

Die Fügung der Welt

Mathematik und Ontologie der Proportionenlehre im platonischen *Timaios*

Stefan GERLACH (Tübingen)

Die Bedeutung Platons für die Mathematik und die von Beginn der Neuzeit an entstehenden mathematischen Naturwissenschaften ist unbestritten. Ebenso unbestritten ist, dass Platon selbst der Mathematik einen hohen Stellenwert in allen Bereichen seines philosophischen Denkens zugemessen hat. Insbesondere hat die mathematische Konzeption seiner im Dialog *Timaios* dargestellten Naturphilosophie herausragende Beachtung gefunden, nicht nur, weil der *Timaios* die einzige über das Mittelalter hinweg kontinuierlich im Abendland überlieferte Schrift Platons war, sondern auch, weil gerade hier der die Naturwissenschaften der Neuzeit leitende Gedanke, die materielle Natur sei in sich selbst nach mathematischen Strukturen verfasst, von Platon umfassend entwickelt worden ist.

Dabei ist über den Grundgedanken hinaus, dass Natur nach mathematischen Strukturen gebildet sei, die Art, wie Mathematika und die Grundelemente der physischen Welt im *Timaios* zusammenkommen, von besonderem Interesse. Dies gilt einerseits für die historischen Wirkungen, die von den im *Timaios* vorgestellten Zusammenhängen zwischen mathematisch Ideellem und sinnlich Wahrnehmbarem in der nachfolgenden Wissenschaftsgeschichte ausgingen. Das eigentlich philosophische Interesse betrifft jedoch die interne Art des Zusammenhangs zwischen der Mathematik und der physikalischen Welt, und ihre Begründung durch Platon. Denn darin entfalten sich die Grundkonzepte der platonischen Philosophie der Natur.

Eine solche „mathematische“ Naturphilosophie muss auf zwei Fragen Antwort geben. Erstens: Gibt es einen strukturellen Zusammenhang zwischen den spezifischen Mathematika, die beim Aufbau der Welt gebraucht werden und der durch sie zustande gebrachten physischen Welt? Und zweitens: Lässt sich ein hierdurch vorgestellter prinzipieller Zusammenhang zwischen Mathematik und Physik aus der platonischen Ontologie begründen?

Im Lichte dieser Fragen soll der Mythos von der Einheitsstiftung des Kosmos durch den Gebrauch der *Mittleren Proportionalen*, wie sie Plato in *Timaios* 31b–34a dargestellt hat, untersucht werden. Hierbei werden zunächst massive interpretatorische Unklarheiten zutage treten. So wird es sich zeigen, dass es schon in der philologischen Frage, von welchem mathematischen Theorem *Timaios* an dieser Stelle eigentlich handelt, in der Platon-Forschung keine einheitliche Antwort gibt. Daher

wird eine Beantwortung dieser Frage selbst aus dem Zusammenhang mit den allgemeinen Fragen unternommen werden müssen.

Hieraus ergibt sich die Aufgabe, zunächst die platonische Argumentation um die Lehre von der Proportionierung des Weltkörpers und die mit ihr verbundenen Übertragungsschwierigkeiten darzustellen, und sodann die sich hierbei zeigenden möglichen mathematischen Kontexte je bezüglich ihres Gehaltes, ihrer mathematikhistorischen Bedeutung und ihrer damit verknüpften mathematisch-ontologischen Dimension vorzustellen und sie hernach an den die Untersuchung leitenden Fragen nach ihrem strukturellen Zusammenhang zur platonischen Physik und ihrem konzeptionellen Zusammenhang zur platonischen Ontologie zu prüfen.

Das Ziel wird sein, zu zeigen, dass eine Deutung der Lehre von den Mittleren Proportionalen auf das antike Problem der Würfelverdoppelung hin nicht nur philologisch möglich und sowohl im mathematikhistorischen Kontext als auch im Zusammenhang des platonischen Gesamtœuvres sinnvoll ist, sondern dass sich durch eine solche Deutung, weit über gängige Platon-Lesarten hinaus, die These der Tübinger Schule um Gaiser bestärken lässt, Platon habe an eine ontologische Vermittlerfunktion der Mathematik durch eine in ihr angelegte viergliedrige Dimensionenfolge vom Punkt zum Körper gedacht.

I. Die Fügung des Weltkörpers durch geometrische Proportionierung

1. Die Darstellung des Timaios

Beginnend in 31b erzählt der literarische Timaios Platons von der Erschaffung des sinnlich wahrnehmbaren Weltkörpers durch eine Verbindung der beiden Elemente Feuer und Erde. Dies ist die erste Stelle, an welcher er in seinem langen Monolog über „den Ursprung des Entstehens und der Welt“¹ (30a) explizit mathematische Verhältnisse gebraucht, um die Zusammenfügung materieller oder immaterieller Weltbausteine durch die Figur eines göttlichen Handwerkers, des Demiurgen, zu erklären. Wohl hatte Platon literarisch bereits im Vorfeld dieser Passage eine gewisse „mathematische Atmosphäre“ entstehen lassen, da eben die Frage nach der numerischen Einheit, Zweiheit oder Vielheit der durch den Demiurgen geschaffenen Welt verhandelt worden war (30c, 31b).² Allerdings waren die Erwägungen, die Timaios zur Annahme nur *einer* Welt geführt hatten, nicht selbst mathematischer, sondern ethischer, ästhetischer und metaphysischer Art gewesen.³ Nun jedoch, da die Entscheidung über die Einsheit der Welt, d. h., ihre Einzigkeit und Einheitlich-

¹ Sofern nicht anders vermerkt, stammen die Zitate aus den platonischen Werken der Übertragung von Schleiermacher/Müller (1994).

² Es gibt Interpreten, die bereits im Beginn des gesamten Dialoges, da Sokrates die Anwesenden durchzählt, eine thematische Exposition der Mathematik des Raumes sehen. Dies mag dahingestellt bleiben. Jedenfalls ist es richtig, dass feinhörige Rezipienten durch diesen Anfang bereits auf den Gegenstandsbereich der Zahlen hingelenkt werden.

³ Das ethische Argument war die Güte des Demiurgen gewesen, der die Welt deswegen als Eine schaffen wollte, weil sie als Eine zugleich die Beste sei (29a, e), das ästhetische, dass sie damit zugleich die schönste sei (29a, 30d), das metaphysische, dass sich dies nur im Hinblick auf die Ideen realisieren lasse (28ab, 29a).

keit getroffen war und sich für Platon die systematische Frage stellte, wie „das Gewordene“ (31b), das heißt: das sinnlich wahrnehmbare Viele sich innerhalb der übergreifenden Einheit des Kosmos denken ließ, beantwortete er diese Frage mit Hilfe eines mathematischen Lehrstückes, dessen Einführung für einen Leser aus der großen historischen Distanz der Neuzeit überraschend ist und dessen Inhalt ihm schwer verständlich sein muss.

Da die Welt „ein Körperliches, ein Sichtbares und Betastbares“ (31b) sei, erläutert Timaios zunächst, müsse sie aus Feuer und Erde bestehen. Dies ist unmittelbar einsehbar, da Feuer Sichtbarkeit und Erde Betastbarkeit verbürgt. Doch Timaios fährt fort: Aus zwei Elementen eine Einheit zu fügen, könne (generell) nicht ohne ein Drittes, Verbindendes geschehen, wobei „seiner Natur nach am besten ein gegenseitiges Verhältnis“ (31c) die Verbindungsglieder zu einer Einheit verbinde, und zwar so, dass das Verhältnis vom ersten Grundelement zum Verbindungsglied dasselbe sei, wie das Verhältnis von diesem zum zweiten Grundelement. Allerdings genüge „ein Vermittelndes“ (32ab) nur für die Verbindung zu „einer keine Tiefe habenden Fläche“ (32b), während für die Verbindung von Körpern *zwei* Mittelglieder benötigt würden. Diese zwei Mittelglieder seien Luft und Wasser, sodass aus der Gleichartigkeit der Verhältnisse: Feuer zu Luft wie Luft zu Wasser wie Wasser zu Erde die angezielte Einheit des Weltgefüges entstehe, das von den Elementen „jedes einzelne ganz in sich aufgenommen habe.“ (32c)

Diese Stelle zeigt nicht nur, dass Platon mit Raffinesse argumentiert, da er die von Empedokles übernommene Ansicht, dass die körperliche Welt aus den vier angeführten Grundelementen aufbaut sei (mit Luft und Wasser zwischen der Erde und dem himmlischen Feuer), als Resultat einer scheinbar notwendigen Dialektik über die grundsätzlichen Wesensmerkmale der Körperlichkeit, Sichtbarkeit und Betastbarkeit der Welt erhält. Sondern sie zeigt auch, dass Plato in der Rede über die Verbindung von Flächen oder Körpern durch ein oder zwei Mittelglieder auf mathematische Theorien referiert, die er offensichtlich bei seinen Lesern als so bekannt voraussetzt, dass sie keiner weiteren Erklärung bedürfen.

Daher stellt sich für uns die Frage: Welches mathematische Theorem (oder Problem) zitiert Timaios mit der seinen Zuhörern offensichtlich bekannten Lehre, dass verschiedenes Flächiges durch das Ins-Verhältnis-Setzen zu einem Mittelglied Eins werden kann und dass für den analogen Vorgang bei Körperlichem zwei Mittelglieder gebraucht werden?⁴

⁴ Indem sich die Auslegung auf die mathematische Seite der Argumentation beschränkt, übergeht sie bewusst deren sonstige Schwierigkeiten, die beispielsweise in der Frage liegen, wie Verbindung grundsätzlich gedacht werden kann. Immerhin wird sich zeigen, dass die Proportionenlehre mit dem ihr zugrunde liegenden mathematischen Logos ein Muster für Verbindungen überhaupt aufweist. Dass dabei Feuer und Erde als Qualitäten nicht direkt in Größenverhältnisse eingehen können, ist klar. Es sei darauf hingewiesen, dass entsprechende Versuche, über die Volumina der nach *Timaios* 53 ff. ihnen zugrunde liegenden regelmäßigen Polyeder oder den Größen von deren Seitenflächen das viergliedrige Proportionsschema zu erfüllen, scheiterten. Vgl. Gaiser (1962), 151, Cornford (1937), 51, und die Größenberechnungen bei Brisson (1996), 248. Allgemein zur Mathematik bei Platon vgl. Stenzel (1924) und Heath (1981).

2. Die Übersetzungsproblematik

Worauf spielt Timaios an? In der Beantwortung dieser Frage herrscht unter den *Timaios*-Interpreten keine Einigkeit. Ursprung dieser Uneinigkeit ist eine sprachliche Mehrdeutigkeit in 31c-32a, auf die zuerst Cornford in seinem *Timaios*-Kommentar hinwies. Die Stelle lautet: *οπόταν γὰρ ἀριθμῶν τριῶν εἴτε ὄγκων εἴτε δυνάμεων ὄντιωνοῦν ἢ τὸ μέσον*. Hier benennt Platon auf mathematischer Seite die Glieder, die in einer Proportion (*ἀναλογία*; 31c) zueinander in Verhältnisse (*λόγοι*) gesetzt werden sollen: *αριθμοί* – *εἴτε ὄγκων εἴτε δυνάμεων* (31c-32a). Dabei ist nach Cornford weder semantisch klar, was die Ausdrücke *ὄγκοι* (Massen) und *δυνάμεις* (Kräfte) – die sich hier auf Körperliches und Flächiges bezögen, jedoch sinnlos in der Beschreibung einer dreigliedrigen geometrischen Proportion seien – genau bedeuten sollen, noch grammatikalisch, ob sie denn als Beispiele der *αριθμοί* (Zahlen) diesen untergeordnet, oder aber als Alternativen zu diesen angeführt würden.⁵ Die hierdurch entstehende kombinatorische Vielfalt an Übersetzungsmöglichkeiten spiegelt sich denn auch in der Vielfalt tatsächlicher Übersetzungsvarianten wider. Cornford selbst übersetzt:

„of three numbers, the middle one between any two that are either solids (cubes?) or squares“⁶,

weist aber auf die grammatisch korrekten Alternativen hin, die von einer Mittleren

„of any three numbers, whether solids or squares“⁷ und

„of any three numbers or solids or squares“⁸

handeln. Die Cornfordschen Übersetzungsvorschläge zeigen, dass die sprachliche Unklarheit nicht nur in der Frage besteht, ob hier neben ‚gewöhnlichen‘ Zahlen noch von Quadratzahlen und Flächenzahlen, oder Quadraten und Rechtecken, oder Flächen überhaupt und entsprechend von Kubikzahlen und Körperzahlen oder Würfeln und Quadern, oder allgemein Körpern geometrischer oder materieller Art die Rede ist; kurz: von Gegenständen der Arithmetik, der Geometrie oder der Physik.⁹ Sondern unklar ist auch, ob sich diese Ausdrücke jeweils nur auf die

⁵ Cornford (1937), 46.

⁶ Ebd., 44.

⁷ Ebd., 44 Anm. Diese Variante kann aus mathematischen Gründen ausgeschlossen werden. Sind die äußeren Glieder quadratische Zahlen (*squares*), so sind es die mittleren gerade nicht.

⁸ Cornford (1937), 44 Anm., weist weiter darauf hin, dass aus der zuletzt genannten Übersetzungsvariante folge, dass dann mit „numbers“ solche gemeint sein müssten, „that are neither squares or solids“, womit er zeigt, dass er auch in dieser Variante „squares“ und „solids“ als Zahlen interpretiert. Nun würde dies jedoch bedeuten, Plato würde hier nur von Zahlenverhältnissen in drei Varianten sprechen, bei deren erster nur Zahlen auftreten würden, die weder quadratisch noch kubisch sind, wohingegen bei der zweiten nur Quadratzahlen usw., was mathematisch überhaupt keinen Sinn ergibt. Sinnvoll wird die letzte Übersetzungsvariante, wenn man „solids“ und „squares“ geometrisch als Körper und Fläche auffasst, wodurch die drei Varianten von den drei Dimensionen Zahl-Fläche-Körper handeln würden. Diese Ungenauigkeiten zeigen, dass auch Cornford, obwohl er sieht, dass hier ein Problem des Übersetzens vorliegt, sich weder über dessen mathematischen Gehalt noch über dessen interpretatorische Folgen letzte Klarheit verschafft hat.

⁹ Unter „Flächenzahlen“ sind solche zu verstehen, die aus einer einfachen Multiplikation zweier ganzer Zahlen > 1 hervorgehen, welche sich dann als die zwei Seiten einer Fläche vom Inhalt der Flächenzahl interpretieren lassen. Körperzahlen sind entsprechend solche, die sich einer Multiplikation dreier ganzer Zahlen > 1 verdanken. Dies wird in Abschnitt II. 4 nähere Erläuterung finden.

äußeren oder alle Glieder des vorgestellten Verhältnisses beziehen. Diese Unklarheit zeigt sich auch an den gängigen deutschen Übersetzungen, die mit der Mittleren

„von irgendwelchen Zahlen, ob von körperhaften oder flächenhaften“ (Rufener); „von drei beliebigen Zahlen, sie seien aus verschiedenen Faktoren entstanden, oder es seien Quadratzahlen“ (Zekl) und

„von irgendwelchen drei Zahlen oder Massen oder Flächen“ (H. Müller) übertragen. Klar ist indes lediglich, dass Timaios hier vorgreift und sachlich falsch bei der Diskussion eines Verhältnisses von Dreien bereits von Körperlichem (welcher Art auch immer) spricht, obwohl dieses gerade bei einem „Festen“ (32b – H. Müller; Zekl: „Räumlichen“; Cornford: „solid in form“), wie er anschließend erläutert, eines viergliedrigen Verhältnisses (welcher Art auch immer) bedarf.

Allerdings lässt sich die sprachlogische Vielheit an Übersetzungsmöglichkeiten auf zwei sachlich sinnvolle Varianten reduzieren, die sich darin unterscheiden, ob sie *ausschließlich von Zahlen* oder *auch von anderem* handeln und die Cornfords eigener Übersetzung und seiner ersten Alternativvariante einerseits und andererseits der geometrischen Deutung seiner zweiten Alternativvariante entsprechen. Von den gängigen deutschen Übersetzungen folgen hierbei Rufener und Zekl der ersten Cornfordschen Alternativvariante, während die alte Übertragung von Hieronymus der zweiten Alternativvariante entspricht.

Nun ist es klar, dass die Entscheidung darüber, ob Timaios hier nur von Zahlen bestimmter Art oder auch von Flächen und Körpern spricht, mithin, ob unter diesen Körpern die dreidimensionalen Gegenstände der Geometrie des Raumes (Stereometrie) zu verstehen seien, oder bereits die sichtbaren und betastbaren Gegenstände des Weltkörpers, um dessen Zusammenfügung es doch geht, weitreichende Konsequenzen für die philosophische Frage nach dem Zusammenhang von Mathematischem und dem „stets [w]erdenden“ (28a) Kosmos im *Timaios* hat. Daher gibt es den zwei Hauptlinien in der Übersetzung entsprechend zwei Hauptlinien in der mathematischen und philosophischen Interpretation dieser Passage. Der auf Zahlen reduzierten Übertragung entspricht die Ansicht, Platon beziehe sich hier auf die algebraischen Sätze 11 und 12 von den Mittleren Proportionalen, die sich im achten (viii.) Buch der *Elemente* Euklids finden.¹⁰ Der Übersetzung hingegen, die allgemein von Körpern und Flächen und nicht von bestimmten Größen handelt, entspricht die Ansicht, das so genannte *Delische Problem* der Würfelverdoppelung oder aber, damit verbunden, das antike mathematische Grundproblem von Rationalität und Irrationalität, sei der Hintergrund, auf den Timaios hier anspiele.¹¹

¹⁰ So z.B. Sachs (1917), 126, Cornford (1937), 46, und Heath (1981), 297. Zu den 13 Büchern der euklidischen *Elemente* ist anzumerken: 1) Dass davon ausgegangen werden kann, dass die in ihnen aufgeführten Mathematika an der platonischen Akademie bekannt waren, auch wenn der jüngere Euklid die *Elemente*, die in der Hauptsache eine Zusammenfassung älterer Mathematika sind, erst nach dem Tod Platons verfasst hat. Und 2), dass die 13 Bücher nicht homogen sind, sondern dass in ihnen eine Kluft besteht zwischen den pythagoreisch-arithmetischen (zu denen das viii. Buch gehört) und den geometrischen Büchern (hierzu: Toeplitz (1965), 46).

¹¹ Hierfür Kutschera (2002), Bd. 3, 52, und Gaiser (1962), 52 ff. und 67 ff.

Da die Euklidischen Sätze und das Delische Problem Anwendungen desselben mathematischen Verfahrens auf verschiedene Bereiche sind, bietet es sich an, zunächst die konkreteren Euklidischen Sätze und mit ihnen das Verfahren der stetigen Proportionierung zu erläutern, um von dort aus die komplexen Probleme, die das Delische Problem für die griechische Mathematik mit sich führte, aufzuzeigen.

II. Euklid viii, 11 und 12

1. Der mathematische Gehalt der reinen Zahlentheoreme

Die im viii. Buch der *Elemente* angeführten Sätze Nr. 11 und 12 besagen, dass es zu zwei Quadratzahlen a und b immer eine so genannte „Mittlere Proportionszahl“ x und zu zwei Kubikzahlen u und v immer zwei Mittlere Proportionszahlen k und l gibt, so dass gilt:¹²

$$(1) a : x = x : b \text{ und}$$

$$(2) u : k = k : l = l : v,$$

wobei a, b, x und u, v, k, l Elemente der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4 \dots\}$ sind.

Die Richtigkeit dieser Sätze lässt sich zeigen, wenn man die Quadratzahlen a und b in der Form c^2 und d^2 schreibt, wobei $a = c \cdot c$ und $b = d \cdot d$, mit $c, d \in \mathbb{N}$, wodurch sich folgende Gleichung ergibt:

$$(1') c^2 : x = x : d^2,$$

die wahr ist, wenn $x = c \cdot d$ ist. Hierbei zeigt sich, dass unter der gegebenen Voraussetzung, dass c und d natürliche Zahlen sind, x ganzzahlig sein muss. Hierdurch lässt sich die Gleichung (1') in folgender Form darstellen:

$$(1'') c^2 : c \cdot d = c \cdot d : d^2.$$

An dieser Proportion lässt sich nun nicht nur unmittelbar ablesen, dass es für zwei Quadratzahlen immer eine ganzzahlige Mittlere Proportionale gibt, sondern auch, dass das Verhältnis, in der diese zu den Quadratzahlen steht, $c : d$ ist. Des Weiteren zeigt sich, dass die drei Glieder dieser Proportion, c^2 , $c \cdot d$ und d^2 , durch den Faktor d/c sich aus ihren jeweiligen Vorgängern erzeugen lassen.

Eine analoge Umformung der Proportion (2) ergibt für die Kubikzahlen $u = f^3$ und $v = g^3$ die Proportion

$$(2') f^3 : k = k : l = l : g^3,$$

¹² Die nachfolgenden Erläuterungen der Euklidischen Sätze bedienen sich moderner mathematischer Sprache. Sätze wie (1) oder (2) nennen sich „Verhältnisleichungen“ oder „Proportionen“. Sie können erstens wie Gleichungen und zweitens in Gleichungen umgeformt werden, weswegen sie für die moderne Algebra, die mit Gleichungssystemen operiert, kaum noch Bedeutung haben. Beides jedoch war der Antike fremd. Die Richtigkeit dieser Sätze zunächst in der Gegenwartssprache zu zeigen, um ihre Bedeutung erst dann für die antike mathematische Denkweise zu zeigen, scheint jedoch unter dem hermeneutischen Gesichtspunkt sukzessiver Annäherung sinnvoll.

die für die ganzzahligen Mittleren Proportionalen $k = f^2g$ und $l = fg^2$ wahr ist. Hieraus ergibt sich die Proportion

$$(2'') f^3:f^2g = f^2g:fg^2 = fg^2:g^3,$$

deren Wahrheit für beliebige $f, g \in \mathbb{N}$ sich zeigt, wenn man die Proportion als Gleichung mit Brüchen interpretiert, die sich alle nach den Regeln der Bruchrechnung zu f/g kürzen lassen, wonach sich $f/g = f/g$ ergibt. $f:g$ ist also das Verhältnis, das den Verhältnissen, in die die Glieder der Proportion eingehen, zugrunde liegt und für alle Verhältnisse der Proportion gleich ist.

2. Die Bedeutung der Proportionslehre in der antiken Mathematik

Aus moderner Sicht mag eine Proportion wie (2'') trivial erscheinen, da die in ihr ausgedrückte mathematische Erkenntnis nicht über die Kürzungsregeln der Bruchrechnung hinausreicht. Bedenkt man jedoch, dass der Zahlenraum der Griechen sich auf die natürlichen Zahlen beschränkte, ihnen die Null, negative Zahlen und Brüche nicht als Elemente, mit denen sich mathematisch operieren ließ, bekannt waren, zudem die mathematischen Operationen, die sie mit ganzen Zahlen durchführten, gerade die Technik einfachen Multiplizierens erreicht hatten, während die Division oder das Wurzelziehen ihnen fremd waren, dann zeigen sich die angegebenen Proportionen als echte Erkenntnisse über die Beziehungen besonderer Elemente der arithmetischen Basis untereinander.¹³

Hinzu kommt, dass der modernen Mathematik das Operieren mit Proportionen fremd geworden ist, da sich Proportionen einfacher in Gleichungssystemen darstellen lassen. Der wesentliche Unterschied zwischen einer Gleichung und einer Proportion ist, dass bei der Gleichung Zahlen (oder sonstige Größen) gleichgesetzt werden, bei der Proportion jedoch Verhältnisse ($\lambda\acute{o}\gamma\omicron\iota$) von Zahlen (oder sonstigen Größen). Solche Verhältnisse wiederum waren in der Antike so bedeutend gerade deswegen, weil Brüche, Dezimalzahlen und normierte Maße unbekannt waren.¹⁴ Proportionen waren die einzige Form, in der sich überhaupt Größenverhältnisse ausdrücken ließen. Da Euklid viii. (und gemäß dieser Interpretation Platon in *Timaios* 31b) ausschließlich vom Bereich der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, usw.¹⁵ handelt, bedurfte es der Proportion, um auch nur eine Beziehung wie die eines Eineinhalbfachen zu einem anderen auszudrücken. Nicht das Quantum, die einzelne Zahl,

¹³ Vgl. Toeplitz (1965), 48.

¹⁴ Um es an einem Beispiel zu erläutern: Die Aussage, ein Stab x sei 1,5 Meter lang, ist eine uns heute sofort verständliche Aussage über dessen Länge. Es bedarf gewissermaßen keiner weiteren Erklärung. Diese Verständlichkeit basiert darauf, dass wir die (der Antike unbekannten) Ausdrücke „Meter“ und „1,5“ verstehen. Um sie zu erläutern, müssten wir erklären, dass der Stab eineinhalb mal so lang sei, wie ein anderer Stab y (z. B. der normierte Ur-Meter in Paris), der „Meter“ genannt wird und dass dieses „eineinhalb“ bedeutet, dass ein Vergleich der beiden Stäbe zeigen würde, dass eine beiden Stäben gemeinsame Länge, das ihnen gemeinsame Maß, nämlich die Hälfte des Pariser Stabes, in diesen zweimal, in unseren aber dreimal passe; kurz; dass unser Stab sich zum „Meter“ genannten Stab so verhalte wie 3 zu 2. Die Proportion $x:y = 3:2$ weist sich so als Hintergrund und Äquivalent der Gleichung $x = 1,5$ Meter lang aus.

¹⁵ Und hierin liegt die größte Zumutung für das moderne Bewusstsein: sich in Probleme einer historischen Algebra einzudenken, bei welcher es zwischen der 1 und der 2 keine weiteren Zahlen gibt.

sondern das Verhältnis zweier Zahlen wurde so zur elementaren operativen Einheit der griechischen Mathematik, zum „griechischen Substrat des modernen Zahlbegriffs“¹⁶. Dieses ideelle Substrat, das Verhältnis (λόγος) ist es, dessen Gleichheit die Proportion (ἀναλογία) aufzeigt.

In Proportionen konnten nun nicht nur Zahlenverhältnisse, sondern verschiedene Verhältnisse, wie die von Volumina, Strecken, Flächen und Zeiten gesetzt und mit anderen Verhältnissen verglichen werden. Das mathematische Erkenntnisziel war es hierbei, herauszufinden, welche Verhältnisse einander gleich waren. Diese Gleichheit zweier Verhältnisse, die wiederum nicht von gleicher Art sein mussten, wurde durch die Proportion in der Grundform $a:b = c:d$ ausgedrückt. Dass eine Strecke a doppelt so lange wie eine Strecke b war, ließ sich durch die Proportion $a:b = 2:1$ darstellen; durch sie wurde also die Gleichheit zweier zueinander heterogener Verhältnisse (von Zahlen und Strecken) aufgezeigt. Zahlen gingen so als Elemente in Verhältnisse ein, die mit anderen Verhältnissen in Proportionen verglichen werden konnten.

Von der Grundform der Proportion, $a:b = c:d$, her wird einsichtig, weshalb die (geometrische) Proportion (1) $a:x = x:b$ von besonderer Bedeutung war: da in ihr ein Glied in beiden Verhältnissen auftritt (die so genannte „Mittlere Proportionale“), ist sie nicht nur allgemeines, aber leeres Schema, sondern sie zeigt eine besondere Beziehung ihrer Glieder untereinander auf, wie die, dass es zu quadratischen äußeren ganzzahlige mittlere gibt. Die Proportion war also das wichtigste und nahezu ausschließliche Operationsschema der griechischen Mathematik. Ihre so genannte „geometrische“ Form mit Mittlerer Proportionale galt als ihre perfekte Gestalt.¹⁷

3. Der Gedanke der Einheit der Proportion

Allerdings ist hierdurch noch wenig Licht in die Frage gebracht, weshalb Platon meint, durch eine Ordnung der Elemente nach den angegebenen mathematischen Verhältnissen lasse sich deren Vielheit zur Einheit des Kosmos formen. Kaum dürfte klarer geworden sein, weshalb durch die Proportionierung von Quadrat- oder Kubikzahlen diese mitsamt den proportionierenden Gliedern zu einer Einheit geworden sein sollen, viel weniger also, wie dies mit Elementarbausteinen des Körperlichen geschehen soll. Welcher Gedanke leitete Platon, abgesehen von ihrer überragenden Bedeutung innerhalb der griechischen Mathematik, für den Bau des Weltalls auf diese „zahlentheoretischen“ Sätze zurückzugreifen?

Mit dem Gedanken der Vereinheitlichung mehrerer Glieder scheint zunächst die Umformulierbarkeit von Proportionen gemeint zu sein. Aus (1) $a:x = x:b$ folgt (Vertauschung): $x:b = a:x$ und ebenso (Umkehrung): $b:x = x:a$ und (neuerliche Vertauschung): $x:a = b:x$. Es ist leicht zu sehen, dass hierbei jedes Glied jede Position der Proportion einnehmen kann. Der Platonische Text in der Müller-Übersetzung, der besagt, dass daraus, dass von den Gliedern der Proportion „die mittlere zur ersten und letzten wird und die letzte und erste beide zu mittleren“ (32a), not-

¹⁶ Toeplitz (1965), 51.

¹⁷ Cornford (1937), 45, nennt sie „the proportion *par excellence* and primary“.

wendig folge, „dass alle dieselben seien“ (ebd.) und schließlich, „dass alle eins sein werden“ (ebd.), legt dies nahe.¹⁸ Allerdings ist dies irreführend. Aus der Vertauschbarkeit der Glieder folgt natürlich nicht deren Gleichheit untereinander, sondern durch ihren Eingang in gleiche Verhältnisse innerhalb einer vorgegebenen Form gehen die Glieder als Teile in das Gesamte einer Einheit ein. Indem die Proportion (1) zwei Verhältnisse, $a:x$ und $x:b$, von verschiedener „Oberflächenstruktur“ gleichsetzt, zeigt sie dadurch deren Gleichsein und damit, dass diese Verhältnisse in ihrem „Wesen“ dieselben sind.¹⁹ Diese Art der Einheitsstiftung durch die Proportion war für die Antike eine der vier Grundarten von Einheit überhaupt. Und zwar war sie explizit gerade die Art, wie Einheit *innerhalb der Mathematik* gedacht werden konnte.²⁰

4. Die pythagoreische Vorstellung geometrischer Eigenschaften von Zahlen

Nachdem sich so die Einheit stiftende Funktion der geometrischen Proportion gezeigt hat, bleibt zu klären, weshalb diese gemäß *Timaios* in ihrer viergliedrigen Form insbesondere die Einheit des Raumes stiften soll.

Die euklidischen Sätze (1) und (2) handeln von Zahlen, wenngleich von solchen des Quadrates und des Kubus. Wiewohl durch die Ausdrücke der „Quadrat-“ und „Kubikzahl“ in der deutschen Gegenwartssprache etwas von diesem Gedanken erhalten geblieben ist, mutet doch die Ansicht, die Zahlen selbst hätten geometrische Eigenschaften und die Eigenschaften von Zahlverhältnissen gäben geometrische Verhältnisse wieder, heute fremd an. Der Akademie war dies jedoch eine gängige Vorstellung. Plato nennt Quadratzahlen „viereckige und gleichseitige“²¹ und Produkte aus zwei verschiedenen natürlichen Zahlen „längliche Zahlen“²². Ebenso nennt Euklid Zahlen, die aus der Multiplikation dreier ganzer Zahlen entstehen, „Körperzahlen“ und deren Teiler „Seiten“ oder „Kanten“.²³

Historischer Hintergrund der Vorstellung geometrischer Eigenschaften von Zahlen ist die pythagoreische Mathematik *und Ontologie*, die, wie Aristoteles berichtet, „die Prinzipien der Mathematik für die Prinzipien alles Seienden“²⁴ hielt, und daher zu dem Schluss gelangte, es seien „die Elemente der Zahlen [...] Elemente alles Seienden.“²⁵ Also erhielten Zahlen „geometrische Eigenschaften“ durch die Prämisse, dass der Geometrie wie überhaupt der körperlichen Welt zahlenmäßige Verhältnisse zugrunde liegen. Unter solcher Prämisse entsprechen den Verhältnissen der

¹⁸ Auch Cornford (1937), 45, scheint dies so zu sehen, wenn er aus der Vertauschbarkeit der Glieder schließt: „Thus [...] the unity they constitute is as perfect as possible.“

¹⁹ Vgl. Fritz (1969), 301.

²⁰ Aristoteles, *Metaphysik* Δ 1016b: „Ferner ist einiges der Zahl nach Eines, anderes der Art, anderes der Gattung, anderes der Analogie nach. [...] der Analogie nach [nämlich das], was sich ebenso verhält wie ein anderes zu einem anderen.“

²¹ *Theaitetos* 147e.

²² Ebd., 148a.

²³ Euklid, *Elemente*, vii, Def. 17: „Wenn drei Zahlen bei gegenseitiger Vervielfältigung eine Zahl bilden, ist die entstehende eine körperliche Zahl und die einander vervielfältigenden Zahlen sind ihre Seiten.“

²⁴ Aristoteles, *Metaphysik* A 985b.

²⁵ Ebd., A 986a.

Zwei- und Dreidimensionalität von Fläche und Raum solche Zahlen, die aus zwei bzw. drei Faktoren zusammengesetzt sind, da sich diese Faktoren als Seiten und Kanten von Flächen und Körpern deuten lassen, deren Inhalt dann eben die Fläche oder das Volumen ist, das die längliche oder körperliche Zahl angibt.²⁶ Dabei liegt es nahe, dass unter den Flächen- und Körperzahlen unter dem Gesichtspunkt der Einheit diejenigen eine besondere Stellung erlangten, deren Teiler sich gleich sind: Quadrat- und Kubikzahlen.

Nun zeigt sich: einer Position, der Zahlen Prinzipien ($\alpha\rho\chi\eta$) des Seins und Körperzahlen Grundbausteine des Raumes sind, liegt es nahe, Körperzahlen als Prinzipien des Körperlichen zu sehen und daher algebraische Verhältnisse zwischen solchen Zahlen als allgemeine Strukturen von Körpern, auch materieller Art, zu deuten. In solcher Sicht wird die Heranziehung der viergliedrigen geometrischen Proportion zur Erläuterung des Aufbaus des Weltkörpers nicht nur zur äußeren Analogie, weil hier wie dort vier Elemente zu einer Einheit gebracht werden sollen, sondern die geometrische Proportion mit zwei Kubikzahlen als äußeren und zwei Körperzahlen als inneren Gliedern ist so zugleich die Struktur, in der sich Räumliches überhaupt aus den pythagoreischen Urelementen, den natürlichen Zahlen, entfalten kann. Beziehungen zwischen räumlichen Zahlen zeigen sich auf diese Weise als Strukturen der körperlichen Welt selbst. Für die Pythagoreer war die Mathematik die fundamentale Wirklichkeitswissenschaft.²⁷ Die algebraische Bedingung, dass die stetige Proportionierung nicht für alle Körperzahlen, sondern nur für Kubikzahlen als äußere Glieder durchführbar ist, entspricht dabei der zuvor schon angeführten metaphysisch-ästhetischen Forderung nach Ein(s)heit. Denn die Kubikzahl (und ihr entsprechend der Würfel im Vergleich zu Quadern) zeichnet sich unter allen Körperzahlen dadurch aus, dass ihre Kanten untereinander dieselben sind.

III. Das Delische Problem der Würfelverdoppelung und die Mathematik der Inkommensurablen

1. Die Stellung von Arithmetik und Geometrie im platonischen System der Wissenschaften

Über die reine Zahlenlehre der euklidischen Sätze hinaus treffen in der Lehre, dass Festes sich durch zwei Mittelglieder verbinde, mehrere grundsätzliche Probleme antiker Mathematik zusammen. Das viii. Buch der *Elemente* Euklids ist pythagoreisch. Die *Geometrie* hatte sich zur Zeit Platons aber bereits von einer Mathematik, die ihre ausschließliche Basis in der Arithmetik ganzer Zahlen sah, fortentwickelt. Hinzu kommt, dass die *Stereometrie*, d. h. die Geometrie des Raumes und der Körper eine eben aufblühende Disziplin zur Zeit der Niederschrift des *Timaios* war und dass die Förderung dieser Disziplin Platons ureigenstem Anliegen entsprach. So bemän-

²⁶ Darin liegt, dass in einer Flächenzahl wie 6 Form (nämlich der Seitenlängen 2 und 3) und Inhalt (eben $6 = 2 \cdot 3$) der geometrischen Figur, eben des Rechtecks, gegeben ist.

²⁷ Vgl. Kutschera (2002), Bd. 3, 52.

gelt der platonische Sokrates im siebten Buch der *Politeia*, dass die Wissenschaften der Astronomie und ebenen Geometrie wohl gepflegt würden, es aber mit der Untersuchung „der Ausdehnung des Würfels [!] und mit allem, was Tiefe hat“ noch „lächerlich“ stehe.²⁸ Es sei aber falsch, von der Fläche sogleich zu den bewegten Körpern überzugehen, ohne sie „zuvor an und für sich betrachtet zu haben“.²⁹ Also sei die Ausarbeitung der Stereometrie als eines notwendigen Mittelgliedes zwischen Planimetrie und Astronomie gefordert. Sokrates plaziert sie in der Systematik der mathematischen Wissenschaften an die dritte Stelle nach der Arithmetik und ebenen Geometrie und vor die Astronomie. Die Untersuchung der Geometrie von Körpern ist also im Kontext des *Timaios* nicht irgendeine von verschiedenen möglichen mathematischen Disziplinen, sondern hat einen Ort systematischer Notwendigkeit als Begründungsdisziplin in einer Rede über die „Natur des Weltalls“ (27a). Hingegen müsste sich, aus der Sicht der systematischen Forderung der *Politeia*, eine Gestaltung des Kosmos nach den algebraischen Sätzen aus Euklid viii. die Kritik gefallen lassen, die geometrischen Disziplinen, die zwischen Zahl und Körper stehen, im Ganzen übersprungen zu haben.

Es ist bekannt, dass die Entdeckung und Erforschung der fünf regelmäßigen Polyeder durch Theaetet³⁰, mitsamt dessen Beweis, dass es nur genau diese fünf geben könne, als ein erster Höhepunkt dieser jungen Disziplin von Platon im *Timaios* in den Aufbau der körperlichen Welt eingeflochten wurde (53c ff.), indem er vier der Polyeder den atomar gedachten Elementen als ihre geometrische Form zuordnete. Und dieser Zusammenhang ist einzusehen, ist doch die Zuordnung der Polyeder zu den Elementen eine Zuordnung der elementaren Körperformen zu den elementaren Körpern. Der systematischen Bedeutung der Elemente für die Physik der sinnlichen Welt entspricht hier die Bedeutung der regelmäßigen Körper für die Mathematik des Raumes. Wenngleich ein direkter mathematischer Zusammenhang zwischen der Proportionslehre und den regelmäßigen Körpern nicht hergestellt werden kann, ist doch deren stereometrische Gestaltung gemäß der Forderung der *Politeia* ein Indiz dafür, dass auch die Proportionierung der Elemente zum Ganzen des Kosmos als allgemeines Theorem zur Stereometrie gedacht sein könnte.

2. Das Delische Problem der Würfelverdoppelung

Die Anwendung der Lehre von den zwei Mittleren Proportionalen auf das so genannte *Delische Problem* der Volumenverdoppelung eines Würfels stellt gerade diesen Zusammenhang her.³¹ Das Problem, zu einem gegebenen Würfel einen zwei-

²⁸ *Politeia*, vii, 528d. Fowler (1987), 118, ist der Ansicht, dass sich Platon in der *Politeia*-Stelle speziell auf das Delische Problem der Würfelverdoppelung beziehe, da dieses ungelöst geblieben sei, während andere stereometrische Probleme, wie die Konstruktion der regelmäßigen Körper, bereits gelöst gewesen seien.

²⁹ *Politeia*, vii, 528ab; Platon äußert hier nicht weniger, als dass die Erforschung der geometrischen Struktur von Körpern deren *An-und-für-sich-Betrachtung* sei!

³⁰ Dass dieser Beweis durch Theaetet geführt wurde und nicht Platon selbst der Entdecker der gleichwohl nach ihm benannten „Platonischen Körper“ war, gilt seit Sachs (1917) als gesichert.

³¹ Das Delische Problem hat seinen Namen wohl daher, dass es zuerst auftrat, als man auf Delos einen kubusförmigen Altar durch einen neuen, doppelt so großen, d. h. doppelt so voluminösen ersetzen wollte.

ten zu konstruieren, dessen Volumen von doppelter Größe ist, gehörte mit dem Problem der Quadratur des Kreises und der Dreiteilung eines beliebigen Winkels zu den drei klassischen Problemen der Antike, die unter den Voraussetzungen der Euklidischen Geometrie nicht gelöst werden konnten.³² Jedoch genossen diese Probleme hohen Rang und waren Gegenstand intensivster Lösungsbemühungen. Es kann davon ausgegangen werden, dass die mathematisch gebildete Zuhörerschaft des Timaios nicht nur um diese Probleme, sondern auch um die aktuellen Versuche, sie zu lösen, wusste.

Die Lösungsversuche des Delischen Problems waren zahllos.³³ Allein, im Vergleich zu allen rein geometrisch-konstruktiven Versuchen ragte die Entdeckung der Hippokrates von Chios heraus, dass das Problem der Volumenvergrößerung von Würfeln *äquivalent* ist mit dem Problem des Auffindens der zwei Mittleren Proportionalen zu zwei gegebenen Größen.³⁴ Hippokrates entdeckte damit nicht weniger als die Zurückführbarkeit dieses Problems der Geometrie des Raumes auf einen bekannten algebraischen Satz. Nun hatte sich in der geometrischen Interpretation der Euklidischen Sätze gezeigt, dass die Mittelglieder als Produkte von Kanten und Seiten der äußeren Würfel angesehen werden können. Nach Hippokrates gilt dies nun nicht nur für Würfel mit ganzzahligen Kantenlängen (und nur als solche lassen sich die Kubikzahlen im pythagoreischen Zahlenraum der natürlichen Zahlen ja interpretieren), sondern auch für solche mit beliebigen Kantenlängen.

Dies lässt sich aus dem Satz

$$(2'') f^3 : f^2 g = f^2 g : fg^2 = fg^2 : g^3$$

mittelbar entnehmen. Wenn f und g als die Seiten der Würfel („-zahlen“) f^3 und g^3 angesehen werden können, dann tritt bei der Frage nach der Volumenverdoppelung die Seitenlänge des gesuchten Würfels als zweites Glied der Proportion unmittelbar auf. Denn Volumenverdoppelung bedeutet, dass das Verhältnis der äußeren Glieder $f^3 : g^3 = 1:2$ ist. Aus $f^3 = 1$ folgt $f = 1$; und daher folgt, wenn $g^3 = 2$ gesetzt wird, aus (2''):

$$(2''') 1:g = g:g^2 = g^2:2,$$

wobei sich zeigt, dass das gesuchte Verhältnis der Kanten der beiden Würfel $1:g$ genau das Verhältnis ist, das dieser Proportion zugrunde liegt. Allerdings stellte das gesuchte Verhältnis $1:g$ ein doppeltes Problem dar: es war einerseits kein rationales *Zahlenverhältnis* und dadurch mit den Mitteln der pythagoreischen Algebra nicht bestimmbar. Und es war andererseits als *Größenverhältnis* mit den Mitteln der Euklidischen Geometrie nicht konstruierbar.

Diese beiden Probleme standen in engem Zusammenhang; ihre Bedeutung für

³² Diese Voraussetzungen sind die prinzipielle Konstruierbarkeit durch Zirkel und Lineal, wodurch sich ein Aufbau der gesamten Euklidischen Geometrie aus Kreisbogen und Gerade ergibt. Hilbert hat Ende des 19. Jahrhunderts nachgewiesen, dass diese drei klassischen Probleme mit den Mitteln Zirkel und Lineal grundsätzlich nicht lösbar sind.

³³ Heath (1981), 246–270, führt alleine 13 antike ‚Lösungen‘ vor, die sich natürlich alle als unhaltbar erwiesen haben.

³⁴ Hierzu ebd., 200.

die antike Mathematik lässt sich aufzeigen, wenn man die Problemgeschichte der irrationalen Zahlen (und Zahlverhältnisse) von Pythagoras zu Platon verfolgt.

3. Exkurs: Die Geschichte der Irrationalität

Die Pythagoreische Ontologie, die in der These gipfelte, „die Zahlen seien die Dinge selbst“³⁵, fußte auf einer Mathematik, deren Fundament natürliche Zahlen und deren Erkenntnisziel die Einsicht in die Gleichheit (*analogia*) von Verhältnissen (*logoi*) ganzer Zahlen war, sowohl in der Arithmetik, als auch in der Geometrie. Die Erkenntnis der Verhältnismäßigkeit von Größen war dabei methodisch gleichbedeutend mit der Erkenntnis eines ihnen gemeinsamen Maßes. Gab es zu zwei geometrischen Größen eine dritte Größe, von der die beiden ganzzahlige Vielfache waren, hatten die Größen ein gemeinsames Maß; sie wurden dann „kommensurabel“ genannt und ihr Verhältnis zueinander ließ sich durch Verhältnisse natürlicher Zahlen ausdrücken.³⁶

Es war wohl zuerst die erstaunliche Entdeckung des Hippasos von Metapont um 450 v. Chr., dass es im regelmäßigen Fünfeck kein gemeinsames Maß für Seite und Diagonale gibt, dass also in dieser einfachen Figur Größenverhältnisse auftreten, die nicht zueinander kommensurabel sind.³⁷ Diese Tatsache zerstörte jede Hoffnung, alle geometrischen, astronomischen (und musikalischen) Verhältnisse in ganzen Zahlen ausdrücken zu können.³⁸ Die Krise, in die die griechische Mathematik durch die Entdeckung der Inkommensurabilität geführt wurde, bezog sich nicht alleine auf das durch sie in Frage gestellte mathematisch-ontologische Programm der Rückführung aller Dinge auf Verhältnisse ganzer Zahlen, sondern Inkommensurabilität bedeutete, dass geometrische Größen auftraten, die nicht mehr in Verhältnisse (*logoi*) gebracht und damit nach den bis dahin gängigen Verfahren überhaupt nicht mehr mathematisch begriffen werden konnten. Das Verhältnis von zwei Größen wie Seite und Diagonale im Pentagramm (oder Quadrat) wurde daher zunächst mit dem Ausdruck *ἄλογος*, d. h. *nicht-Verhältnis* bedacht.

³⁵ Aristoteles, *Metaphysik*, 987a.

³⁶ Zwei beliebige Strecken *a* und *b* sind genau dann kommensurabel, wenn es zu ihnen eine dritte Strecke *c* gibt, von der *a* und *b* jeweils ganzzahlige Vielfache sind. Diese Strecke *c* als ihr gemeinsames Maß konnte stets über die Methode der Wechselwegnahme herausgefunden werden. Dabei wurde von zwei Größen die kleinere von der größeren abgezogen und dies mit dem Resultat und der kleineren so lange weitergeführt, bis zwei gleiche Größen übrig blieben, die das gemeinsame Maß der ursprünglichen waren. Von diesem musste dann nur noch errechnet werden, wie oft es zu den Ursprungsgrößen vervielfältigt werden musste. (Beispiel: Wie verhalten sich 15 und 25 zueinander? $25 - 15 = 10$; $15 - 10 = 5$; $10 - 5 =$ [ebenfalls] 5, also ist 5 das gemeinsame Maß; da die 5 3-mal zur 15 und 5-mal zur 25 vervielfältigt werden muss, folgt: $15:25 = 3:5$). Dieses Verfahren wurde in gleicher Weise in der Geometrie durch Abtragung von Strecken angewandt. Bei Zahlenverhältnissen stand dabei von vornherein fest, dass sie kommensurabel waren, ist den natürlichen Zahlen doch allen die 1 gemeinsam. Das Problem der Inkommensurabilität konnte also auf der Basis der natürlichen Zahlen gar nicht auftreten – ihr Auftreten stellte jedoch umgekehrt diese Basis als einzig mögliche der Mathematik in Frage.

³⁷ Siehe hierzu und zum Folgenden Fritz (1969). Hippasos hatte den Beweis geführt, indem er gezeigt hatte, dass die Anwendung der Methode der Wechselwegnahme zwischen diesen Größen in einen unendlichen Regress führt, da die Ursprungsverhältnisse nach dem zweiten Wegnahmeschritt wiederkehren.

³⁸ Vgl. Becker (1965), XVII.

Die Gewinnung von Verfahren, durch welche man mit inkommensurablen Größen wie Diagonale und Seite im Quadrat dennoch mathematisch operieren konnte, d.i. die Ausdehnung der Proportionenlehre auf inkommensurable Größen, bestimmte den Fortgang der griechischen Mathematik, bedeutete zugleich aber eine Abkehr vom pythagoreischen Programm, alle Dinge auf Verhältnisse ganzer Zahlen zurückzuführen. Platon führt im *Theaitetos* eine dieser Möglichkeiten vor. Basierend auf der Erkenntnis, dass zu jedem Quadrat sich ein zweites mit doppeltem Flächeninhalt über der Diagonale des ersten konstruieren lässt³⁹, nennt er die Seiten von Quadraten, deren Flächeninhalt keine Quadratzahl ist,

Wurzeln, weil nämlich sie selbst als Längen nicht durch gleiches Maß mit jenen [den Seiten von Quadraten mit einer quadratischen Zahl als Flächeninhalt] können gemessen werden, wohl aber die Flächen, welche aus ihnen zu entspringen vermögen.⁴⁰

Mit anderen Worten: die Quadratwurzeln aus 2, 3, 5, 6 usw. können nicht „durch gleiches Maß“ an den „Längen“, d.i. Quadratwurzeln von 1, 4, 9 usw., also an den natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ... gemessen werden. Die Quadratwurzeln sind zu den natürlichen Zahlen inkommensurabel. Sie sind geometrische Größen und keine Zahlen, aber es gibt ein gemeinsames Maß für die Flächen der über ihnen bildbaren Quadrate und diese Flächen wiederum lassen sich als Zahlen interpretieren und sind mit den natürlichen Zahlen kommensurabel. Darüber hinaus lassen sich innerhalb des Bereiches der Quadratwurzeln Verhältnisse mit gemeinsamem Maß entdecken, die dadurch zu Verhältnissen natürlicher Zahlen in Proportion gesetzt werden können. $\sqrt{2}$ verhält sich zu $\sqrt{8}$ wie 1:2. Als nur quadriert zu natürlichen Zahlen kommensurable Größen erhalten Quadratwurzeln zwar noch nicht den Status an Rationalität wie natürliche Zahlen, da sie erst durch einen Zwischenschritt zu diesen in der Vernunft zugänglichen Verhältnissen gesetzt werden können; sie haben sich durch dieses Verfahren jedoch weit entfernt vom ursprünglich an ihnen aufgetretenen Problem gänzlicher Irrationalität.⁴¹

Hinzu kommt, dass sich die Quadratwurzeln aller natürlicher Zahlen als geometrische Größen konstruieren lassen und dass diese grundsätzliche geometrische Konstruierbarkeit bekannt war. Damit war in gewisser Weise über die geometrische Konstruktion und den Beweis ihrer Inkommensurabilität (z.B. von Seite und Diagonale im Quadrat) die Existenz irrationaler Größen wie $\sqrt{2}$ verbürgt und dadurch, dass sie quadriert, d.h. geometrisch als Flächen, arithmetisch als natürliche Zahlen untereinander und zu sonstigen bekannten Größen kommensurabel wurden, konnten sie als erweiternde operable Elemente in die nachpythagoreische antike Mathematik aufgenommen werden.

³⁹ Platon gebraucht dieses Beispiel im *Menon*, 82c – 85b.

⁴⁰ Platon, *Theaitetos*, 148ab.

⁴¹ Man beachte, dass z.B. der berühmte Pythagoreische Lehrsatz zu den Quadraten über den Seiten rechtwinkliger Dreiecke $a^2 + b^2 = c^2$ für fast alle rechtwinkligen Dreiecke ein rationales Verhältnis ($(a^2 + b^2) : c^2 = 1 : 1$) über nur quadriert kommensurable Größen, nämlich die Seiten a , b , c solcher Dreiecke, ist. Das Kuriose ist, dass Pythagoras selbst die Feststellung inkommensurabler Größen nicht akzeptiert hat.

4. Die systematische Bedeutung des Delischen Problems als Grundproblem der Stereometrie

Vor diesem Hintergrund lässt sich die volle Dimension, die das Delische Problem für die Mathematik zu Platons Zeit haben musste, einsehen. Das Problem, zu einem gegebenen Würfel einen solchen mit doppeltem Volumen zu konstruieren, ist die Übertragung der im *Menon* vorgeführten konstruktiven Aufgabe der Flächenverdoppelung des Quadrates auf Verhältnisse des Raumes. So wie das Quadrat eine besondere Figur der ebenen Geometrie ist, da es durch Dehnung der (eindimensionalen) Linie um ihre eigene Größe entsteht (weswegen sich die arithmetische Größe der Fläche durch Multiplikation der als Zahl gedachten Größe der (Seiten-) Linie mit sich selbst errechnen lässt), hat der Würfel eine herausragende Stellung innerhalb der Geometrie des Raumes, da er aus dem Quadrat durch entsprechende Dehnung entsteht und sein Volumen (analog zum Volumen des Quadrates) sich durch doppelte Multiplikation der als Zahlen interpretierten Größen der Seiten mit sich selbst errechnen lässt. Da in ihm sowohl Seiten als auch Kanten rechtwinklig aufeinander stehen, ist im Würfel der Raum exemplarisch aufgespannt. Die Aufgabe, zu einem gegebenen ganzzahligen Inhalt die Größe der begrenzenden Seite bzw. Kante zu finden, führte für Quadrate zu eben jener Problematik nur flächenhaft (quadriert) kommensurabler Größen; die analoge Aufgabe bei Würfeln ist *das Delische Problem*.

Die Parallelität der Aufgabenstellung von Quadrat- und Würfelverdoppelung legte die Vermutung nahe, dass die gesuchte Kantengröße des gedehnten Würfels inkommensurabel zur Kantengröße des gegebenen Würfels sein würde, und dass diese Größen nicht quadriert, sondern nur kubisch, d. i. durch doppelte Multiplikation mit sich selbst kommensurabel sein würden, an der gesuchten Größe also gleichsam ein erhöhter Grad an Irrationalität auftreten würde – alleine all dies ließ sich nicht aufzeigen, solange es nicht gelang, diese Größe geometrisch zu konstruieren. Da diese Konstruktion jedoch fehlschlug, blieb diese Größe eine Unbekannte, die sich nicht nur allen geometrischen und algebraischen Operationen entzog, sondern deren Existenz selbst zweifelhaft blieb und die dadurch das gesamte Programm der systematischen Ausarbeitung einer Geometrie des Raumes zu untergraben drohte.⁴²

Auf diese Weise stellt sich das Problem der Würfelverdoppelung als Kernproblem einer antiken Geometrie des Raumes dar, als deren systematische Stelle in der *Politeia* eben der Ort ausgewiesen wurde, an dem Platon im *Timaios* die Proportionallehre einführt. Als Wissenschaft vom Raum gibt die Stereometrie das Modell der inneren Struktur räumlicher Dinge, genauso wie in der mythischen Erzählung des *Timaios* die Materie erschaffen, d. i. in ihr Wesen gebracht wird dadurch, dass ihr als

⁴² Dass Platon in der Inkommensurabilität der Größen von Länge, Fläche und Raum ein wesentliches Problem sah, zeigt *Nomoi*, vii, 819d-820c: Dort wird den Menschen eine so „lächerliche und schimpfliche Unwissenheit“ in Bezug auf „Messungen, die sich auf Länge, Breite und Dicke beziehen“, bescheinigt, wie sie weniger Menschen, „sondern einer Herde von Schweinen“ zukomme, da sie nicht zu unterscheiden vermögen, „wie seiner Natur nach das gegeneinander Messbare und Unmessbare [...] beschaffen ist“.

ihre innere Struktur die Verhältnismäßigkeit der viergliedrigen geometrischen Proportion zugeführt wird.

In diesem Zusammenhang erhält die Erkenntnis des Hippokrates, dass das Problem der Würfelverdoppelung äquivalent ist zum Problem, zu zwei gegebenen Größen die Mittleren Proportionalen zu finden, zentrale Bedeutung. Denn indem sich die Verhältnisse $a:b$ dieser Proportion als die gesuchten Verhältnisse der Kanten von Würfeln zeigen, deren Volumina als äußere Glieder in diese Proportion eingehen, erweist sich die viergliedrige geometrische Proportion als ein algebraisches Schema, in welchem die gesuchten irrationalen und geometrisch nicht darstellbaren Verhältnisse zu einem *allgemeinen* Verhältnis schematisiert werden.

Daher lässt sich diese Proportion als rationales Modell eines *ἄλογος*, eines weder arithmetisch erfassbaren noch geometrisch konstruierbaren, und damit rational überhaupt nicht zugänglichen Verhältnisses deuten, und damit als die einzige rationale Struktur überhaupt, die das An-und-für-sich der Materie gemäß der Forderung der *Politeia* beschreibt. Hinzu kommt, dass die Anwendung des arithmetischen Satzes Euklid viii., 12 auf räumliche Größen überhaupt den im ersten Teil dargelegten mathematisch-physikalischen Strukturzusammenhang jener Sätze transportiert und um die Dimension räumlicher Inkommensurabilität erweitert. Durch eine Deutung von *Timaios* 31b ff. als Lösungsschema für das Delische Problem verbindet sich also die mathematikhistorische und platonisch-wissenschaftssystematische Stellung der Proportionenlehre präzise mit ihrem literarischen Ort im *Timaios*.

Doch damit ist die ganze Weite der Dimension, die sich durch eine Deutung der Proportionenlehre im *Timaios* als das Lösungsschema des Delischen Problems eröffnet, noch nicht erschöpft. Sie lässt sich erst errahnen, wenn die Frage nach dem allgemeinen Verhältnis von Mathematik und Körperwelt im Lichte der platonischen Ideenlehre gestellt ist.

IV. Die Lehre von den Mittleren Proportionalen im Lichte der Ideenlehre

Die im *Timaios* entfaltete Kosmologie steht von Anfang an unter den Prämissen der von Platon zur Zeit seiner Niederschrift bereits voll entwickelten und in den so genannten *mittleren Dialogen* dargestellten Ideenlehre. Literarisch manifestiert Platon ausdrücklich das Bestehen dieser Prämissen durch den Hinweis des *Timaios* zu Beginn seines langen Monologes,

zuerst [...] zu unterscheiden: was ist das Seiende, das Entstehen nicht an sich hat, und was das stets Werdende, aber niemals Seiende; [und dann zu sehen, dass] das eine, stets gemäß demselben Seiende [...] durch Vernunft mit Denken zu erfassen, das andere dagegen durch Vorstellung vermittelt vernunftloser Sinneswahrnehmung vorstellbar [ist]. (27d-28a, Herv. S. G.)

Timaios ruft bei seinen Zuhörern also zuerst die ontologische und epistemologische Grundunterscheidung zwischen dem der Vernunft zugänglichen Seienden und dem nur vernunftlos vorstellbaren Werdenden wach. Anschließend gibt er gleichsam eine komprimierte Zusammenfassung der Kernthesen der Ideenlehre, indem er fortfährt, die Welt sei „nach dem durch Vernunft [...] zu Erfassenden [...] aufbaut“

(29ab), nach einem „Vorbilde“ (29a), von dem „diese Welt [...] ein Abbild sei“ (29b). Da der Kosmos als Gegenstand der Untersuchung aber ein sicht- und betastbarer ist, muss Timaios sich von Anfang an über die methodische Frage Rechenschaft geben, wie von diesem, der nicht vernunftgleich ist, überhaupt Wissenschaft möglich sein könne. Die Antwort ist bekannt: Nur eine „wahrscheinliche Rede“ (29d) könne über Gegenstände wie die sichtbare Welt geführt werden, die der Vernunft nicht unmittelbar zugänglich seien, da die Rede dem „verwandt“ (29b) sein müsse, von dem sie handle.

Diese wahrscheinliche Rede ist der bildhafte Mythos vom welterschaffenden Handwerker. Dessen gestaltende Grundhandlung ist, ein gegebenes Sichtbares, das er „in ungehöriger und ordnungsloser Bewegung vorfand, [...] aus der Unordnung zur Ordnung“ (30a) zu bringen. Dies soll geschehen dadurch, dass er, „der Ordner“ (30c) seinen „Blick auf das Unvergängliche“ (29a) richtet, welchem „in jeder Beziehung Vollkommenen möglichst ähnlich zu machen“ (30d) er die Welt beabsichtigt. Diese Grundstruktur der Ordnungsstiftung konkretisiert sich bezüglich der ersten Formung des Makrokosmos zu einem Einen eben durch die Proportionierung der vier Elemente. Dabei ist dasjenige, das die der Vernunft nicht zugängliche Unordnung einer chaotischen Bewegung des Werdenden zu einem der „Vernunft Teilhaftigen“ (30b) fügt, die geometrische Proportionierung.⁴³ Hierdurch erweist sich die Mathematik als vermittelndes Zwischenglied zwischen den Bereichen der Ideen und des Werdens. Sie ist es, die Vernunftloses und dadurch der Vernunft gänzlich Verschllossenes zu etwas strukturiert, das qua bildhafter Ähnlichkeit zum Bereich der Ideen, der bildhaften Rede und damit irgendeiner Form des Erkennens überhaupt zugänglich wird.

Dieser Status der Mathematik hat in der Rezeptionsgeschichte des *Timaos* unter dem Stichwort „Mathematisierung der Natur“⁴⁴ stets besondere Würdigung erfahren. Der Gedanke einer in die Natur gefügten „sinngewaltigen Kraft der Mathematik“⁴⁵ hat entscheidend zum Entstehen der neuzeitlichen Naturwissenschaft um die Schlüsselgestalt Galilei beigetragen, welcher methodisch die Mathematik die Erklärungsmuster zur Beschreibung experimentell gewonnener Naturphänomene an die Hand gab.⁴⁶ Der Platonische Grundgedanke hierbei ist, dass mathematische Gesetze deshalb in der Natur gelten, „weil diese [Gesetze] ihr Wesen sind, weil die Mathematik das Wesen der Natur zum Ausdruck bringt“⁴⁷. Noch die Neuerer der Quantenphysik im 20. Jahrhundert wie C. F. von Weizsäcker oder W. Heisenberg würdigten

⁴³ Dies ist verkürzt dargestellt. Die Ordnung nach Mustern mathematischer Vernünftigkeit im *Timaos* geschieht in mehreren Durchgängen, von denen die Proportionierung nach der Geometrisierung der Atome und der Arithmetisierung der Weltseele wohl systematisch die letzte ist. Da sich diese drei Durchgänge als Aspekte eines Strukturzusammenhangs auffassen lassen, der ein ‚Früher‘ und ‚Später‘ nur literarisch kennt, scheint eine Fokussierung des Blicks ausschließlich auf die Proportionenlehre von 31b ff. zulässig. Jedenfalls treten durch diese Auslegung keine Widersprüche zu den andern Stellen auf. Zum Verhältnis der Mathematika von Weltkörper und Atomen siehe Anmerkung 4; zum selben Verhältnis bezüglich der später eingeführten Weltseele siehe unten, Abs. IV. 2.

⁴⁴ Gaiser (1962), 325.

⁴⁵ Gloy (2000), 319.

⁴⁶ Friedländer (1954), Bd. 1, 285.

⁴⁷ Vgl. Weizsäcker (1971), 134.

die platonisch-pythagoreische Ansicht, dass „ein ideelles Formprinzip als Urgrund alles Seienden“ angesehen wurde, als den „Grundgedanken, [...] der später das Fundament aller exakten Naturwissenschaften gebildet hat“⁴⁸.

Also stellt sich hinsichtlich der Ideenlehre nun nochmals die Frage, ob und wie sich die Mathematika in *Timaios* 31 ff. als Strukturen eines durch sie geformten Kosmos denken lassen, oder ob eine Auslegung dieser Stelle unter Hinweis auf den Wahrscheinlichkeitscharakter der platonischen Rede ihre Grenze bei den mathematisch-physikalischen Strukturgleichheiten und beim bloßen Faktum des Gebrauchs von Mathematika finden muss.

Dieser Frage wird erneut mittels eines Vergleichs zwischen der pythagoreischen Interpretation der Proportionenlehre gemäß dem achten Buch Euklids und ihrer Deutung als Lösungsschema für das Problem der Würfelverdoppelung nach Hippokrates von Chios nachgegangen. Es wird sich dabei zeigen, dass auch hinsichtlich der Ideenlehre eine Interpretation von 31b ff. in Richtung auf das Delische Problem die Proportionenlehre im *Timaios* um eine ganze Dimension erweitert – um die Dimension der mündlichen Lehre Platons.

1. Nach Euklid viii.

Die Interpretation mit Blick auf die zahlentheoretischen Sätze vermutlich pythagoreischer Herkunft, die im achten Buch der Euklidischen *Elemente* festgehalten sind, hatte mehrere Besonderheiten herausgestellt, die für eine Interpretation dieser Sätze als Wesensbestimmungen von Natur bedeutsam sind. Mit ihnen lässt sich feststellen, dass die Einfügung der viergliedrigen Proportion in das Unbestimmte der gestaltlosen Materie zum Einen des Kosmos, über alle durch die Vierzahl gegebene äußere Analogie hinaus, das Gesamte der Materie nur deshalb erfolgreich mathematisieren kann, weil der Kosmos mit eben dieser Proportion aus den Prinzipien einer auf der pythagoreischen Zahlenbasis gegründeten Mathematik erbaut wird: In der viergliedrigen Proportion sind mit den Zahlen (*arithmoi*) als Gliedern und den Verhältnissen (*logoi*) als der Proportion zugrunde liegenden Gleichheiten die ontologischen und operativen Grundbausteine pythagoreischer Algebra gegeben – mit der Zahl die letzten Seinsgrößen, mit den Verhältnissen die letzten Operationsgrößen. Und diese realisieren durch ihren Eingang in das basale methodische Erkenntnischema der Proportion das mathematische Ziel der Einheitsstiftung. Darüber hinaus ist mit den Körperzahlen, die durch die Sätze von den zwei Mittleren Proportionalen schematisiert werden, der spezifische Zusammenhang zwischen den räumlich-geometrischen Eigenschaften natürlicher Zahlen und der Geometrie des durch sie aufgespannten Raumes aus pythagoreischer Sichtweise gegeben. Wo Zahlen als Prinzipien des Seins angesehen werden, werden Körperzahlen zu den Prinzipien des Raumes. Entsprechend verdankt sich die Einheitlichkeit des physikalischen Raumes so der Einheit gleicher Verhältnisse räumlicher Zahlen in der Proportion.

Allerdings führt die Vorstellung einer Einfügung reiner Zahlverhältnisse zur Ver-

⁴⁸ Heisenberg (1987), 96.

einheitlichung des Vierfachen der Elemente im Einen des entstehenden Weltkörpers zu Konsequenzen, die wohl den pythagoreischen Aspekten der Platonischen Ontologie, nicht aber dieser im Ganzen entsprechen.

Es gilt als wahrscheinlich, dass Platon *im Bereich der Ideen* an eine Zuordnung von Ideen und natürlichen Zahlen gedacht hat, und an eine zahlenmäßige Hierarchisierung der Ideen, in welcher der in der *Politeia* ausgesprochenen Reduzierbarkeit aller Ideen auf die eine des Guten die Deduzierbarkeit aller Zahlen aus der Eins entsprechen sollte.⁴⁹ Sofern es richtig ist, Platon Pythagoreismus zu bescheinigen, dann gilt dies sicherlich für eine zahlenmäßige Ordnung des intelligiblen Bereichs der Ideen. Darüber hinaus erfährt die Weltseele, die Platon in *Timaios* 35b ff. in einer Mittelstellung zwischen Körperwelt und Ideenwelt konzipiert, eine mathematische Strukturierung durch Verhältnisse ganzer Zahlen, die ihre Basis in den kleinsten Zahlenreihen hat, die die Proportion (2) aus Euklid viii., 12 erfüllen. Allerdings würde die einfache Gleichsetzung der Mathematika, die in Weltseele und -körper eingehen, als ungebrochene Übertragung pythagoreischer Mathematik auf den Bereich der sinnlich zugänglichen Materie⁵⁰ die platonische Ontologie verkürzen, da sie die fundamentalen Einsichten hinsichtlich einer epistemologischen und ontologischen Dunkelheit der sinnlichen Welt ausblenden würde, die Platon im *Timaios* dargestellt hat und die erst in der Anwendung des proportionalen Schemas einer Geometrie irrationaler Größen auf die Materie ihre mathematische Entsprechung findet.⁵¹

2. Als Darstellungsschema des Delischen Problems – in den Dimensionen der mündlichen Lehre Platons

Eine Deutung der Textstelle *Timaios* 31b ff. vor dem Hintergrund des Delischen Problems und der mit ihm verbundenen Problematik der Inkommensurabilität lässt einen strukturellen Zusammenhang zwischen dem Lehrstück von den Mittleren Proportionalen und einem mathematisch-ontologischen Grundschema der platonischen Ideen- und Prinzipienlehre aufleuchten, der weit über den platonischen Pythagoreismus hinausgeht.

Dass Platon Grundtheoreme seiner Ideenlehre (die so genannte „Prinzipienlehre“) für nicht im Medium der Schriftlichkeit darstellbar hielt und sie daher nur mündlich an der Akademie weitergab, ist die Grundthese der Tübinger Schule der Platon-Forschung.⁵² Die wichtigste Quelle für diese mündliche Lehre ist sein Schüler Aristote-

⁴⁹ Vgl. hierzu Gaiser (1962), 124.

⁵⁰ Eben diesen Pythagoreismus bestätigen Platon auch hinsichtlich der Proportionenlehre diejenigen, die sie auf die Euklidischen Sätze hindeuten, z.B. Taylor (1928), 96, und Cornford (1937), 46.

⁵¹ Zur These der Dunkelheit: Das Werden der Weltordnung ist ein „Gemischtes aus einer Vereinigung der Notwendigkeit [dem Vernunft Widerstrebenden] und der Vernunft“ (47e-48a). Diese Notwendigkeit ist „ein unsichtbares, gestaltloses [...] Wesen, auf irgendeine höchst unzugängliche Weise am Denkbaren teilnehmend und äußerst schwierig zu erfassen.“ (51ab)

⁵² H. J. Krämer und K. Gaiser haben dabei versucht, über die vorhandenen Berichte über Platons mündliche Lehre diese systematisch zu rekonstruieren; T. Szlezák hat dies weitergeführt. Die Thesen der Tübinger Schule sind bis heute umstritten. Hier soll nicht für deren Richtigkeit geworben, sondern vielmehr gezeigt

les. Ihm zufolge hatte die Mathematik innerhalb der platonischen Ontologie den Status einer Mittelstellung zwischen dem Sinnlichen und den Ideen.⁵³ In dieser Mittelstellung hatte sie zugleich eine *vermittelnde* Funktion zwischen den Ideen und dem Sinnlichen; das schwierige Problem der Teilhabe des sinnlich-vielen Werdenden an den einfachen Ideen als ihren Ursachen und Formen sollte sich über das Verbindungsglied der Mathematik denken lassen. Diese Mittlerfunktion konnte die Mathematik nach Ansicht K. Gaisers deshalb erfüllen, weil in ihr selbst das Schema des Übergangs vom Einen (der Idee) zum Vielen der (sinnlich wahrnehmbaren) Körper angelegt ist:

Mit der ontologischen Mittelstellung des *Mathematischen* ist also [...] bezeichnet, dass die Abstufung und Gliederung im Seinszusammenhang analog zu den mathematischen Strukturgesetzen begriffen werden soll.⁵⁴

Im vi. und vii. Buch der *Politeia*, in denen die Mittelstellung der Mathematik in ihrer epistemologischen Funktion als Aufstieg vom sinnlich Wahrnehmbaren zum theoretischen Wissen gezeigt wurde, blieb offen, *wie* dieser Aufstieg sich vollziehen solle und *wie* die mathematische Mittelstellung sich begründe. Dies vermag das mathematische Strukturmodell einer viergliedrigen Folge der Dimensionen Punkt – Linie – Fläche – Körper zu leisten, die einem Aristotelischen Bericht zum *Timaos* zu entnehmen ist.⁵⁵ Nimmt man den Punkt als die höchste *Einheit* der Ideen⁵⁶ und den Körper als die Unbestimmtheit der physischen Welt, des in den Raum entfalteten Vielen⁵⁷, so zeigt das Dimensionenmodell *erstens*: wie eine Deduktion des sinnlich Vielen aus dem noetisch Einen und *zweitens* das Verhältnis von ideeller Form und materiellem Inhalt im Lichte der Ideenlehre gedacht werden kann. So wie die Linie gedehnter Punkt ist, ist die Fläche gedehnte Linie und der Körper gedehnte Fläche. Zugleich ist die Fläche des Körpers Begrenzung, so wie die Linie die Fläche und der Punkt die Linie begrenzt. In der Dehnung ist gedacht, wie sich aus dem unteilbaren uniform Einen des Punktes das teilbare Viele von Linie, Fläche, Körper erzeugen lässt, in der Begrenzung, wie die je höhere Dimensionenstufe formgebend zur je untergeordneten ist. Ontologisch ist die Idee das Formgebende der Materie⁵⁸ und diese Formgebung lässt sich im Modell der Formgebung, d. i.: Begrenzung von

werden, wie fruchtbar sich diese mit der gegebenen Problemstellung verbinden lassen. Ich beziehe mich hierbei weitgehend auf die Darstellung, die Platons mündliche Lehre in Gaiser (1962) gefunden hat.

⁵³ Aristoteles, *Metaphysik*, 987b: „Ferner erklärte er [= Platon], dass außer dem Sinnlichen und den Ideen die mathematischen Dinge existierten, als dazwischen liegend.“ Dies findet auf epistemologischer Seite seine Bestätigung bei Platon, *Politeia* vi, 511d: „Verstand aber scheinst du mir die Fertigkeit der Messkünstler [...] zu nennen, als etwas zwischen der bloßen Vorstellung und der Vernunftkenntnis Liegendes.“

⁵⁴ Gaiser (1962), 25.

⁵⁵ Aristoteles, *De anima* 404b: Platon habe bestimmt, dass das Lebewesen (= die Seele) „selbst aus der Idee des Einen sowie aus der ersten Länge, Breite und Tiefe bestehe, und die anderen Dinge auf entsprechende Weise.“

⁵⁶ Vgl. Euklid, *Elemente*, i., Def. 1: „Ein Punkt ist was keine Teile hat“.

⁵⁷ Ob diese Unbestimmtheit mit der *chora* im *Timaos* auf der einen und auf der anderen Seite mit dem Prinzip des unbestimmt Groß-Kleinen, von welchem Aristoteles neben der Idee der Einheit als zweitem platonischen Prinzip berichtet, gleichzusetzen ist, mag hier dahingestellt bleiben.

⁵⁸ Baltes (1999), 275, weist darauf hin, dass Idee (ἰδέα) und Form (μορφή) bei Platon bisweilen synonym gebraucht werden.

Körpern durch Flächen ebenso denken wie die Seinsstiftung der Welt im Hinblick auf die Ideen durch das mathematische Vermittlungsschema dimensionaler Übergänge von Punkt zu Körper, da Ordnung Einheitsstiftung in der Vielheit ist und zugleich Einheit die Unbestimmtheit und Vielheit begrenzt.⁵⁹ So wenig die Idee durch die Formgebung der Materie ihren ontologischen Status verliert, so wenig ist eine Linie flächig oder eine Fläche körperlich, wiewohl sie als begrenzende Formen Flächen erst zu Flächen und Körper zu Körpern machen.⁶⁰ Daher ist die mathematische Dimensionenfolge, indem sie ihre eigene Funktion darstellt, zugleich strukturelles Schema der platonischen Ontologie und Teil von ihr. Als Mittelglied und strukturelles Schema zugleich für den Übergang vom Sein zum Werden, vom Einen zum Vielen, von den Erkenntnisstufen des höchsten Wissens zur sinnlichen Wahrnehmung ist sie *nicht* (wie die pythagoreische Ontologie der Mathematik) ausschließlich dem Bereich des Ideellen und noetisch Einsichtigen zugeordnet, sondern *in ihr* findet sich gemäß der Abfolge der Dimensionen eine Abstufung an Rationalitätsgraden von den höchsten noetisch erfassbaren Einheiten punktartiger Ideen zu den an den Körpern auftretenden Verhältnissen gesteigerter Irrationalität. Der mathematisch-ontologischen Dimensionenfolge Punkt-Linie-Fläche-Körper entsprechen die arithmetischen Grundverhältnisse *punktartiger* Einheit (1:1), *linearer* Kommensurabilität (2:3), nur *quadratisch* kommensurabler Größen (1: $\sqrt{2}$) und zuletzt den Körpern das hypothetische und geometrisch für die griechische Mathematik gar nicht darstellbare Verhältnis der Kanten von Würfeln, die zueinander doppeltes Volumen haben.⁶¹ Dieses Verhältnis, für das wir heute den Ausdruck $1:\sqrt[3]{2}$ gebrauchen würden, ließ sich für Platon alleine durch das irrationale Verhältnis $1:a$ im Schema der Mittleren Proportionalen ($1:a = a:b = b:2$) darstellen. Das Ungeheuer der Lehre von den Mittleren Proportionalen als Lösungsschema des Delischen Problems ist eben, dass hier in der Analogie, dem Medium der Rationalität selbst, zugleich die höchste Irrationalität darstellbar wird.

Diese Proportion formt also diejenige unter den mathematischen Größen, die von höchster Unbestimmtheit ist, zu einem der Vernunft zugänglichen Schema. Dabei ist der Vernunft an der Proportion einsichtig das Gleichsein der irrationalen Verhältnisse, also die Identität und damit das Einsein von etwas, das ihr an ihm selbst unzugänglich ist. Eben dies jedoch entspricht der Tätigkeit des Demiurgen, der die sich in ungehöriger Unordnung befindliche höchste Unbestimmtheit der gestaltlosen Materie durch die Proportion, in der sich diese Struktur spiegelt, zur Einheit des Kosmos formt. Insofern die physikalische Welt des *Timaios* prinzipiell konzipiert ist als wechselseitige Durchdringung der Vernunft der Ideenwelt und der vernunftlosen, schicksalhaften Notwendigkeit der Materie, erscheint die Proportionslehre als Lösungsschema des Delischen Problems – und das ist die vernünftige Struktur eines der Vernunft Widerstrebenden – als adäquates Theorem der Verbindung von

⁵⁹ Vgl. Krämer (1996), 261.

⁶⁰ In *Timaios* 53b heißt dies: „die Tiefe [hat] das Wesen der Fläche um sich“; womit wohl gemeint ist: Die Tiefe hat die Fläche als ihr Wesen um sich.

⁶¹ Dieses Schema absteigender Rationalitätsgrade ist Gaiser (1962), 25, entnommen, der allerdings dem Zusammenhang zwischen Proportionslehre und Delischem Problem keine Beachtung schenkt.

Mathematika und gänzlich Unbestimmtem auf der untersten Rationalitätsstufe der Dimensionenfolge. Die Mathematik kann das Unbestimmte des Kosmos nur deshalb bestimmen, weil in ihr selbst sich Unbestimmtes findet.

Hiermit kann in Einklang gebracht werden, dass die Weltseele, die Plato anschließend als eine zweite Vermittlungsinstanz zwischen Sein und Werden einführt und die gemäß *Timaios* 34b den Kosmos als sein Früheres durchdringt, selbst nach rationalen Zahlenverhältnissen geformt ist. Die ihr zugeordneten geometrischen Reihen 1, 2, 4, 8 und 1, 3, 9, 27 sind die kleinsten Zahlenreihen, die die viergliedrige, ‚räumliche‘ geometrische Proportion nach Euklid viii., 12 erfüllen. Diese Proportion Euklids hat als *allgemeines* Schema solcher Zahlenreihen einen geringeren Bestimmtheitsgrad als die konkreten Zahlenfolgen und zugleich höheren Bestimmtheitsgrad als die geometrischen Größen, die sie in ihrer Anwendung auf den Raum schematisiert. In sich ist dabei die Anwendung der geometrischen Proportion hier auf ganzzahlige Verhältnisse, dort auf Inkommensurable eben die gleichartige Formung kategorial verschiedener Inhalte innerhalb der Mathematik, die die Anwendung dieses mathematischen Schemas auf das zu ihr Ungeordnete der Materie leisten soll. So lässt sich durch eine Interpretation der geometrischen Proportion als Theorem reiner Zahlverhältnisse hinsichtlich der Weltseele und als Schema für irrationale Größen hinsichtlich der Formung des von der Seele durchdrungenen und von ihr vorstrukturierten Weltkörpers das allgemeine Schema bestätigen, nach welchem in den internen Strukturen der Mathematik die Vermittlungsstrukturen sich spiegeln, die die Mathematik befähigt, die Vermittlung zwischen Sein und Werden zu leisten.

Platon hat so durch die Lehre von den Mittleren Proportionalen im *Timaios* die entscheidende Lücke eines ontologisch-epistemischen Wissenschaftsprogramms geschlossen, in welchem die Mathematik als Mittlerin zwischen einer unbestimmten und an-sich vernunftlosen Sinnenwelt und den bestimmten und erkennbaren Ideen fungiert – wodurch überhaupt erst der Kosmos Strukturen erhält, die sich als unserer erkennenden Vernunft zugänglich erweisen.

LITERATURVERZEICHNIS

1. Textausgaben

- Platon (1969), *Sämtliche Werke*, hg. von Olof Gigon, übers. von Rudolf Rufener, Stuttgart, Zürich.
 – (1992), *Timaios*, Griechisch/Deutsch, herausgegeben, übersetzt und mit Anmerkungen versehen von Hans Günter Zekl, Hamburg.
 – (1994), *Sämtliche Werke*, hg. von Ursula Wolf, übers. von Friedrich Schleiermacher und Hieronymus Müller, Reinbek.

2. Weitere Literatur

- Aristoteles (1995), *Philosophische Schriften in 6 Bänden*. Nach der Übersetzung von Hermann Bonitz bearbeitet von Horst Seidl, Hamburg.
 Baltes, M. (1999), „Ἐγὼ γενέσθην.“ (Platon, Tim. 28B7). Ist die Welt real entstanden oder nicht?, in: Ders., *ΔΙΑΝΟΜΑΤΑ. Kleine Schriften zu Platon und zum Platonismus*, Stuttgart, Leipzig.

- Becker, O. (Hg.) (1965), *Zur Geschichte der Griechischen Mathematik*, Darmstadt.
- Brisson, L. (1996), „Den Kosmos betrachten, um richtig zu leben“, in: Kobusch, T./Mojsisch, B. (Hgg.), *Platon. Seine Dialoge in der Sicht neuer Forschungen*, Darmstadt, 229–248.
- Cornford, F. M. (1937), *Plato's Cosmology. The Timaios of Plato translated with a running commentary*, London.
- Euklid (⁸1991), *Die Elemente. Buch I–XIII*. Aus dem Griechischen übersetzt und herausgegeben von Clemens Thaer, Darmstadt.
- Fowler, D. H. (1987), *The Mathematics of Plato's Academy. A new Reconstruction*, Oxford.
- Friedländer, P. (²1954), *Platon*, Berlin.
- Fritz, K. von (²1969), *Platon, Theaetet und die antike Mathematik*, Darmstadt.
- (1965), „Die Entdeckung der Inkommensurabilität durch Hippasos von Metapont“, in: Becker, O. (Hg.), *Zur Geschichte der Griechischen Mathematik*, Darmstadt, 271–307.
- Gaiser, K. (1962), *Platons ungeschriebene Lehre*, Stuttgart.
- Gloy, K. (2000), „Platons Timaios und die Gegenwart“, in: Neschke-Hentschke, A. (Hg.), *Platons Timaios. Beiträge zu seiner Rezeptionsgeschichte*, Louvain, Paris, 317–332.
- Heath, Sir T. (²1981), *A History of Greek Mathematics. Vol. I.: From Thales to Euklid*, New York.
- Heisenberg, W. (1987), „Die Bedeutung des Schönen in der exakten Naturwissenschaft“, in: Ders., *Quantentheorie und Philosophie. Vorlesungen und Aufsätze*, Stuttgart, 91–114.
- Krämer, H. (1996), „Platons ungeschriebene Lehre“, in: Kobusch, T./Mojsisch, B. (Hgg.), *Platon. Seine Dialoge in der Sicht neuer Forschungen*, Darmstadt, 249–275.
- Kutschera, F. von (2002), *Platons Philosophie*, 3 Bde., Paderborn.
- Sachs, E. (1917), *Die fünf Platonischen Körper. Zur Geschichte der Mathematik und der Elementenlehre Platons und der Pythagoreer*, Berlin.
- Stenzel, J. (1924), *Zahl und Gestalt bei Platon und Aristoteles*, Leipzig.
- Taylor, A. E. (1928), *A Commentary on Plato's Timaeus*, Oxford.
- Toeplitz, O. (1965), „Das Verhältnis von Mathematik und Ideenlehre bei Plato“, in: Becker, O. (Hg.), *Zur Geschichte der Griechischen Mathematik*, Darmstadt, 44–75.
- Weizsäcker, C. F. von (¹1971/1981), „Platonische Naturwissenschaft im Laufe der Geschichte“, in: Ders., *Ein Blick auf Platon. Ideenlehre, Logik und Physik*, Stuttgart.

ABSTRACT

In Platons Naturphilosophie, die im Dialog *Timaios* ihre wesentliche Darstellung findet, spielen Mathematika eine herausragende Rolle: Die Welt ist durch mathematische Strukturen verbunden. Als eine solche Struktur erwähnt Timaios die Zusammenfügung des Kosmos durch seine Formung gemäß einer viergliedrigen Proportion. Über den Sinn dieses mathematischen Lehrstückes herrscht in der Platon-Forschung keine Klarheit; es lässt sich verstehen als zahlentheoretischer Satz, der im achten Buch der *Elemente* Euklids vorgeführt wird, oder aber als ein Lösungsschema für das antike Problem der Würfelverdoppelung. Für die zweite Deutung wird hier geworben. In ihr verbinden sich mathematikhistorische, wissenschaftssystematische, epistemologische und ontologische Aspekte der Platonischen Ideenlehre präzise mit dem literarischen Ort, an welchem Platon jenes Lehrstück im *Timaios* einführt.

In Plato's philosophy of nature, which is explicitly developed in the dialogue *Timaeus*, mathematics has a particular position: the world is formed according to mathematical structures. As such a structure Timaeus talks about a four-part proportion with two means that is used to form the world. But it is not clear what is meant by this proportion. It could be a proposition of Euclid, mentioned in the eighth book of the *Elements*, or a schema to resolve the Greek problem of doubling the volume of a cube. This second version has many of advantages for interpretation: Aspects of the history of Greek mathematics, the systematic of sciences, epistemology and ontology of Plato's theory of ideas go together with the exact place, in which literary Plato begins to mention the proportion in the *Timaeus*.