das heißt ohne jeglichen Bezug auf Unendlichkeit verstehen zu wollen, dürfte für den Philosophen ebenso unmöglich sein wie die Erkenntnis ungeformter Materie und für den Mathematiker wie das Stehenbleiben bei der Archimedischen Sandzahl. Denn Unendlichkeit ist überall zumindest ein konstituierender Faktor des Endlichen; so sehr, daß man sie oft genug sogar kurzschlüssiger Weise in die Endlichkeit hineinzerterte: als die unendliche Zeit der vorchristlichen Kosmologie beziehungsweise den Fortschritt des deutschen Idealismus oder als den unendlichen Raum des Barock. Für den erkennenden Menschen wird allerdings das Endliche als Endliches stets der Ausgangspunkt sicher fundierten Erkennens sein. Das hat gerade die spiritualistische Tradi-

¹⁹ Reines Sein, vollkommen gegenseitige Integration aller positiven Qualitäten (dignitates), höchste Lebendigkeit und simplicitas sind also mit dem infinitum und deswegen auch untereinander convertierbare termini: cf. Fénelon, Traité de l'existence de Dieu II 5: être une certaine chose précise, c'est n'être que cette chose en particulier. Quand je dis de l'être infini qu'il est l'Être simplement, sans rien ajouter, j'ai tout dit. Sa différence, c'est de n'en avoir point. Le mot d'infini que j'ai ajouté, ne lui donne rien d'effectif; c'est un terme presque superflu que je donne à la coutume et à l'imagination des hommes. Les mots ne doivent être ajoutés que pour ajouter au sens des choses. Ici, qui ajoute au mot diminue le sens, bien loin de l'augmenter: plus on ajoute, plus on diminue; car ce qu'on ajoute ne fait que limiter ce qui était dans sa première simplicité sans restriction. Qui dit l'Être sans restriction emporte l'infini, et il est inutile de dire l'infini quand on n'a ajouté aucune différence au genre universel, pour le restreindre à une espèce ou à un genre inférieur . . . Die Unendlichkeitsproblematik mündet also nicht im Dunkel der Pseudomystik, sondern im reinen Licht: cf. Plotin 5, 8, 4: καὶ πᾶν πᾶν καὶ ἄπερος ἡ αἰγλή.

tion der französischen Metaphysik gut begriffen. Einer ihrer Kernsätze bei einem ihrer bedeutendsten Vertreter (von dem die Denker des 19. Jahrhunderts bis hinunter zu Boutroux und erst recht die modernen von Bergson bis Lavelle beeinflußt sind) lautet ja: *le réel est le commencement de l'idéal*²⁰ — das heißt also: ohne daß die Grenzen zwischen Endlichem und Unendlichem pantheistisch verwischt zu werden brauchten, kann man erkennen, wo jenes auf dieses hinweist. Die gegenseitige Verklammerung von Endlichkeit und Unendlichkeit wird also erst allmählich deutlich werden. Am Ende aber müßte dann die Selbsterkenntnis stehen, daß der erkennende Geist, insofern er in der geschilderten Weise fähig ist, die konstitutive Rolle des Unendlichen zu begreifen, selber in eminenter Weise ein Schnittpunkt von Endlichkeit und Unendlichkeit ist: quantitativ als ein möglicher Spiegel des Universums von Erkenntnisgegenständen, als dessen mikrokosmische Verkürzung sozusagen — und qualitativ als dasjenige Wesen, von dem als einzigem man sagen kann, es sei *capax Dei*.

²⁰ Ravaisson, *essai sur la métaphysique d'Aristote* (1837) I, p. 573. Ein ungewöhnlich fruchtbares Prinzip der klassischen Metaphysik. Portmanns Biologie zum Beispiel arbeitet wieder mit ihm. Wie weit es ins Anthropologische hineinreicht, kann man besonders gut an den Zusammenhängen zwischen leiblicher und geistiger Feinfühligkeit studieren: cf. *Barbado in Xenia thomistica* I, Roma 1925. Daß es gerade in Deutschland während der letzten hundertfünfzig Jahre keinen unverkrampften Spiritualismus in der Philosophie und daher auch nicht die Literaturgattung der *spiritualité* gegeben hat, liegt wohl daran, daß man Geist mit Schwärmerie zu verwechseln pflegte: entweder identifizierte man die Geschichte mit Gott und betrieb dementsprechend den akademischen „Kult“ der Geschichtsphilosophie und Geistesgeschichte oder man blieb einfach in der Jugendbewegung stecken und zehrte von dem religionsstifterischen Pathos der Dichtung: beidemale in Unkenntnis der Tatsache, daß der Geist keineswegs mehr zu erkennen beginnt, wenn man die Rationalität überspringt, um sich dafür „im Unendlichen zu fühlen“ — wie es die Schleiermachersche Religionsphilosophie empfiehlt — oder gar sich dem musikalischen Rausch hinzugeben: „*le délire*“ pries ja schon der Genfer Anticalvinist Rousseau in seinem *Dictionnaire de la musique* (s. v. *génie*), ein Erzschwärmer, der bekanntlich gerade die deutsche Intelligenz seiner Zeit faszinierte und so dem modernen Unwesen des ungebrochen-naiven Selbstgenusses im Natur- und Gemeinschaftsenthusiasmus zum Durchbruch verhalf. Aber zur wahren Unendlichkeit kommt man nicht, indem man vom Verstande aus ein paar Stufen zurücktritt, um dann im Dunkel des Mythischen zu wühlen oder sich mit Hilfe der Musik zu den *universalia antea* führen zu lassen (Schopenhauer, *Welt als Wille und Vorstellung* I § 52), sondern nur indem man innerhalb des Verstandes eine streng intellektuelle Liebeskraft mobil macht, der es dann einmal gelingen mag, die Grenzen sowohl der alltäglichen Rationalität als auch des ichverhafteten, schwärmerischen Fühlens zu sprengen, die Denkkraft sozusagen über sich selbst ins objektiv Unendliche hinauszuhoben (*ascensio mentis*): eine Methode, die allerdings die von allem Schwärmertum verpönte *Aszese* voraussetzt, dafür aber auch die allem Irrationalismus verschlossene Exemplarkausalität des *simplicissimum* entdecken läßt; zu den harmlosen Formen des Unendlichkeitsgefühls cf. Borra, *spiriti e forme affini in Lucrezio e Leopardi* 1934, cap. 6.