BERICHTE UND DISKUSSIONEN

Was weiß das kreative Subjekt?
Brouwers Intuitionismus und eine Konzeption apriorischen Wissens

Ulrich METSCHL (München)

1. Als eine der beherrschenden Strömungen in der Philosophie der Mathematik geht der Intuitionismus in seiner ‚orthodoxen' Gestalt im Wesentlichen auf L. E. J. Brouwer zurück. Gleichwohl, und ohne dass der Intuitionismus dadurch an Interesse verloren hätte, wird den oft dunklen, ja zuweilen esoterisch wirkenden Arbeiten Brouwers heute allenfalls noch ein historischer Wert zugebilligt. Ihrer philosophischen Bedeutung wird man damit jedoch kaum gerecht. Um diese zu unterstreichen, möchte ich im folgenden versuchen, Brouwers Auffassungen für ein Thema nutzbar zu machen, das derzeit trotz der intensivierten Beschäftigung mit erkenntnistheoretischen Fragestellungen kaum Konjunktur hat: dem Wissen a priori. Dabei soll im folgenden unter Wissen a priori solches Wissen verstanden werden, dass ohne Rückgriff auf Erfahrung begründet werden kann, das heißt, jede Form von Erkenntnis, die empirisches Wissen allenfalls in Entdeckungs-, nicht jedoch in Begründungszusammenhängen in Anspruch nimmt.

Der unzugängliche, mitunter als ‚mystisch' bezeichnete Charakter seiner Darstellungsweise ist Brouwer häufig vorgeworfen worden und hat dazu beigetragen, im Intuitionismus lange Zeit eine vor allem ideologisch motivierte, und das heißt für viele soviel wie: geistig fehlgeleitete Position zu sehen. Aber auch Sympathisanten konstruktivistischer Ansätze in Logik und Mathematik zeigten sich gegenüber Brouwers ursprünglichem Intuitionismus oft reserviert. So hat etwa Paul Lorenzen, in Abgrenzung zu Brouwers bewusstseinsphilosophischen Annahmen, die von einem deutlich solipsistischen Tenor begleitet werden, eine ‚operative' Begründung der Mathematik versucht, die diese in der, wohl als öffentlich zu verstehenden, menschlichen Lebenspraxis verwurzelt sieht. Ohne das philosophische Potential dieses Ansatzes, der im Rahmen der ‚Erlanger Schule' zu einem ansehnlichen Programm heranwuchs, in Abrede stellen zu wollen, scheint mir eine unvoreingenommene Auseinandersetzung mit Brouwer nicht zuletzt für Diskussionen lohnend, die über die Philosophie der Mathematik hinaus in die Erkenntnistheorie allgemeineren Zuschnitts führen. Dabei kann sich die vielleicht unorthodox erscheinende Absicht, aus Brouwers im Rahmen der Begründung der Mathematik vorgetragenen Ideen epistemologischen Nutzen zu ziehen, darauf berufen, dass erstens Brouwer selbst explizit auf Kants Überlegungen zur Mathematik Bezug nahm, und dass zweitens Brouwers Position, ungeachtet dieses und anderer historischer Vorläufer, grundsätzlich auf einer epistemologischen Motivation – im Unterschied etwa zu einer ontologischen – beruht, eine Motivation, die tiefer reicht als nur bis zu etwaigen Zweifeln am uneingeschränkten Gebrauch des tertium non datur.[1]

2. Was Brouwers Intuitionismus für die Erkenntnistheorie attraktiv macht, ist der bekla-

[1] Die epistemologische Natur des Brouwerschen Intuitionismus ist insbesondere von Detlefsen betont worden; vgl. Detlefsen (1990).

genswerte Zustand, in welchem sich gegenwärtig die Überlegungen zu nicht-empirischem, d.h. apriorischem Wissen befinden. Was immer man als den Kern der gegenwärtigen epistemologischen Debatten identifizieren mag, das apriorische Wissen kommt als Gegenstand eigener Untersuchungen darin so gut wie nicht mehr vor. Nun braucht man nicht bestreiten zu wollen, dass eine Theorie empirischen Wissens die epistemologisch dringlichere Aufgabe darstellen mag, so dass die Vernachlässigung apriorischer Erkenntnis als ein verzeihlicher Mangel erscheint. Jedoch besteht Anlass zu der Vermutung, dass die gegenüber dem Apriori an den Tag gelegte Enthaltsamkeit weniger der Tugend klarer Prioritätensetzung als vielmehr einer begrifflichen Verlegenheit entspringt. Die Unzulänglichkeit bestehender Vorschläge mag beispielgebend an der von Roderick Chisholm versuchten Erklärung apriorischen Wissens veranschaulicht werden.[2]

Eine Proposition ist Chisholms Definition zufolge genau dann apriori, wenn sie von einer Person a priori gewusst werden kann. Dies wiederum ist genau dann der Fall, wenn diese Proposition, wie Chisholm es nennt, entweder selbst axiomatischen Status besitzt, oder aus Propositionen, welche ihrerseits axiomatischen Status haben, mithilfe einer Implikation, die ebenfalls axiomatisch sein muss, abgeleitet werden kann. Ohne den genauen Wortlaut wiederzugeben, dürfen wir den axiomatischen Status einer Proposition als etwas verstehen, das sich daraus ergibt, dass die betreffende Proposition sowohl notwendig wahr ist, als auch insofern von einem Merkmal der Evidenz begleitet wird, als sie notwendigerweise für jede Person, die sie akzeptiert bzw. glaubt, damit bereits eine Gewissheit darstellt. Beispiele können das Gemeinte verdeutlichen: Zu den axiomatischen Propositionen rechnet Chisholm neben aussagenlogischen Tautologien, die illustriert werden durch:

Wenn Jones krank ist und Smith fort ist, dann ist Jones krank.

Auch elementararithmetische Aussagen wie:

Die Summe von 5 und 3 ist 8.

oder

Das Produkt von 2 und 4 ist 8.

Dieses zunächst weitgefasst erscheinende Verständnis des Axiomatischen ist für sich genommen keineswegs abwegig. Ebenso wie Leibniz den cartesischen Glauben an angeborene Ideen und Wahrheiten gegen Lockes Bedenken mit dem Hinweis auf ihren dispositionellen, oder modern ausgedrückt: prozeduralen Charakter verteidigen konnte, ließe sich vielleicht auch Chisholms Auffassung des Axiomatischen gegen übertrieben formalistische Einwände mit einem Verweis auf ihren habituellen Aspekt aufrecht erhalten. Allerdings bleibt zweifelhaft, ob Chisholm die damit verbundene Angleichung von „2×4=8" und „777×888=689976" akzeptieren würde, und tatsächlich deutet die Betonung eines psychologischen Evidenzkriteriums in die entgegengesetzte Richtung.

Unabhängig von dieser Frage ist aber unschwer zu erkennen, dass das von Chisholm in Anlehung an die intentionalistische Erkenntnistheorie Brentanos und Meinongs formulierte Kriterium dem erkenntnistheoretischen Interesse an Apriorizität nicht gerecht werden kann. So riskiert Chisholm, dass mit dem Versuch, das Kantische Kriterium für den apriorischen Charakter eines Urteils, nämlich „Notwendigkeit und strenge Allgemeinheit"[3], durch eine deutliche Rückbindung an starke Evidenz zu ersetzen, auch gewisse de se Einstellungen als a priori klassifiziert werden, bei denen dies nach herkömmlicher Auffassung jedenfalls nicht eindeutig zutrifft. Zwar könnten cartesische Selbsterfahrungen der Form „Ich denke, also bin ich" dadurch vom Kreis apriorischer Urteile ausgeschlossen bleiben, dass ihr Notwendigkeitscharakter bestritten wird, denn Notwendigkeit ist auch für Chisholm ein notwendiges

[2] Vgl. Chisholm (1979).

[3] So jedenfalls Kants Kriterium in der *Kritik der reinen Vernunft*, B 5.

Kriterium für Apriorizität. Aber ohne überzeugende Vorschläge zum Verständnis und zur Unterscheidbarkeit von de se Notwendigkeiten dürfte Aussagen wie „Ich bin jetzt hier" nicht so leicht beizukommen sein. Nur zögerlich wird man solche Aussagen jedoch als a priori wahr anerkennen wollen, obwohl sie Chisholms Kriterium mustergültig zu erfüllen scheinen.

Nun werfen indexikalische Ausdrücke für die Semantik von jeher ihre besonderen Schwierigkeiten auf und liegen quer zu gängigen Einteilungen, die den entscheidenden Vorteil indexikalischer Ausdrücke, ihre Kontextbezogenheit, oft für Zwecke der Logik und Mathematik gerade zu vermeiden suchten. Es genügt daher zunächst, wenn diese Beispiele Zweifel an der Angemessenheit der Kriterien Chisholms hervorrufen, indem sie diese als möglicherweise nicht hinreichend ausweisen.

Eindeutiger ist jedenfalls, dass die vorgeschlagenen Kriterien keine notwendigen sein können. Chisholms Motiv, Kants Bestimmung zu ersetzen, ergibt sich aus dem Wunsch, Aussagen zuzulassen, die gleichermaßen notwendig wie nicht a priori sind, während Kant die Möglichkeit notwendiger, nicht-apriorischer Aussagen grundsätzlich nicht in Erwägung zog. Die Fälle aber, an die Chisholm denkt, sind gerade nicht solche der erwähnten Sorte wie „Ich bin jetzt hier". Es sind auch nicht solche Aussagen, die Kripke im Rahmen der Überlegungen zum modalen Charakter von Identitätsaussagen und der damit verbundenen Einführung sogenannter starrer Designatoren[4] als analytische Aussagen a posteriori ansah, wie z.B. „Wasser ist H_2O". Vielmehr denkt Chisholm an den Fall, der dann vorliegt, wenn eine Person eine notwendige Wahrheit, sagen wir, „Die Winkelsumme eines Dreiecks beträgt 180°", nicht auf der Grundlage ausschließlich eigener Überlegungen erkennt, sondern die entsprechende Überzeugung aus berufener Quelle, also von einer einschlägigen Autorität übernimmt. Eine derartige Form des Wissenserwerbs lässt, so steht zu vermuten, das für Apriorizität erforderlich Evidenzkriterium in aller Regel vermissen. Mit dieser Absicht jedoch gibt Chisholm eine begriffliche Verwirrung zu erkennen. Denn der Vorschlag impliziert unmittelbar, dass eine Aussage gleichzeitig a priori wie a posteriori gewusst werden kann. Das wiederum mag zwar sinnvoll sein, wenn wir diese Begriffe zu einem Bestandteil erkenntnispsychologischer Betrachtungen machen wollen, und tatsächlich ist es nur zu plausibel, anzunehmen, dass apriorische Wahrheiten auch a posteriori gewusst werden können. Für die epistemologische Aufgabe der begrifflichen Bestimmung des Apriorischen jedoch ist dieser Umstand zweitrangig. Die mit Erkenntnispsychologie und Erkenntnistheorie verbundene Unterscheidung lässt sich zu dem Vorwurf verdichten, dass Chisholm durch die erhobene Forderung nach Evidenz die Einteilung in apriorisches und nicht-apriorisches Wissen zu einer Frage des Entdeckungszusammenhanges anstatt des für die Erkenntnistheorie im Gegensatz zur Kognitionspsychologie allein ausschlaggebenden Begründungszusammenhanges macht. Die dementsprechende *de facto* Fragestellung, wie epistemische Subjekte im Einzelfall zu ihren Überzeugungen gelangen, scheint grundsätzlich eine empirische Ermittlung der Antwort nahezulegen, für die die Erkenntnistheorie keine vorrangige Zuständigkeit besitzt. Denn ungeachtet der von der naturalisierten oder evolutionären Erkenntnistheorie erhobenen Ansprüche spricht immer noch einiges dafür, die vornehmste Aufgabe der Erkenntnistheorie in der *de jure* Frage zu sehen. Damit aber ist Chisholms psychologistische Konzeption nur schwer vereinbar, und ganz sicher verliert eine Proposition nicht schon deshalb den Status des Apriorischen, weil der mit ihr verbundene Wissenserwerb auf eine Weise zustande kommt, die ein bestimmtes Gewissheitserlebnis vermissen lässt.

Chisholm selbst, so muss fairerweise hinzugefügt werden, verkennt nicht, dass die Eigenschaft der Apriorizität mit einem Anspruch auf Objektivität einhergeht. Seine modale Wen-

[4] Vgl. Kripke (1972).

dung, dass eine Proposition genau dann a priori *ist*, wenn es *möglich* ist, dass sie von einer Person a priori *gewusst* wird, soll dem gerade Rechnung tragen[5], und tatsächlich zeigt sich Chisholm für die Unterscheidung von Entdeckungs- und Begründungzusammenhang durchaus empfänglich.[6] So wird für eine a priori wahre Proposition nicht gefordert, dass sie selbst mit Evidenz verbunden ist; es genügt, dass sie aus Axiomen, die diese Evidenz beanspruchen können, auf evidente Weise gefolgert werden kann. Aber die für die Folgerungsbeziehung geforderte Evidenz erweist sich dann auch als jene Stelle, wo die Trennung zwischen Psychologie und Erkenntnistheorie unscharf wird:

> „Wie verhält es sich, wenn etwa eine Person S aus einer Menge von Axiomen eine Proposition nicht in ein oder zwei Schritten herleitet, sondern als ein Ergebnis eines komplexen Beweises, der eine Reihe von untereinander verbundenen Zwischenschritten erfordert? Wenn dieser Beweis formal gültig ist, sollten wir dann nicht sagen, daß S die Proposition *a priori* weiß?
> Ich glaube, die Antwort ist nein. Komplexe Beweise oder Demonstrationen haben, wie John Locke zeigte, eine gewisse Beschränkung; sie kosten Zeit. Das Ergebnis ist, daß der „evidente Glanz" der ersten Schritte zu der Zeit, wenn die Konklusion erreicht wird, verloren sein mag. [...]
> Wenn wir jedoch im Zuge eines Beweisverfahrens uns bei verschiedenen Schritten auf unser Gedächtnis stützen müssen, und so kontingente Prämissen über das, was wir erinnern, benützen, dann wird man – obschon gesagt werden kann, wir hätten demonstratives Wissen unserer Konklusion in einem etwas weiteren Sinn von „demonstrativem Wissen" – dennoch nicht sagen können, daß wir einen apriorischen Beweis erreicht hätten." (Chisholm [1979], 72–73)

Akzeptieren wir Chisholms Festsetzungen

> „dann könnten wir vielleicht sagen, daß es ein analytisches Aposteriori gibt – oder zumindest könnten wir sagen, daß einige logische Wahrheiten, die wir wissen, so sind, daß wir sie nur *a posteriori* wissen." (Chisholm [1979], 77)

Doch selbst wenn es unterschiedliche Haltungen zur Möglichkeit analytischer Urteile a posteriori geben mag, müssen die von Chisholm angeführten Gründe jedenfalls als unzureichend angesehen werden. Die Frage, ob eine Aussage oder Proposition a priori wahr ist oder nicht, ist keine Frage der kognitiven Performanz, sondern eine Frage grundsätzlicher Rechtfertigungsmöglichkeiten unter Absehung von psychologischen Randbedingungen. Es ist, so können wir es vorgreifend charakterisieren, zwar keine Frage epistemischer Kompetenz, wohl aber epistemischer Verpflichtungen, die auch dann bestehen, wenn es Mühen bereitet, ihnen tatsächlich gerecht zu werden.[7] Das von Chisholm geforderte Evidenzkriterium erweist sich hierfür nicht als notwendig.

Mit dem Versuch, überhaupt einen Vorschlag zur Definition apriorischen Wissens zu unterbreiten, bildet Chisholm im Bereich der analytisch geprägten Diskussion erkenntnistheoretischer Fragen eine Ausnahmeerscheinung. Deren empiristischer Grundtenor scheint einer derartigen Wissensform tendenziell ablehnend gegenüber zu stehen.[8]

---

[5] Siehe Chisholm (1979), 74.

[6] Vgl. Chisholm (1979), 62 ff.

[7] Das Begriffspaar Performanz und Kompetenz geht auf Chomsky zurück und wurde populär mit Chomsky (1965).

[8] Was nicht heißt, dass nicht dennoch ab und an der entsprechende Bedarf angemeldet wird. Beispielsweise hat C. Peacocke vorgeschlagen, logische Konstanten, deren Natur seit Tarski als unbestimmt gilt, durch Rekurs auf Apriorizität zu charakterisieren. Der Versuch mutet schon deshalb hilflos an, weil Peacocke ohne gleichzeitige Erklärung apriorischen Wissens damit nur einen Fall von obscurum per obscu-

Tatsächlich scheinen sich solche Positionen mit der Anerkennung apriorischen Wissens leichter zu tun, die die philosophische Folklore gerne als platonistisch etikettiert. Inwiefern auch damit zunächst eher ein Problem als eine Lösung formuliert ist, wird am Beispiel der zwar nicht mehr ganz aktuellen, dafür aber umso klassischer anmutenden Haltung Russells deutlich.[9] Russells metaphysisch wirkender Vorschlag besteht im Kern darin, eine ‚Bekanntschaft' mit Universalien anzunehmen. Da, wie Russell betont, jede Erkenntnis, verstanden als Wissen einer Wahrheit, auf Bekanntschaft mit Universalien beruht, kann apriorisches Wissen als ein solches erklärt werden, das ausschließlich von Beziehungen zwischen Universalien handelt:

„All a priori knowledge deals exclusively with the relations of universals." (Russell [1912], 59)

Auch ohne ausgeprägten Hang zum Nominalismus wüsste man in diesem Zusammenhang jedoch gern Genaueres über die Bekanntschaft mit Universalien, da es dabei durchaus Unterschiede bzw. graduelle Abstufungen in der Deutlichkeit zu geben scheint (etwa 2×4=8 gegenüber 777×888=689976), ja diese Bekanntschaft manchmal sogar eine ziemlich flüchtige werden kann, wie zahlreiche offene mathematische Vermutungen belegen, hinsichtlich deren Beantwortung wir uns in oft grundsätzlicher Verlegenheit befinden. Die Berufung auf eine Bekanntschaft mit Universalien scheint daher eher der Darstellung eines göttlichen als der Erklärung des menschlichen Wissens angemessen, während es gerade die Mängel des letzteren sind, die nach einer Therapie durch Mathematik und Logik verlangen.

Doch Russells Rückgriff auf Bekanntschaft mit Universalien in dieser skizzierten Fassung soll, stellvertretend für die notorischen Schwierigkeiten sogenannter platonistischer Auffassungen, an dieser Stelle nur dazu dienen, das zweite Horn eines Dilemmas zu illustrieren: zwischen der Skylla der Verkennung der eigentlichen Fragestellung durch Chisholms intentionalistische Konzeption und der Charybdis des Argumentierens mit metaphysischen Vokabeln bei Russell könnte Brouwers Intuitionismus vielleicht einen lukrativen Mittelweg bieten.

3. Der von Luitzen E. J. Brouwer begründete und in der Folge von Arend Heyting weiterentwickelte Intuitionismus zählt neben dem auf Frege zurückgehenden Logizismus und dem vor allem im Umkreis von David Hilbert vertretenen Formalismus zu den klassischen Positionen der Philosophie der Mathematik. Die ihn tragende Motivation wird häufig in den mengentheoretischen Paradoxien gesucht, welche besonders zu Beginn dieses Jahrhunderts als ein mathematisches Grundlagenproblem galten. Brouwer selbst hat dieser Auffassung verschiedentlich Vorschub geleistet, z.B. wenn er die Unterschiede zum Formalismus herauszustreichen versuchte.[10] Als hervorstechendes Merkmal der intuitionistischen Position wird dabei die Ablehnung des Aktualunendlichen gesehen, mit der Folge, dass der Satz vom ausgeschlossenen Dritten bei Aussagen über unendliche Gegenstandsbereiche, die es intuitionistisch nur potentiell, also im Sinne eines Werdens geben kann, seine uneingeschränkte Gültigkeit verliert. Tatsächlich jedoch ist Brouwers Auffassung von Mathematik das Ergebnis sehr grundsätzlicher Überlegungen zur Entstehung mathematischen Wissens und insofern weitgehend unabhängig von der Entdeckung der Paradoxien und den unterschiedlichen Ansätzen zu ihrer Lösung. Die intuitionistische Auffassung versteht Mathematik

> „als natürliche Funktion des Intellekts, als freie, lebendige Aktivität des Denkens. Für ihn [d.i. den intuitionistischen Mathematiker; U. M.] ist die Mathematik ein Er-

rius bietet; vgl. Peacocke (1976). Einen Versuch, apriorisches Wissen im Rahmen einer naturalistischen Erkenntnistheorie zu formulieren, hat P. Kitcher unternommen; vgl. Kitcher (1980).

[9] Die hier skizzierte Position findet sich in dieser Form in Russell (1912), insb. in den Kapiteln 8 bis 10.

[10] Vgl. etwa Brouwer (1912).

> zeugnis des menschlichen Geistes. Die Sprache, sowohl die gewöhnliche wie die formalistische, gebraucht er nur zur Mitteilung, d.h. um andere oder sich selbst zum Nachdenken seiner mathematischen Gedanken zu veranlassen." (Heyting [1930], 106)

Weil damit eine von Denken und Bewusstsein unabhängige Existenz mathematischer Gegenstände, auf die sprachlich genauso Bezug genommen werden könnte wie auf Objekte der alltäglichen Erfahrung, bestritten wird, besteht hinsichtlich der Ontologie mathematischer Entitäten tatsächlich ein Unterschied zwischen der intuitionistischen Einstellung und der Einstellung, die der ‚klassischen' Mathematik unterliegt. Während Erstere dadurch gekennzeichnet wird, dass sie Zahlen genau wie andere mathematische Objekte als *Konstrukte* des menschlichen Denkens begreift, setzt Letztere bestimmte Gegenstände wie z.B. Mengen als unabhängig vom menschlichen Bewusstsein, wenngleich außerhalb von Raum und Zeit existierend, voraus. Der Intuitionismus erweist sich in diesem Sinne als die konstruktivistische Ausrichtung in der Philosophie der Mathematik schlechthin. Doch in Heytings Worten deutet sich zugleich an, dass die ontologischen Differenzen nur von zweitrangiger Bedeutung sind. Die intuitionistische Position ist nicht primär am ontologischen Status mathematischer Gegenstände interessiert, sondern am Zustandekommen mathematischer Erkenntnis, d.h. an der Art und Weise, wie sich das für die Mathematik spezifische Wissen aus der Natur des menschlichen Bewusstseins ergibt. Die Mathematik als solche, und damit auch mathematische Wahrheit, und nicht deren Objekte, wird als „Erzeugnis des menschlichen Geistes" beschrieben.

Damit ist der Intuitionismus im Kern eine primär epistemologisch, nicht ontologisch motivierte Position. Brouwers erklärtes Ziel war es, die Mathematik als Ausdruck der grundlegenden Vorgänge des menschlichen Bewusstseins auszuweisen und sie auf diese Weise zu revolutionieren. Mathematik als der ‚exakte Teil unseres Denkens' bzw. die ‚exakte Wissenschaft' ist für ihn die zwangsläufige Folge einer Abstraktion von im Bewusstseinsstrom angetroffenen Empfindungen und Eindrücken. Schon aus diesem Grund ist die Mathematik grundsätzlich unabhängig von Sprache und der mit der Sprache verbundenen Logik. Eben dieser Punkt markiert am auffälligsten die Differenz zum Formalismus der Hilbertschule, für welchen die Logik, in Gestalt der Beweistheorie, zum entscheidenden Instrument mathematischer Erkenntnis wurde, das seine Leistungsfähigkeit den logisch eindeutigen Verhältnissen formaler Sprachen verdankte. Für Brouwer entstand mathematisches Denken dagegen auf einer vorsprachlichen Stufe und die Ablehnung der (klassischen) Logik geht Hand in Hand mit der Zurückweisung des Glaubens an eine von Denken und Bewusstsein unabhängige Existenz mathematischer Entitäten.

Natürlich ist Brouwers epistemologische Kalibrierung der Mathematik keine neue Errungenschaft. Doch hatte eine solche noch unter der von Brouwer so bezeichneten prä-intuitionistischen Schule[11] mit der Schwierigkeit zu kämpfen, dass sie offenbar den mathematischen Anforderungen nicht gewachsen war. Eine konstruktivistische Deutung der natürlichen Zahlen war gegen Ende des 19. Jahrhunderts wohl etabliert und hatte es mit Kroneckers Diktum, dass der liebe Gott die natürlichen Zahlen geschaffen habe, während alles andere in der Mathematik Menschenwerk sei, auch zu philosophischem Ausdruck gebracht. Unklar allerdings waren die Einzelheiten des ‚Menschenwerks', und insbesondere die für die Analysis unverzichtbaren, das ‚Kontinuum' bildenden reellen Zahlen widersetzten sich dem konstruktivistischen Zugriff. Brouwer jedenfalls sieht in der Konstruktion reeller Zahlen beispielsweise über die sogenannten Dedekindschen Schnitte eine Preisgabe konstruktivistischer Grundüberzeugungen und lehnt andere Vorschläge aus mathematischen

[11] Zu ihr rechnete Brouwer vor allem Borel, Lebesgue und Poincaré.

Gründen als unzureichend ab.[12] Damit ist es insbesondere die angestrebte Darstellung des Kontinuums, d.i. der reellen Zahlen, die dem Intuitionismus Brouwers seine prägende Gestalt, aber auch seine besonderen technischen Schwierigkeiten verleiht. Die dabei eingenommene Perspektive ist durchaus instrumentalistisch zu verstehen: Wissenschaft dient, so feuilletonistisch dies klingt, der Organisation der Erfahrungswelt, und der Mathematik kommt dabei eine universelle Rolle zu.[13] Die Erfahrungswelt ist selbst Produkt des Bewusstseins, das Abfolgen von Eindrücken als kausale Ereignisfolgen deutet. Auch die Mathematik hat ihren Ursprung somit in der Selbstorganisation des Bewusstseins. Sie ergibt sich zur Gänze aus den ‚zwei Akten des Intuitionismus', von denen

> „The
> FIRST ACT OF INTUITIONISM
> completely separates mathematics from mathematical language, in particular from the phenomena of language which are described by theoretical logic, and recognizes that intuitionist mathematics is an essentially languageless activity of the mind having its origin in the perception of a move of time, i.e. of the falling apart of a life moment into two distinct things, one of which gives way to the other, but is retained by memory. If the two-ity thus born is divested of all quality, there remains the empty form of the common substratum of all two-ities. It is this common substratum, this empty form, which is the basic intuition of mathematics." (Brouwer [1952], 509 f.)

Von der ‚Grund-Intuition' der Mathematik ausgehend, werden in einem zweiten Akt des Intuitionismus, durch Anwendung der im ersten Akt gewonnenen Idee der Progression, die intuitionistisch korrekten Ausgaben der reellen Zahlen sowie allgemein der Mengen geschaffen:

> „The
> SECOND ACT OF INTUITIONISM
> which recognizes the possibility of generating new mathematical entities:
> firstly in the form of infinitely proceeding sequences $p_1, p_2, \ldots$, whose terms are chosen more or less freely from mathematical entities previously acquired; in such a way that the freedom of choice existing perhaps for the first element p_1 may be subjected to a lasting restriction at some following p_n, and again and again for sharper lasting resrictions or even the abolition at further subsequent p_n's while all these restricting interventions, as well as the choices of the p_n's themselves, at any stage may be made to depend on possible future mathematical experiences of the creating subject;
> secondly, in the form of mathematical species, i.e. properties supposable for mathematical entities previously acquired, and satisfying the condition that, if they hold for a certain mathematical entity, they also hold for all mathematical entities which have been defined to be equal to it, relations of equality having to be symmetric, reflexive and transitive; mathematical entities previously acquired for which the property holds are called elements of the species." (Brouwer [1952], 511).

Die mit dem zweiten Akt eingeführten Wahlfolgen und Spezies als intuitionistisch korrigierte Fassungen von reellen Zahlen bzw. den Mengen der klassischen Mathematik bilden das Herzstück der intuitionistischen Mathematik. Indem, vereinfacht gesprochen, reelle

---

[12] Vgl. Brouwer (1951).

[13] Eine prägnante Formulierung findet sich in Brouwer (1912): „By science we mean the systematic cataloguing by means of laws of nature of causal sequences of phenomena, i.e. sequences of phenomena which for individual or social purposes it is convenient to consider as repeating themselves identically, – and more particularly of such causal sequences as are of importance in social relations." (S. 123 f.)

Zahlen nicht mehr als eindeutig bestimmte Entitäten bzw. abgeschlossene Einheiten, sondern als das Resultat eines schrittweisen, regelgeleiteten Prozesses verstanden werden, kommt es zu mathematisch bedeutsamen Abweichungen in der Theorie. Die intuitionistische Analysis behauptet für die reellen Zahlen andere Ordnungseigenschaften als die klassische Analysis dies tut – Brouwer spricht von einer ‚konstruktiven' gegenüber einer ‚negativen' Ordnung. Dabei gelingt Brouwer in späteren Schriften der Nachweis, dass klassische mathematische Behauptungen über die Ordnung des Kontinuums nicht nur nicht intuitionistisch nachvollzogen werden können, sondern tatsächlich im Widerspruch zu intuitionistischen Behauptungen stehen. Beispielsweise ist der so genannte Bolzano-Weierstraß-Satz, der besagt, dass jede unendliche beschränkte Menge von reellen Zahlen wenigstens einen Häufungspunkt besitzt, intuitionistisch nicht nur nicht beweisbar, sondern sogar falsch. Und ebenfalls im Widerstreit mit einem klassischen Theorem ist nach intuitionistischer Auffassung aufgrund der abweichenden Ordnungseigenschaften jede vollständige Funktion über dem Intervall der reellen Zahlen zwischen Null und Eins gleichmäßig stetig.

Diese so genannten starken Gegenbeispiele gegen Lehrsätze der klassischen Mathematik, die zeigen, dass sich die intuitionistische Auffassung nicht nur in Rhetorik erschöpft, beweist Brouwer unter Bezug auf das ‚kreative Subjekt', aus dessen mentalen Aktivitäten die mathematischen Gegenstände als, kantisch gesprochen, Gegenstände der reinen Anschauung, also der Intuition, erst resultieren. Dabei vollzieht sich der Schöpfungsprozess entsprechend den Vorgaben des ersten Akts des Intuitionismus: in entscheidbaren Schritten, ohne Rekurs auf abgeschlossene, d. h. aktuale Unendlichkeiten. Aus mathematischer Sicht kommt dem zweiten Akt des Intuitionismus entscheidende Bedeutung zu. Erst mit ihm konstituieren sich über die Elementararithmetik hinausgehende, mathematische Gegenstandsbereiche. Aus philosophischer Sicht, und Brouwer lässt daran keinen Zweifel, ist der erste Akt des Intuitionismus der fundamentale. Brouwer sieht in diesem vor allem die destruktive Wirkung und meint damit, dass darin das Spezifische der konstruktivistischen Position zu finden ist, das sie sowohl von einer platonistischen Auffassung à la Frege als auch von einem Formalismus Hilbertscher Prägung, gegen den sich vor allem die Betonung der Sprachunabhängigkeit richtet, unterscheidet. Indem der erste Akt des Intuitionismus die gesamte Mathematik als eine geistige Tätigkeit auf bestimmte Denkbewegungen zurückführt, solche nämlich, die an die Wahrnehmung der Zeit gebunden sind, richtet er sich insbesondere gegen die in Brouwers Augen falschen Vorstellungen von Mathematik, die zu Beginn dieses Jahrhunderts im Umlauf waren. Doch während die Abgrenzung vom Logizismus durch die Betonung des Konstruktionsgedankens so grundlegend ist, dass dieser als ernst zu nehmende Position kaum mehr in Betracht kommt, ist die Kritik am Formalismus subtiler und verdient eine erläuternde Bemerkung.

Tatsächlich hat Brouwer seiner Position vor allem in der zweiten Hälfte der zwanziger Jahre dieses Jahrhunderts in der bewussten und gesuchten Auseinandersetzung mit Hilberts beweistheoretischem Programm ihren charakteristischen Ausdruck verliehen. Hilberts, die Metamathematik motivierendes Ziel war es, den Schwierigkeiten und Gefahren des mathematischen Wissenserwerbs durch eine klare Methodologie zu begegnen. Die Grenzen der Mathematik sollten aus der grundsätzlichen Form und Gestalt mathematischer Theorien erkennbar werden. Deshalb das formalistische Verlangen nach vollständig formalisierten mathematischen Theorien, die die Mathematik allererst einer rein logischen Behandlung zugänglich machten. Diese Theorien selbst wurden damit zu Untersuchungsgegenständen, die, geeignete Kalküle vorausgesetzt, mit finiten Mitteln erforschbar wurden.

Aber trotz gewisser Gemeinsamkeiten, wie dem Finitismus oder der auch im Formalismus spürbaren Neigung zum Operationalen, weist Brouwer mit polemischem Unterton beharrlich auf die Differenzen hin. Die Hervorhebung der Sprachunabhängigkeit des mathematischen

Denkens mit dem gleichzeitigen Insistieren auf dem für die Mathematik konstitutiven mentalen Charakter markieren dabei einen Einwand gegen den Formalismus, dessen eigentliches Anliegen nur selten beachtet wird. Denn damit ein Beweis tatsächlich als *Beweis* verstanden werden, mithin ein überzeugendes Argument für eine Einsicht oder Erkenntnis darstellen kann, muss er eine inhaltliche Ebene besitzen, die über die des rein syntaktischen Operierens, auf das sich die Regeln Hilbertscher Kalküle beschränken, hinausgeht. Die Bedeutung, die einem Beweis als einem inhaltlichen Argument zukommen muss, grenzt diesen ab von inhaltslosen Spielen, auf die Hilbert die Mathematik reduzierte. Ganz so, wie ein Satz, um sich als Satz einer Sprache zu qualifizieren, nicht nur ein grammatisches Konstrukt darstellt, sondern auch eine Bedeutung transportieren muss, weil Syntax ohnehin vor allem ein Verfahren ist, durch geregelte Kombinationen einer begrenzten Anzahl von Bedeutungsbausteinen unbegrenzt vielen Bedeutungen Ausdruck zu verleihen, besitzen auch Beweise eine Bedeutung, die wenigstens die Frage sinnvoll werden lassen, ob zwei Beweise einer Aussage als äquivalent anzusehen sind oder nicht.[14]

Die Behauptung, dass Mathematik das Produkt geistiger, d.h. Vorgänge des Bewusstseins als innerer Wahrnehmung verarbeitender Tätigkeiten ist und ihre sprachliche Einkleidung allenfalls Zwecken der Mitteilung oder der leichteren Erinnerung dient, heißt auf Beweise angewandt, dass auch diese primär als mentale Konstrukte verstanden werden müssen, die nicht reduzierbar sind auf bedeutungsfreie Regelanwendungen im Rahmen formaler Kalküle. Der intuitionistische Kerngedanke, der sich hinter Brouwers harscher Kritik an der in seinen Augen übersteigerten Logisierung der Mathematik durch Hilberts Formalismus verbirgt, ist, dass Mathematik nicht aus einem, wenn auch regelkonformen Operieren mit bedeutungslosen Symbolen entsteht, sondern nur aus der schrittweise vollzogenen Entfaltung der mathematischen Ur-Intuition, wie sie der erste Akt des Intuitionismus beschreibt. Brouwer hat keine Theorie angeboten, die einer Semantik von Beweisen gleichkommt. Aber er hat klargemacht, dass aus intuitionistischer Sicht mathematische Erkenntnis mit einer besonderen Erkenntnisweise einhergeht, die an kantischer Anschauung angelehnt ist, und die ihr Fundament in der die Progression der natürlichen Zahlen erzeugenden Ur-Intuition hat.

In Brouwers späteren Schriften werden die entsprechenden Bewusstseinsakte und die darin enthaltenen Erkenntnisse einem ‚kreativen Subjekt' zugeschrieben. Die Wahrnehmung der zeitlichen Abfolge der eigenen Bewusstseinsinhalte und die Möglichkeit, dabei von den spezifischen Inhalten zu abstrahieren, bilden die Grundlage der mathematischen Einsichten, zu denen das kreative Subjekt gelangt.

4. Abgesehen von dem Umstand, dass mathematische Erkenntnis nicht koextensiv ist mit apriorischem Wissen, bleibt auch die Frage zu klären, inwieweit mit Brouwers reflexiven Akten der Einsicht in die Struktur des Bewusstseins bereits ein Fall mathematischer *Erkenntnis* vorliegt. Denn für Wissen, und insbesondere für apriorisches Wissen, wird üblicherweise eine propositionale Struktur angenommen. Ob allerdings eine solche bereits mit dem inneren ‚Erlebnis' des iterierbaren ‚Auseinanderfallens von Lebensmomenten' einhergeht, scheint zumindest fraglich.

Michael Detlefsen hat argumentiert, dass der besondere epistemologische Charakter von Brouwers Begründung der Mathematik gerade darin besteht, dass mathematische Erkenntnis mit einer spezifischen Erkenntnis*weise*, nämlich mit der erwähnten Form der zeitlichen Anschauung bzw. Intuition, verbunden ist.[15] Da logisches Schließen gegenüber dem jewei-

[14] Zu diesem Aspekt des Brouwerschen Intuitionismus und seiner Bedeutung für Gentzens Beweistheorie vgl. etwa Ungar (1992).

[15] Detlefsen sieht darin bereits ein besonderes Anliegen Poincarés und spricht deshalb von ‚Poincaré's concern'; vgl. Detlefsen (1990), 502f.

ligen Erkenntnismodus weitgehend insensitiv ist und grundsätzlich nur das berücksichtigt, was wir kurzerhand den propositionalen Gehalt nennen wollen, unabhängig von der Art und Weise, mit der dieser gewusst oder repräsentiert wird, ergibt sich daraus eine plausible Erklärung für die reservierte Haltung gegenüber der formalen Logik, die Brouwer häufig nachgesagt wird. Detlefsen fasst die Haltung Brouwers in diesem Punkt zunächst folgendermaßen zusammen:

> „some restriction of the role of logical inference in mathematical proof [...] is necessary if one is to account for the seeming difference in the epistemic conditions of provers whose reasoning is based on genuine insight into the subject-matter being investigated, and would-be provers whose reasoning is based not on such insight, but rather on principles of inference which hold of every subject-matter indifferently." (Detlefsen [1990], 501)

Die damit verbundene erkenntnistheoretische Grundeinstellung erzwingt eine veränderte Haltung gegenüber der Logik entlang folgender Überlegung:

> „This new (i.e. non-classical) epistemology requires a new conception of inference, for in order for a truth to be proven it requires that it be ‚experienced' in a certain way. And this new conception of inference severly restricts the role of logical inference in proof." (Detlefsen [1990], 502)

Der von Detlefsen nachdrücklich betonte phänomenologische Charakter mathematischer Erkenntnis bedeutet tatsächlich, dass diese sich durch ein grundsätzlich anderes Verfahren entwickeln muss als durch formallogische Manipulationen von Symbolen, welche die phänomenologischen Merkmale nicht bewahren können. Aus intuitionistischer Sicht ist die Beschränkung auf formallogische Beweisverfahren sogar eine Einengung der der Mathematik angemessenen Erkenntnismethoden, wie am Beispiel des Brouwerschen Satzes über die gleichmäßige Stetigkeit aller reell-wertigen Funktionen auf dem abgeschlossenen Intervall zwischen 0 und 1 deutlich wird, der, aus intuitionistischer Sicht, eine Wahrheit darstellt, die dem klassischen Mathematiker aufgrund seiner verfahrenstechnischen Abhängigkeit von der formalen Logik verborgen bleibt.[16] Was somit tatsächlich für die mathematische Erkenntnis konstitutiv ist, beschreibt Detlefsen folgendermaßen:

> „What is thus crucial and basic is the creation of a new proof-experience. For once such experience exists, knowledge may be extended to whatever its content is. What logical relation the content of this newly created experience might bear to that of the old is a matter of secondary concern. For knowledge-extension proceeds not by the logical extraction of new propositions from ones already known, but rather by the phenomenological transformation of one proof-experience into another- the new content emerging as *the content of* the new experience produced by this transformation. Mathematical inference or proof thus follows the path of the possibilities relating mathematical activities, rather than the chain of connections determined by some logico-linguistic analysis of the (propositional) content of such activities, as classical epistemology maintains." (Detlefsen [1990], 516)

Damit unterstreicht Detlefsen völlig zu Recht ein entscheidendes Merkmal der Brouwerschen Position. Tatsächlich ist es keineswegs ausgemacht, dass die Entwicklung der intuitionistischen Logik durch Heyting, mit der sich die Vorteile formallogischer Methoden auch den Intuitionisten erschließen sollten, dem Geist des Brouwerschen Intuitionismus in jeder Hinsicht konform bleibt.[17] Es stimmt, dass für Brouwers Auffassung von mathematischer

---

[16] Vgl. Detlefsen (1990), 519 f.

[17] Detlefsen diskutiert diesen Aspekt in einem eigenen Abschnitt seines Aufsatzes; siehe Detlefsen (1990), 525 ff.

Einsicht als einer Art inneren Erlebens die Isolierung eines entsprechenden propositionalen Gehalts zunächst unerheblich ist. Da logische Prinzipien propositionale Beziehungen regulieren, wird somit erkennbar, dass Brouwers Kritik an der formalen Logik nicht gegen das tertium non datur (oder ein entsprechendes anderes Prinzip) als solches gerichtet ist, sondern einen grundlegenderen Punkt berührt. Dessen ungeachtet sollten Detlefsens Bedenken gegen die Vereinbarkeit einer intuitionistischen Logik mit Brouwers Konzeption mathematischer Erkenntnis aus zwei Gründen nicht übergewichtet werden. Zum einen bestreitet Brouwer nicht das Bestehen logischer Beziehungen, und zum anderen verbirgt sich in der Idee des kreativen Subjekts die Anerkennung eines propositionalen Gehalts und damit natürlich auch die Anerkennung der Möglichkeit logischer Beziehungen. Detlefsen weiß um die Unverzichtbarkeit von so etwas wie propositionalem Gehalt und sieht ihn direkt an die mentalen Zustände gekoppelt, die sich auf konstruierte Objekte beziehen. Damit aber wird auch die Anerkennung logischer Verhältnisse nur noch zu einer Formsache. Es ist richtig, dass Brouwer von der Unzuverlässigkeit logischer Prinzipien spricht, und das tertium non datur ist der bekannteste Fall eines derartigen Prinzips, dem nicht uneingeschränkt vertraut werden darf.[18] Entscheidend aber ist, dass Brouwer die Mathematik, und zwar qua mathematischer Erkenntnis, für autonom gegenüber der Logik hält. Die Einsicht in einen mathematischen Sachverhalt, wie z.B. Zahlenverhältnisse, Eigenschaften von Funktionen oder Ähnliches, ist nicht abhängig von und basiert nicht auf Kenntnissen, Fertigkeiten oder Kompetenzen formallogischer Art. Im Gegensatz zur Hilbertschen Auffassung ist das Beachten und Entfalten logischer Zusammenhänge für die Mathematik in Brouwers Augen in keinster Weise konstitutiv, da sich die mathematische Erkenntnis nach den Grundsätzen des ersten Akts des Intuitionismus entwickelt. Wo Brouwer auf die Grundsätze der Logik zu sprechen kommt, geschieht dies in der Regel in Verbindung mit der Frage nach der adäquaten Repräsentierbarkeit der propositionalen Gehalte, die als das Ergebnis der mentalen Tätigkeiten oder Akte, die zu mathematischen Einsichten führen, verstanden werden können.

> „*Suppose that an intuitionist mathematical construction has been carefully described by means of words, and then, the introspective character of the mathematical construction being ignored for a moment, its linguistic description is considered by itself and submitted to a linguistic application of a principle of classical logic. Is it then always possible to perform a languageless mathematical construction finding its expression in the logico-linguistic figure in question?*
> After a careful examination one answers this question in the *affirmative* (if one allows for the inevitable inadequacy of language as a mode of description) as far as the principles of contradiction and syllogism are concerned; but in the *negative* (except in special cases) with regard to the principle of the excluded third, so that the latter principle, as an instrument for discovering new mathematical truths, must be rejected." (Brouwer [1952], 141; Hervorhebungen i.O.)

Abgesehen davon, dass Brouwer die Logik in extremer Weise für sprachgebunden einschätzt,[19] macht seine Haltung deutlich, dass sie im übrigen, die erforderlichen intuitionistischen Anpassungen vorausgesetzt, ein durchaus zulässiges und, mit den erwähnten Einschränkungen, auch zuverlässiges Instrument zur Repräsentation mathematischer Erkenntnis ist.

---

[18] Siehe hierzu vor allem Brouwer (1907), doch bleibt diese Kritik durchgehender Tenor in Brouwers Arbeiten.

[19] Zu einer alternativen Auffassung, die die rein strukturellen Aspekte der Logik hervorhebt, vgl. Koslow (1992).

Brouwer selbst macht von der entsprechenden Möglichkeit ausgiebig Gebrauch, nicht zuletzt, um Verhältnisse zwischen seines Erachtens grundlegenden Begriffen der intuitionistischen Mathematik darzustellen.[20]

Im Ergebnis sehen wir also, dass, obwohl es zweifellos zutrifft, dass Brouwer in der strukturierten Entwicklung von Bewusstseinszuständen den Entstehungsgrund und damit das eigentliche Fundament mathematischer Einsicht erblickte, dennoch diesen vorlogischen, anschauungsgebundenen Einsichten ein propositionaler Gehalt entsprechen muss, der es erlaubt, von mathematischem Wissen oder mathematischer Erkenntnis im gewöhnlichen Wortsinn zu sprechen. Die von Detlefsen vorgetragenen Bedenken gegen die Verträglichkeit einer intuitionistischen Logik mit der Brouwerschen Erkenntnistheorie sind damit zwar nicht gänzlich hinfällig, lassen sich aber relativieren. Das korrigierte Verständnis besteht dann darin, dass sich, ganz im Sinne der Brouwerschen Ausführungen, mathematisches Erkennen von Prinzipien der Logik unabhängig vollzieht, weil der Erkenntnisgrund allein in der Intuition der zeitlichen Abfolge und damit vorbegrifflich besteht, dieses aber gleichzeitig, da es sich um eine Erscheinungsform echter Erkenntnis handelt, einer Verarbeitung durch die Logik in jedem Fall zugänglich ist – sofern die Logik die hierfür richtige ist. Um es kurz zu sagen: Brouwer besteht darauf, dass eine formale mathematische Erkenntnis intuitiv einholbar sein muss.

Im Rahmen dieser Möglichkeit scheint es also möglich, mit dem Zustandekommen des mathematischen Wissens wenigstens einen klaren Fall von apriorischer Erkenntnis aufzuzeigen, der, wenn wir einmal großzügig von den Details absehen, die die grundlegenden Bewusstseinsstrukturen betreffen, immerhin ansatzweise einen Erklärungsversuch vorweisen kann. Unverkennbar ist allerdings, und dies war wiederholt Grund für eine ablehnende Haltung, dass Brouwers Konzeption mathematischer Erkenntnis zumindest in ihrer Formulierung stark solipsistische Züge aufweist. Die Einführung des kreativen Subjekts seit den späten vierziger Jahren erscheint nur als konsequenter Ausdruck dieser Tendenz, und dementsprechend hat es in Diskussionen um den intuitionistischen Standpunkt einige Beachtung gefunden.[21] Wir wenden uns daher, um den mit Brouwers Vorstellungen verbundenen Vorschlag für apriorisches Wissen besser zu verstehen, dem kreativen Subjekt zu.

5. Die informelle Darstellung des kreativen Subjekts, die aus den spärlichen Bemerkungen Brouwers gewonnen wurde, erschöpft sich in wenigen Worten. Demnach haben wir uns das kreative Subjekt als einen idealisierten Mathematiker vorzustellen, der erstens frei ist von gewissen kognitiven, allenthalben menschlichen Beschränkungen und Unzulänglichkeiten und dessen Bewusstseinszustände zweitens eine bestimmte Eindeutigkeit besitzen. Das kreative Subjekt wird somit, einem cartesischen Erkenntnisideal sinnverwandt, gedacht als ein epistemisches Subjekt, dass, frei von Rechenirrtümern, nie zu falschen mathematischen Überzeugungen gelangt und, ausgestattet mit einem unfehlbaren Gedächtnis, keine seiner mathematischen Einsichten je vergisst. Die erwähnte Eindeutigkeit besteht darin, dass für jeden beliebigen Zeitpunkt t und jede beliebige mathematische Aussage A entscheidbar ist, ob das Subjekt die Aussage A zum Zeitpunkt t als wahr anerkennt, d.h. bewiesen hat, oder nicht. Unschwer ist in diesen Bedingungen ein modaler oder zumindest intensionaler Charakter erkennbar, der, wenn wir für den zeitlichen Ablauf, in dem sich der Erkenntniszu-

[20] Siehe z.B. Brouwer (1925), 278 ff.

[21] Pionierarbeit hierbei leistete Georg Kreisel mit einer Reihe von Publikationen, siehe etwa Kreisel (1967). Der solipsistische Charakter des Brouwerschen Ansatzes wird dagegen von Detlefsen heruntergespielt, da es ihm vornehmlich um die nicht-universelle Natur der mit der Mathematik verbundenen Erkenntnisform geht, vgl. Detlefsen (1990).

wachs des kreativen Subjekts vollzieht, eine diskrete Struktur annehmen, die folgende Formalisierung nahelegt:[22]

(1) $\forall n\ (\Box_n A \rightarrow A)$ – Korrektheit: Wenn A auf Stufe n bewiesen ist, dann ist A auch der Fall

(2) $\forall n, m\ (\Box_m A \,\&\, m \leq n \rightarrow \Box_n A)$ – Stabilität: Was auf einer Stufe m bewiesen ist, gilt für alle späteren Stufen als bewiesen.

(3) $\forall n\ (\Box_n A \vee \neg \Box_n A)$ – Enscheidbarkeit: Für jede Stufe n steht fest, ob A auf dieser Stufe bewiesen ist oder nicht.

So unkontrovers diese Bedingungen im allgemeinen für die Darstellung des kreativen Subjekts sind, so ergeben sich aus ihnen doch Folgerungen, die den solipsistischen Hintergrund dieser Annahmen deutlich werden lassen. Da die grundlegende Prämisse nämlich darin besteht, dass mathematische Wahrheit keinen bewusstseinsunabhängigen Status beanspruchen kann und somit streng an die Einsichten des kreativen Subjekts gebunden ist, heißt das, dass eine Behauptung über einen mathematischen Sachverhalt genau dann wahr ist, wenn sie zu einem bestimmten Zeitpunkt auch (in einem gewissen, noch zu spezifizierenden Sinne) bewiesen ist:

(4) $A \leftrightarrow \exists n \Box_n A$

Brouwer hat den Solipsismus, der mit (4) zum Ausdruck kommt, wenn wir „bewiesen sein" als „durch das kreative Subjekt bewiesen sein" verstehen, ausdrücklich anerkannt:

> „Other individuals, i.e. human bodies, are only iterative complexes of sensations whose elements are permutable in time ... there is no plurality of mind, so much less is there a science of plural minds." (Brouwer [1948], 485)

Die Subjektabhängigkeit mathematischer Wahrheit und die Reduktion auf innere Erfahrung verhindern jedoch keineswegs die logische Ordnung des vom kreativen Subjekt getragenen schöpferischen Prozesses. Heytings Interpretation der logischen Konstanten harmoniert jedenfalls in erster Näherung mit Brouwers Auffassungen, aus denen sie ihre Heuristik bezieht.

Wir nehmen an, dass ein Verfahren vorliegt, mit dem elementare, d.h. logisch nicht-komplexe arithmetische Aussagen als wahr erkannt werden können. Ein derartiges Verfahren stellen Brouwers aus den Strukturen inneren Erlebens abgeleitete Einsichten dar, ebenso wie handfeste, elementararithmetische Operationen, die mit Papier und Bleistift ausgeführt werden. Jedes derartige Verfahren geht einher mit, wie wir sagen wollen, entsprechenden mentalen Konstruktionen für die jeweiligen elementar-arithmetischen Sachverhalte, die auf diese Weise gleichsam geschaffen werden. Die Fortsetzung eines geeigneten Verfahrens auf dem Wege mentaler Konstruktionen für logisch komplexe Aussagen mittels einer geeigneten Interpretation der logischen Operationen nimmt dann folgende Gestalt an:

Für A&B:
c ist eine (mentale) Konstruktion, die die Konjunktion A&B beweist gdw
$c = \langle c_1, c_2 \rangle$ und c_1 beweist A und c_2 beweist B;
Für A∨B:
c ist eine Konstruktion, die A∨B beweist gdw
$c = \langle i, c^* \rangle$ und [($i = 0$ und c^* beweist A) oder ($i = 1$ und c^* beweist B)]
Für A→B:
c ist eine Konstruktion, die A→B beweist gdw
c ist eine Funktion derart, dass für jede Konstruktion c^+, die A beweist, $c(c^+)$ eine Konstruktion ist, die B beweist.

[22] Vgl. Dummett (1973), Dummett (1977), sowie van Dalen (1986).

Aus der letztgenannten Klausel gewinnen wir eine Interpretation für die Negation $\neg A$, wenn wir definieren: $\neg A :\Leftrightarrow (A \rightarrow \bot)$; „$\bot$" dient dabei wie üblich als Absurditätskonstante.

Bevor wir allerdings der Versuchung erliegen, die Heytinginterpretation tatsächlich als den logischen Teil der kognitiven Prozesse des kreativen Subjekts anzusehen, müssen wir die darin vorausgesetzten ‚Konstruktionen' eingehender betrachten. Den aufgestellten Klauseln lässt sich unmittelbar entnehmen, dass es sich bei Konstruktionen um etwas handeln muss, das sich zu geordneten Paaren zusammenfassen lässt sowie funktionalen Anwendungen offen steht in dem Sinn, dass Konstruktionen nicht nur sowohl Argument wie Wert einer Funktion, sondern auch selbst Funktion sein können. Doch indem Konstruktionen dergestalt als weitgefasste Gattung mathematischer Objekte verstanden werden, wird nur eine mögliche Deutung in Betracht gezogen, die zudem nicht diejenige ist, die dem Geist der Brouwerschen Ausführungen am besten entspricht. Wie G. Sundholm in diesem Zusammenhang betont hat, können wenigstens drei verschiedene Begriffe von Konstruktionen unterschieden werden, die dem intuitionistischen Anliegen keineswegs in gleicher Weise gerecht werden.[23] Neben der Auffassung von Konstruktionen als mathematische Objekte, wie sie besonders deutlich mit Kreisels Adaption der Heytinginterpretation verbunden ist, können Konstruktionen sowohl als mentale *Prozesse* wie auch als *Ergebnisse* oder *Resultate* derartiger Prozesse verstanden werden, und beide Möglichkeiten scheinen mit Brouwers Vorstellungen von mathematischer Erkenntnis verträglich zu sein.[24]

Die Unterscheidung ist deshalb von Bedeutung, weil sich Brouwers Konzeption, um eine Erklärung mathematischer und damit eventuell apriorischer Erkenntnis zu leisten, nicht einfach auf einen Bereich unabhängig existierender Konstruktionen als Objekte berufen kann, aus dem der logische Aufbau des Wissens des kreativen Subjekts erklärt werden könnte. Wie Dummett in ähnlichem Zusammenhang bemerkt hat, kann sich die intuitionistische Angleichung von mathematischer Wahrheit an Beweisbarkeit nicht auf ein platonisches Universum ewiger und unvergänglicher mathematischer Beweise verlassen, die von Mathematikern schlicht entdeckt werden könnten, ohne dabei den intuitionistischen Grundüberzeugungen untreu zu werden, die darauf beruhen, dass mathematische Wahrheit *geschaffen* wird.[25] Werden Beweise jedoch als Konstruktions*prozesse* verstanden, dann wird die Heytinginterpretation zumindest fragwürdig, da nicht klar ist, inwiefern beispielweise das Vorhandensein eines Konstruktionsprozesses für A sowie eines Konstruktionsprozesses für B eo ipso bereits dem Vorhandensein eines Konstruktionsprozesses für A&B gleichkommt.[26] Die Formulierung logischer Operationen muss, so scheint es, auf Konstruktionsobjekte als abgeschlossene Entitäten Bezug nehmen, um auch intuitionistisch akzeptable Schlussweisen rechtfertigen zu können.[27]

Auch hier ist eine Beobachtung von Dummett einschlägig. Sie besteht in dem Hinweis, dass bei der intuitionistischen Gleichsetzung von Wahrheit und Beweisbarkeit zwei Beweisbegriffe unterschieden werden müssen. Die Idee, dass die Wahrheit einer mathematischen

---

[23] Vgl. Sundholm (1983).

[24] Siehe hierzu Sundholm (1983), 164f., wo sich auch eine These über Brouwers Konstruktionsbegriff findet.

[25] Vgl. hierzu Dummett (1973), 239.

[26] Auf ein Bedenken dieser Art stützt Detlefsen seinen Einwand gegen die Vereinbarkeit der intuitionistischen Logik mit Brouwers Epistemologie; vgl. Detlefsen (1990).

[27] Dies lässt sich am Beispiel des Modus Ponens in eben der Weise veranschaulichen, die bei der Konjunktionseinführung skizziert wurde. Nur unter der Objektinterpretation ist es plausibel anzunehmen, dass ein Konstruktionsobjekt für A sowie ein Konstruktionsobjekt für $A \rightarrow B$ zu einem Konstruktionsobjekt für B führen.

Aussage ausschließlich in der Existenz eines Beweises dieser Aussage besteht, kann einerseits so verstanden werden, dass damit die Existenz eines tatsächlich durchgeführten Beweises verlangt wird. Sie kann aber auch in dem Sinn genommen werden, dass damit nur die grundsätzliche Beweisbarkeit gemeint ist, die mit der Möglichkeit, einen Beweis zu führen, vorliegt. Im ersten Fall, der Deutung über, wie Dummett sie nennt, kanonische Beweise, ergibt sich unmittelbar, dass intuitionistische Wahrheit nicht abgeschlossen ist unter logischer Folgerung und damit zeitlicher Veränderung unterliegt (eine Aussage kann erst dann wahr sein, wenn sie tatsächlich bewiesen wurde). Im zweiten Fall, bei dem Dummett von ‚Demonstration' spricht, besteht jedoch, gerade um den mit dem ersten Fall verbundenen Schwierigkeiten zu entgehen, eine verhängnisvolle Tendenz, einen von epistemischer Zugänglichkeit weitgehend unabhängig existierenden Bereich potentieller kanonischer Beweise anzunehmen, welche die Rechtfertigung der informellen Demonstrationen bilden. Eine solche Annahme würde jedoch offensichtlich der Brouwerschen Philosophie der Mathematik wie überhaupt jedem konstruktivistischen Grundgedanken zuwiderlaufen.[28]

Hinter dieser Schwierigkeit, die logischen Operationen auf eine Weise einzuführen, die mit Brouwers Erkenntnistheorie vereinbar ist und diese zudem in eine Wissenskonzeption überführt, die eine Erklärung apriorischen Wissens vorbereitet, liegt ein grundsätzlicher Einwand, den Dummett selbst so zwar nicht formuliert, der aber seiner Bedeutungstheorie durchaus entspricht: es ist der Einwand, dass eine solipsistische Rechtfertigung logischer Operationen aus den gleichen Gründen scheitern muss aus denen es, wie Wittgenstein gezeigt hat, keine Privatsprache geben kann.

Daran ist zunächst richtig, dass Dummett die Rechtfertigung der intuitionistischen Logik tatsächlich auf ein bedeutungstheoretisches Argument baut, das in Anlehnung an Wittgensteins Sprachauffassung die Bedeutung eines sprachlichen Ausdrucks an den Bedingungen seines Gebrauchs bzw. seiner Verwendung festmacht und damit auf den öffentlichen Charakter von Sprache abhebt. Dummett geht dabei jedoch nicht von Wittgensteins Privatsprachenargument aus, jedenfalls nicht expliziter Weise, sondern von der allgemeinen Forderung nach epistemischer Transparenz sprachlicher Bedeutung.[29] Diese Forderung wird keineswegs nur von jenen vertreten, die sich im Gefolge Dummetts unter dem Banner des semantischen Anti-Realismus versammelt haben.

Hinsichtlich des öffentlichen und anti-individualistischen und a fortiori anti-solipsistischen Charakters von Sprache stimmt beispielsweise auch Paul Lorenzen mit Dummett überein. Die dialogische Begründung von Logik, die Lorenzen vorgeschlagen hat, hat daher nicht zufällig eine Entsprechung im Umfeld der Dummettschen Bedeutungstheorie.[30]

Gerade an logischen Operationen ist nach Auffassung der Vertreter einer spieltheoretischen Semantik der kommunikative Aspekt entscheidend, eine Haltung, die von Tennant prägnant am Beispiel der Negation verdeutlicht wird:

„Dialogue, not monolgue, is where negation first flourishes." (Tennant [1987], 83)

Um die Eigenschaften der dialogischen Darstellung besser erkennen zu können, betrachten wir kurz eine der gängigen Formulierungen für die intuitionistische Aussagenlogik.

Gegeben seien zwei Spieler, eine Proponent *P* sowie ein Opponent *O*, und ein (dialogunabhängiges) Verfahren zur Ermittlung der Behauptbarkeit (‚Wahrheit') von atomaren Aus-

[28] Vgl. hierzu Dummett (1973), 240f.

[29] Abgesehen davon, dass Sprache erlernbar sein muss, kann es für Dummett grundsätzlich nichts an sprachlichem Bedeutungsgehalt geben, das über das im Verhalten von Sprechern Manifestierbare und damit auch potentiell Erkennbare hinausgeht; vgl. auch hierzu Dummett (1973).

[30] Dialogische bzw. spieltheoretische Formulierungen von Logik wurden dabei vor allem von N. Tennant vertreten, vgl. Tennant (1979), sowie Tennant (1987).

sagen. Die Spielzüge entlang der logischen Operationen werden dann für Dialogspiele wie folgt festgelegt:

(G&) Wenn Proponent *P* eine Aussage der Form (A&B) behauptet, darf Opponent *O* eine der Aussagen A bzw. B wählen, und das Spiel wird mit *O*'s Wahl fortgesetzt;

(G∨) Wenn *P* eine Aussage der Form (A∨B) behauptet, darf *P* eine der Aussagen A bzw. B wählen und das Spiel wird mit *P*'s Wahl fortgesetzt;

(G→) Wenn *P* eine Aussage der Form (A→B) behauptet, wird das Spiel wie folgt fortgesetzt: *O* übernimmt die Verteidigung von A und wenn O gewinnt, dann wird das Spiel mit der Verteidigung von B durch *P* fortgesetzt;

(G¬) Wenn *P*¬A behauptet, wird *O* Proponent und *P* Opponent für A, und das Spiel wird um A fortgesetzt.

Eine Aussage A wird als *wahr* bezeichnet (für eine Wahrheitswertverteilung für atomare Sätze) genau dann, wenn es eine *Gewinnstrategie* für den Proponenten *P* für A gibt. Um die konstruktive Ausrichtung beizubehalten, müssen, in dieser Definition, Gewinnstrategien auf effektive, tatsächlich ausführbare beschränkt werden, die der Proponent als solche erkennen kann.

Lorenzen sieht den Vorzug dieser Art von Semantik, abgesehen von ontologischen Aspekten wie dem Verzicht auf Propositionen oder ähnliche abstrakte Entitäten, vor allem im ‚operationalen' Charakter der Spielregeln, die einen praktischen Bezug, fast möchte man sagen, eine lebensweltliche Verankerung besitzen.[31] Er erblickt darin eine ausreichende Begründung für eine konstruktivistische und speziell die intuitionistische Logik.[32] Von einer grundsätzlicheren Warte aus betrachtet bleibt jedoch genau diese Frage, welche Logik die Eine Wahre sei, insbesondere für dialogische Formulierungen offen. Selbst wenn wir zugestehen, dass die Dialogdarstellung eine gewisse Affinität zu konstruktivistischen Ansätzen zeigt, bedeutet dies keine Auszeichnung der intuitionistischen Logik, da spieltheoretische Semantiken auch, um ein Beispiel zu nennen, für Girards Lineare Logik, die ebenfalls stark konstruktivistisch motiviert ist, vorliegen.[33]

Genausowenig, und hiermit kehren wir zu den Ausgangsüberlegungen zurück, stellt Lorenzens spieltheoretische Semantik selbst ein Argument gegen den Solipsismus dar. Die Heytinginterpretation, die mit einer gewissen Nachsicht als kompatibel mit Brouwers solipsistischer Konzeption mathematischer Erkenntnis gelten kann, ist nicht schon dadurch widerlegt, dass die intuitionistische Logik in anderer Gestalt erscheint. Vielmehr lässt sich einer der Kerngedanken der dialogischen Formulierung plausibel auf eine solipsistische Darstellung rückübertragen, und dies in einer Weise, die einige Aussichten auf eine vielversprechende Konzeption apriorischen Wissens eröffnet. Der Kerngedanke, auf den es dabei ankommt, besteht in den *Verpflichtungen*, die die Dialogpartner in einem Spiel um eine Behauptung eingehen.

6. Die Dialogregeln für logische Konstanten können verstanden werden als die Konsequenzen aus den diskursiven Verpflichtungen, die die Dialogpartner mit der Behauptung einer Aussage von bestimmter logischer Gestalt eingehen. Behauptet der Proponent *P* eine

[31] Vgl. Lorenzen (1959), sowie (1967), 209 ff. Zu den philosophischen Aspekten dieses Programms siehe insb. Roberts (1992), 248 ff.

[32] Lorenzen zeigt natürlich, wie durch Änderung der Regeln für Spielzüge und somit durch Erweiterung der Strategiemöglichkeiten eine dialogische Formulierung der klassischen Logik gewonnen wird. Dies hat er jedoch an keiner mir bekannten Stelle zum Anlass genommen, die grundsätzliche Frage nach der Rechtfertigung einer bestimmten Logik bzw. bestimmter Dialogstrategien zu stellen.

[33] Vgl. Abramsky (1994).

Konjunktion A&B, so verpflichtet er sich, sowohl A als auch B gegen die Einwände bzw. Angriffe des Opponenten *O* zu verteidigen. Die Behauptung der Disjunktion A∨B verpflichtet dagegen nur zur Verteidigung eines der Disjunkte und die Behauptung eines Konditionals schafft eine *bedingte* Verpflichtung zur Verteidigung des Hintersatzes – in Abhängigkeit von der erfolgreichen Verteidigung des Vordersatzes durch den Opponenten, der damit seinerseits eine Verpflichtung wahrnimmt, die sich aus der Teilnahme am Dialog ergibt. Dabei ist klar, dass die Dialoge die Ernsthaftigkeit des Diskurses als eine Suche nach Wahrheit voraussetzen und unwirksam sind für den Fall, dass die Spieler den Dialog in frivoler Absicht, also ohne Interesse an der Wahrheitsermittlung und somit unwahrhaftig, aufnehmen. Weniger klar ist, dass entsprechende Verpflichtungen ihre Gültigkeit nur in Zusammenhang mit Dialogen entfalten können. Vielmehr liegt der Versuch nahe, diskursive Verpflichtungen als einen Sonderfall epistemischer, doxastischer oder vielleicht überhaupt kognitiver Verpflichtungen anzusehen. Eine derartige Auffassung erfordert allerdings in verschiedener Hinsicht eine veränderte Perspektive.

Zunächst müssen wir uns klarmachen, dass der Wunsch nach operationaler Interpretation, der Lorenzens dialogischer Darstellung unterliegt, selbst kein hinreichender Grund sein kann, eine solipsistische Variante, die auf das kreative Subjekt Bezug nimmt, abzulehnen. In Dialogspielen wird der propositionale Gehalt von Aussagesätzen in Sprechakte eingebettet, die bestimmten Regulierungen unterliegen. Dieses Vorgehen entspringt dem konstruktivistischen Wunsch, der epistemischen Neutralität einer Wahrheitsbedingungensemantik zu entgehen. Doch statt auf Sprechakte zu rekurrieren, könnten in noch überzeugenderer Weise Propositionen mit der mit ihnen einhergehenden informationellen Veränderung identifiziert werden. Denn tatsächlich dient eine Aussage zu Zwecken sprachlicher Verständigung der Mitteilung von Information, und sie bewirkt dementsprechend im Regelfall eine Veränderung des Überzeugungszustandes, in dem sich ein epistemisches Subjekt zu einer gegebenen Zeit befindet. Formal betrachten wir Propositionen daher als Funktionen auf einer Menge $\mathfrak{I}$ von Überzeugungszuständen (die wir als gegeben voraussetzen). Dabei ist es unerheblich, worum es sich bei derartigen Zuständen genau handelt. Weil zudem der informationelle Gehalt einer Proposition A sehr wohl bereits Bestandteil eines epistemischen Zustandes i sein kann, sollten wir nicht erwarten, dass die Anwendung von A auf i für diesen Fall einen von i verschiedenen Überzeugungszustand als Funktionswert ergibt; d.h. dass nicht in jedem Fall für $A(i) = j$ $i \neq j$ sein muss. Die Idealisierungen, mit denen oben das kreative Subjekt dargestellt wurde, und insbesondere seine postulierte Irrtumsfreiheit, erlauben es, zu technischen Zwecken, die die Negation betreffen, einen *absurden* Überzeugungszustand anzunehmen – $i^{\perp}$ –, der informell als ‚kognitive Hölle' bezeichnet werden kann und dadurch charakterisiert ist, dass in ihm alles geglaubt bzw. akzeptiert wird. Dabei setzen wir fest, dass eine Proposition A in einem Zustand i akzeptiert wird, wenn $A(i) = i$.

Das Modell, das wir somit für das Folgende zugrunde legen, besteht aus zwei Teilen: einer Menge $\mathfrak{I}$ von epistemischen Zuständen sowie einer Menge $\wp$ von Propositionen als (einstelligen) Funktionen auf $\mathfrak{I}$.[34] Durch logische Prinzipien wird, wie immer, eine Regulierung der Propositionen vorgenommen. Diese erfolgt entlang geeigneter Operationen, welche durch logische Konstanten mitgeteilt werden. Dazu bedarf es der geeigneten Manipulationen der Propositionsfunktionen. Ein naheliegendes Verfahren liefert, in Verbindung mit bestimmten

[34] Details zu dieser Semantik finden sich in Gärdenfors (1988), Chap. 6, sowie in Gärdenfors (1994). Eine frühere Formulierung dieser Art von Semantik, wenngleich für die Relevanzlogik, stammt von N. D. Belnap, vgl. Belnap (1977). Man beachte die anschauliche Nähe der semantischen Regeln zu den entsprechenden Einführungs- und Beseitigungsregeln in einem Gentzenkalkül.

Postulaten, die Konjunktion für zwei Propositionen A und B: die Komposition von Funktionen.

(&1) Für zwei Propositionen A, B gibt es (relativ zu einer Menge $\mathfrak{I}$ von Überzeugungszuständen und einer Menge $\wp$ von Propositionen) stets eine Proposition A&B, so dass $A\&B(i) = A(B(i))$ für beliebiges $i \in \mathfrak{I}$;

Um das erwartete Verhalten der Konjunktion zu gewährleisten, muss Kommutativität sowie Idempotenz zusätzlich gefordert werden:

(&2) Für beliebige A und B und beliebiges $i \in \mathfrak{I}$ ist $A\&B(i) = B\&A(i)$;

(&3) Für beliebiges A und beliebiges $i \in \mathfrak{I}$ ist $A\&A(i) = A(i)$.

Wie anhand dieser zusätzlichen Postulate deutlich wird, sind Alternativen zur herkömmlichen Konjunktion sehr wohl vorstellbar, etwa in Form einer sequentiellen Konjunktion („... und dann ..."), die ohne (&2) und vermutlich ohne (&3) auskommen. Es empfiehlt sich deshalb, das Charakteristische der Konjunktion auf andere Weise zu erfassen, um dadurch zu einer unabhängigen Motivation für Postulate wie (&2) bzw. (&3) zu gelangen. Dies geschieht folgendermaßen: aufgrund der Idealisierungen, die der Theorie des kreativen Subjekts unterliegen, können wir davon ausgehen, dass die epistemischen Zustände des kreativen Subjekts die Struktur einer Halbordnung aufweisen[35], so dass wir sie intuitiv als über die Zeit anwachsend ansehen können (da das kreative Subjekt nichts vergisst und, weil es sich nicht verrechnet, auch keine seiner Einsichten verwerfen muss, können die Informationszustände nicht ‚kleiner' werden). Auch wenn wir nicht unterstellen können, dass beliebige epistemische Zustände hinsichtlich ihres Umfangs vergleichbar sind, können wir uns, technisch gesprochen, dennoch naheliegenderweise einige Verbandseigenschaften für die gewünschte Charakterisierung der logischen Operationen zunutze machen. Am Beispiel der Konjunktion verdeutlicht heißt dies: die Konjunktion von $A\&B(i)$ bedeutet den *kleinsten* von i erreichbaren epistemischen Zustand, in dem sowohl A als auch B akzeptiert werden. Dass es einen solchen Zustand stets gibt (für beliebige A, B), folgt aus den entsprechenden Annahmen über die Struktur der Überzeugungszustände, die das kreative Subjekt durchlaufen kann. Unter der Voraussetzung, dass diese Stadien durch Wissenszuwachs auseinander hervorgehen, ist die Forderung, dass es unter allen Überzeugungszuständen, in denen sowohl A als auch B akzeptiert werden, einen minimalen Zustand gibt, durchaus plausibel. Die verbandstheoretischen Eigenschaften, die dabei herangezogen werden, dienen in analoger Weise auch dazu, andere logische Operationen zu beschreiben. Die Disjunktion $A \vee B$ zweier Propositionen A, B bewirkt die minimale Veränderung eines Überzeugungszustandes i, so dass in $j = A \vee B(i)$ entsprechend der intuitionistischen Auffassung der Disjunktion eine der beiden Propositionen A bzw. B als wahr akzeptiert wird. Das heißt, die Disjunktion $A \vee B$ zweier Propositionen A, B ist eine Funktion D, für die, jeweils für beliebige $i \in \mathfrak{I}$ gilt:

(i) $D(A(i)) = A(i)$ und $D(B(i)) = B(i)$

(ii) für jede Funktion C, welche (i) erfüllt, gilt: $D(C(i)) = C(i)$

wodurch die Disjunktion als die ‚schwächste' Funktion mit der Eigenschaft (i) charakterisiert wird.

In analoger Form ist das Konditional $(A \rightarrow B)$ zweier Propositionen A, B als diejenige ‚schwächste' Funktion interpetiert, die für einen epistemischen Zustand i einen Zustand $A \rightarrow B(i)$ bewirkt, für den eine Änderung um A bereits einer Änderung um B gleichkommt, d.h. $B(A(A \rightarrow B(i))) = A(A \rightarrow B(i))$. Die Negation $\neg A$ wird dann durch Rückführung auf $A \rightarrow \bot$ charakterisiert, wobei die Absurditätskonstante $\bot$ eine Proposition mitteilt, die einen beliebigen Zustand i in die ‚kognitive Hölle' $i^{\bot}$ überführt, d.h. $\bot(i) = i^{\bot}$.

[35] Eine Halbordnung (auf einer Menge M) ist definiert als eine reflexive, antisymmetrische und transitive Relation auf M.

Man sollte sich nicht in falscher Sicherheit wiegen. Auch über eine im Kern epistemische Formulierung ist keine Auszeichnung einer bestimmten Logik möglich, wenn nicht bereits zuvor eine bestimmte Erkenntniskonzeption ausgezeichnet wurde. Dennoch besitzt diese Darstellung einige Vorzüge, die sie im gegenwärtigen Zusammenhang attraktiv erscheinen lassen. So unterstreicht Gärdenfors etwa die Tatsache, dass Propositionen innerhalb des skizzierten Rahmens weitgehend sprachunabhängig verstanden werden können, ein Umstand, aus dem Gärdenfors Nutzen zieht für eine Vermittlung von symbolistischen und konnektionistischen Ansätzen in der Philosophie des Geistes.[36] In unserem Zusammenhang ist diese Eigenschaft willkommen, weil sie erlaubt, den Bewusstseinszuständen oder Erkenntnisleistungen des kreativen Subjekts eine logische Struktur zu unterlegen, die Brouwers Einwänden gegen die Logisierung der Mathematik à la Hilbert Rechnung trägt. Entscheidend ist jedoch, dass die logischen Operationen tatsächlich nur eine bestimmte Art von kognitiven oder epistemischen Verpflichtungen zum Ausdruck bringen, die sich, im Falle der Logik, aus einem Gebot der informationellen Ökonomie herzuleiten scheinen. Betrachten wir hierzu das Beispiel von Konditionalsätzen: ein Konditional A→B bewirkt einen Zustand, für den eine Erweiterung um A gleichbedeutend ist mit einer Veränderung um B. Menschliche Unzulänglichkeit, momentane Verwirrung oder Unaufmerksamkeit, oder jedwede Form psychischer Beeinträchtigung mag faktisch verhindern, dass eine Person, obwohl sie sich bewusst ist, dass A und dass A→B, sich auch bewusst ist, dass B. Aus diesem Grund kann die von Dummett betonte Kluft zwischen kanonischen Beweisen und Demonstrationen als möglichen, aber effektiv in kanonische überführbare Beweise auch nicht geleugnet werden. Es ist jedoch klar, dass es sich dabei zunächst eher um einen Mangel an Übersicht handelt, da in einem derartigen Stadium nicht nur nicht die Möglichkeit der Negation von B prinzipiell ausgeschlossen ist, sondern die Anerkennung von B unmittelbar geboten scheint. Denn entsprechend der Wirkungsweise von Konditionalsätzen hat sich eine Person, die A→B akzeptiert, in einen Zustand bewegt, in dem die Anerkennung von A die gleichzeitige Anerkennung von B bedeutet. Unter einer prozeduralen Konzeption von Wissen kann damit bereits behauptet werden, dass eine Person in einem Stadium, in dem sie von A→B und von A überzeugt ist, auch B weiss. Doch abgesehen von der vielleicht fraglichen Adäquatheit einer solchen Konzeption ist klar, dass unter einer normativen Interpretation logischer Prinzipien eine Person nicht nur berechtigt ist, B zu glauben, sofern sie A und A→B glaubt, sondern sie unter diesen Umständen B auch glauben *sollte*, wenn sie gewisse Rationalitätsstandards ernst nimmt. Sofern aus solchen Standards jedoch tatsächlich gewisse kognitive Verpflichtungen entspringen, müssen diese anders geartet sein als etwa moralische Verpflichtungen, die den Bereich unseres Handelns regulieren. Bevor daher die These plausibel erscheint, dass apriorisches Wissen lediglich kognitive bzw. epistemische Verpflichtungen formuliert, müssen wir die dabei angenommenen Verpflichtungen genauer zu verstehen versuchen.

7. Aufschlussreiche Hinweise über das, was mit epistemischen Verpflichtungen gemeint ist und was sie von anderen Arten von Verpflichtungen unterscheidet, hat Isaac Levi gegeben.[37] Zur leitenden Vorstellung wird dabei, dass ein vertrautes Rationalitätsideal sowohl die Konsistenz als auch die deduktive Abgeschlossenheit der Überzeugungen rationaler Akteure fordert.

> „Thus we are committed to fully believing at every time *t* the truths of logic because we are committed as rational agents to having full beliefs at *t* that are at once consistent and closed under deductive consequence." (Levi [1997b], 41)

[36] Vgl. Gärdenfors (1994).

[37] Vgl. Levi (1997a, b) in Levi (1997), sowie Levi (1991), Chap. 2.

Demgegenüber besteht keine grundsätzliche Verpflichtung, auch jede empirische Wahrheit zu glauben. Wie Levi fortfährt:

> „Insofar as we fail to fulfill this commitment, the defect is in us and we must seek remedies for our deficiencies. Failure to believe the true laws of physics reflects no such defect in our doxastic condition. Indeed, it is often a mark of a healthy mind to be able to acknowledge our ignorance. Removing such ignorance calls for a *change* in doxastic commitment – that is to say, a change from a commitment to one system of consistent and closed beliefs to another such commitment." (ibid.)

Es ist unschwer erkennbar, dass diese Auffassung einem Pragmatismus Peircescher Abstammung verpflichtet ist, demzufolge Überzeugungen nicht zuletzt die Grundlage für erfolgreiches Handeln sind. Erfolgreiches Handeln verlangt nicht Allwissenheit, wohl aber Konsistenz der entsprechenden Überzeugungen, und deduktive Abgeschlossenheit ist zweifelsohne hilfreich. Im Unterschied zu moralischen Verpflichtungen und Geboten stellen logische Grundsätze jedoch Verpflichtungen dar, denen wir faktisch nicht völlig gerecht werden können. Es ist uns schlicht unmöglich, sämtliche logischen Konsequenzen unserer Überzeugungen zu erkennen, oder stets die Widerspruchsfreiheit all unserer Überzeugungen sicherzustellen. Die Diskrepanz zwischen dem Anspruch und der Wirklichkeit erinnert, wie eingangs kurz angedeutet, an das Verhältnis von Kompetenz und Performanz, das in der Linguistik zur Beschreibung der Differenz zwischen grundsätzlicher Sprachbeherrschung und tatsächlich beobachtbarem Sprecherverhalten dient. Psychische und psychologische Beschränkungen verhindern die völlige Angleichung der Performanz an die Kompetenz, obwohl erstere grundsätzlich unerklärlich bleibt ohne Rekurs auf letztere. Die Übertragung auf den normativen Bereich kognitiver Verpflichtungen bedeutet allerdings eine verlagerte Unterscheidung von Verpflichtung und (unzureichender) Erfüllung dieser Verpflichtung. Dass dabei die Verpflichtungen in Kraft bleiben, rührt aus dem Umstand, dass durch Überzeugungszustände Beurteilungsmaßstäbe festgelegt werden bezüglich dessen, was rationale Personen jeweils für (subjektiv) möglich halten und was nicht. Eine Person ist verpflichtet, A zu glauben, wenn sie $\neg A$ nicht für eine ernsthafte (im Unterschied zur rein logischen) Möglichkeit hält. Daraus ergibt sich aus $A \rightarrow B$ und A eine Verpflichtung B zu akzeptieren, weil $\neg B$ unter dieser Voraussetzung keine Möglichkeit mehr darstellt, die doxastisch ernsthaft in Betracht gezogen werden dürfte.

Als Erklärung oder gar Rechtfertigung logischer Grundsätze im eigentlichen Sinne mag dies zunächst unbefriedigend erscheinen, auch wenn der Ansatz, wie in der Formulierung der epistemischen Semantik für die intuitionistische Aussagenlogik durch Gärdenfors deutlich geworden sein sollte, ein leistungsfähiges Konzept darstellt. Doch geht es weniger um die Rechtfertigung logischer Grundsätze als um ihre Einbettung in eine allgemeine Konzeption ‚schwacher' Rationalität, zu der gleichermaßen die Grundsätze subjektiver Wahrscheinlichkeitsabschätzung sowie, auf praktischer Seite, Kohärenzbedingungen für Präferenzen zählen. Als Konzeption ‚schwacher' Rationalität kann dabei eine solche bezeichnet werden, die auf substantielle Forderungen etwa ethischer Ausrichtung verzichtet.[38] Was manchen aus moralphilosophischer Sicht dabei als Manko erscheint, stellt aus erkenntnistheoretischer Perspektive jedoch einen klaren Vorzug dar. Denn der Gewinn dieser Überlegungen besteht darin, dass sie zu regulativen Erkenntnisbedingungen führen, die, ohne im entferntesten psychologisch oder gar biologisch zu sein, jedenfalls selbst nicht propositionaler Natur sind. Die regulativen Bedingungen besitzen eine erkenntnisleitende Funktion, ohne selbst im eigentlichen Sinne eine Erkenntnis darzustellen. Sie sind deshalb nicht mit den für apriori-

[38] Ich denke dabei besonders an die von J. Habermas verfochtene Auffassung, die auf solche Forderungen gerade nicht verzichten möchte.

sches Wissen häufig bemühten ‚notwendigen begrifflichen Wahrheiten' gleichzusetzen, welche zudem nur mit erheblicher Dehnung des begrifflichen Rahmens normativ verstanden werden können.

Auch Brouwers schöpferischer Prozess mathematischen ‚Einsehens' kennt zunächst keine begrifflichen Wahrheiten. Wohl aber finden sich regulative Bedingungen für diesen Prozess. Sie sind, ganz ohne Frage, nicht pragmatisch motiviert und fundieren zunächst nicht Logik, Statistik und Entscheidungstheorie, weil sie ohne instrumentelle Absicht gedacht werden. Insofern bestehen markante Unterschiede zu einer Auffassung, wie sie Levi propagiert. Statt einem Pragmatismus zuzuneigen, zeigt sich Brouwers Philosophie der Mathematik idealistischen Vorstellungen verpflichtet. Dies hindert jedoch nicht, dass auch Brouwers Theorie des kreativen Subjekts zwanglos in einer Weise verstanden werden kann, bei der die regulativen Bedingungen des mathematischen Erkennens als kognitive Verpflichtungen gedeutet werden, denen sich das kreative Subjekt zum Zwecke des Schöpfungsprozesses unterwirft. Mit der Wahrnehmung dieser Verbindlichkeiten entfaltet sich die Mathematik in einem Prozess linearen Wachstums und verwirklicht damit ein Ideal mathematischer ‚Vernünftgkeit'. Für Brouwer handelt es sich bei derartigen epistemischen Verpflichtungen zunächst um die Strukturen eines abstrakten, überindividuellen Bewusstseins, das einem Kantischen Vernunftbegriff entlehnt ist. Ebenso wie dieser Vernunftbegriff nicht nur Unvermeidlichkeiten des Denkens beschreibt, sondern auf dem Wege der Rechtfertigungsfrage auch ein Kriterium für richtiges Erkennen bietet, führt Brouwers Auffassung zu normativen Vorgaben für das kreative Subjekt, die sich in dessen formalisierter Darstellung erkennbar niederschlagen. Die Postulate der Korrektheit sowie der Stabilität setzen gewissermaßen die Standards einer mathematischen Rationalität. Weil die propositionale Erkenntnisform, die Brouwer zufolge die Grundlage mathematischer Erkenntnis ist, in eine propositionale Wissensform überführt werden muss, die dem kreativen Subjekt als Basis für weitere Einsichten zur Verfügung steht, werden die potentiellen Überzeugungszustände des kreativen Subjekts so verstanden, dass die ihnen qua rationalen Zuständen innewohnenden epistemischen Verpflichtungen die Ableitung einer logischen Struktur erlauben, welche eine notwendige Bedingung für propositionales Wissen ist. Brouwer selbst spielt in Abgrenzung zu Hilberts Formalismus die Bedeutung der propositionalen Wissensform, wie Detlefsen zutreffend unterstreicht[39], für die Mathematik herunter, weil sie das Spezifische mathematischer Erkenntnis nicht zur Geltung bringt. Dem widerspricht nicht, pace Detlefsen, mathematisches *Wissen* dennoch, das wie jede andere Erkenntnis mitgeteilt bzw. erinnert werden muss, als propositional anzusehen. Um dies zu gewährleisten, hält sich das kreative Subjekt an epistemische Verpflichtungen, die zunächst durchaus im Rahmen des Brouwerschen Solipsismus gedacht werden können. In diesem Sinne können wir somit sagen, dass eine bestimmte Klasse epistemischer Verpflichtungen, solche, die genügend logische Struktur bereitstellen, um die mathematischen Einsichten des kreativen Subjekts in propositionales Wissen zu überführen, konstitutiv sind für einen bestimmten Bereich apriorischen Wissens – den der Mathematik. In der Mathematik, so können wir Brouwer zu verstehen versuchen, finden damit genau jene epistemischen Verpflichtungen Ausdruck, die die mathematischen Einsichten, die in invarianten Bewusstseinsstrukturen ihre Grundlage haben, erstens leiten und ihnen zweitens propositionalen Ausdruck verleihen.

Diese Interpretation lässt sich in naheliegender Weise in einen Vorschlag für eine, mindestens partielle Charakterisierung apriorischen Wissens überhaupt übersetzen. Der Vorschlag lautet dann: apriorisches Wissen wird durch genau solche Aussagen ausgedrückt, die universelle, d.h. von bestimmten Diskursbereichen unabhängige epistemische Verpflichtun-

[39] Dies der deutliche Tenor in Detlefsen (1990).

gen formulieren, welche sich aus den strukturellen Kriterien für die Rationalität unserer Überzeugungen ergeben und somit unabhängig von spezifischen Inhalten von Überzeugungen bestehen.

Es ist offensichtlich, dass mit diesem Vorschlag zunächst einmal alle analytischen Wahrheiten erfasst werden. Keine Rationalitätskonzeption kommt um die Anerkennung analytischer Wahrheiten herum, die schon aus diesem Grund als kognitive Verbindlichkeiten aufgefasst werden können. Der Rückgriff auf Brouwers Philosophie der Mathematik zeigt jedoch, dass derartige Verpflichtungen nicht nur in analytischen Urteilen resultieren müssen, und der Bereich des erfahrungsunabhängig begründbaren, d.h. apriorischen Wissens somit weiter ist als der Bereich des Analytischen. Beispielsweise könnten epistemische Verpflichtungen auch eine modale Struktur offenbaren, die sich aus dem Bezug auf propositionale Einstellungen selbst ergibt und die Ausdrucksmöglichkeiten einer rein extensionalen Darstellung sprengt.

Es ist allerdings unbestreitbar, dass mit dem genannten Vorschlag nur eine begriffliche Erläuterung, keine Definition apriorischen Wissens vorliegt. Angesichts der eingangs skizzierten Mangellage ist dies jedoch bereits als Fortschritt zu bewerten.

Doch auch mit bescheideneren Anforderungen an eine begriffliche Bestimmung apriorischen Wissens wird der unterbreitete Vorschlag, dieses als propositionale Charakterisierung epistemischer Verpflichtungen anzusehen, kaum auf ungeteilte Zustimmung hoffen können. Denn dieser Vorschlag setzt eine erkenntnistheoretische Ausrichtung voraus, die bislang nur begrenzt Zustimmung finden konnte. Sie besteht, formelhaft gesprochen, darin, die Erkenntnistheorie in einer pragmatischen Wende zu einer kognitiven Entscheidungstheorie umzugestalten. Einen der nach wie vor stärksten Widerstände gegen diese Ausrichtung stellt die traditionelle Gegenüberstellung von Werten und Tatsachen dar, die eine kognitive Entscheidungstheorie zu unterlaufen droht. Unabhängig von diesem Einwand, der mir grundsätzlich auf einer überholten Unterscheidung zu beruhen scheint, ist jedoch klar, dass wir uns damit ein gutes Stück weit wenigstens vom Buchstaben der Schriften Brouwers entfernt haben. Andererseits erfordern Brouwers Arbeiten jedoch nicht nur ein gewisses Maß an exegetischer Hingabe, sondern auch den Mut zur interpretatorischen Aneignung – wie alle große Philosophie.

Literatur:

Abramsky, Samson (1994); Games and Completeness for Multiplicative Linear Logic; in: *Journal of Symbolic Logic* 59 (1994), 543–574

Belnap, Nuel D. (1977); A useful four-valued logic; in: Epstein/Dunn (eds.); *Modern Uses of Multiple-Valued Logic*, Dordrecht 1977, 8–37

Brouwer, L. E. J. (1907); Over de grondslagen der wiskunde; in: Brouwer (1975)

Brouwer, L. E. J. (1912); Intuitionism and Formalism; in: Brouwer (1975)

Brouwer, L. E. J. (1925); Zur intuitionistischen Zerlegung mathematischer Grundbegriffe, in: Brouwer (1975)

Brouwer, L. E. J. (1928a); Mathematik, Wissenschaft und Sprache; in: Brouwer (1975)

Brouwer, L. E. J. (1928b); Die Struktur des Kontinuums; in: Brouwer (1975)

Brouwer, L. E. J. (1948); Consciousness, Philosophy and Mathematics; in: Brouwer (1975)

Brouwer, L. E. J. (1951); *The Cambridge Lectures*; hrsg. v. D. van Dalen, Cambridge 1981

Brouwer, L. E. J. (1952); Historical background, principles and methods of intuitionism; in: Brouwer (1975)

Brouwer, L. E. J. (1975); *Collected Works, Vol.* I; hrsg. v. A. Heyting, Amsterdam 1975

Chisholm, Roderick M. (1979); *Erkenntnistheorie*, München 1979

Chomsky, Noam (1965); *Aspects of the Theory of Syntax*, Cambridge/Mass. 1965

Detlefsen, Michael (1990); Brouwerian Intuitionism, in: *Mind* 99 (1990), 501–534

Dummett, Michael (1973); The philosophical basis of intuitionistic logic, in: Dummett, M.; *Truth and other Enigmas*, London 1978, 215–247
Dummett, Michael (1977); *Elements of Intuitionism*, Oxford 1977
Gärdenfors, Peter (1988); *Knowledge in Flux*, Cambridge/Mass. 1988
Gärdenfors, Peter (1994); How Logic emerges from the dynamics of Information, in: van Eijck, J./ Visser, A. (eds.); *Logic and Information Flow*, Cambridge/Mass. 1994, 49–77
Heyting, Arend (1930); Die intuitionistische Grundlegung der Mathematik, *Erkenntnis* 1 (1930), 106–115
Kitcher, Philip (1980); A Priori Knowledge, *Philosophical Review* 89 (1980), 3–23
Kreisel, Georg (1967); Informal rigour and completeness, in: Lakatos, I. (ed.); *Problems in the Philosophy of Mathematics*, Amsterdam 1967, 138–185
Kripke, Saul A. (1972); *Naming and Necessity*, Oxford 1980
Levi, Isaac (1991); *The Fixation of Belief and its Undoing*, Cambridge 1991
Levi, Isaac (1997); *The Covenant of Reason*, Cambridge 1997
Levi, Isaac (1997a); Rationality and commitment, in: Levi (1997), 1–18
Levi, Isaac (1997b); The logic of full belief, in: Levi (1997), 40–69
Lorenzen, Paul (1959); Ein dialogisches Konstruktivitätskriterium, *Infinitistic Methods. Proceedings of the Symposium on the Foundations of Mathematics*, Oxford et al. 1959, 193–200
Lorenzen, Paul/ Kamlah, Wilhelm (1973); *Logische Propädeutik*, Mannheim 1973
Mackenzie, Jim (1985); No Logic before Friday, *Synthese* 63 (1985), 329–341
Peacocke, Christopher (1976); What is a logical constant?, *Journal of Philosophy* 73 (1976), 221–240
Posy, Carl (1974); Brouwer's Constructivism, in: *Synthese* 27 (1974), 125–159
Ranta, Aarne (1988); Propositions as Games as types, *Synthese* 76 (1988), 377–395
Roberts, Julian (1992); *The Logic of Reflection*, New Haven/London 1992
Russell, Bertrand (1912); *The Problems of Philosophy*, Oxford 1967
Sundholm, Göran (1983); Constructions, proofs and the meaning of logical constants, *Journal of Philosophical Logic* 12 (1983), 151–172
Tennant, Neil (1979); Language Games and Intuitionism, *Synthese* 42 (1979), 297–314
Tennant, Neil (1987); *Anti-Realism and Logic*, Oxford 1987
van Dalen, Dirk (1986); Intuitionistic Logic, in: Gabbay/Guenthner (eds.); *Handbook of Philosophical Logic*, Vol III., Dordrecht 1986, 225–339

Die Naturphilosophie (1830) Hegels und die aristotelische Tradition

Nicolas FÉVRIER (Louvain)

1. Einleitung

Der folgende Aufsatz beschäftigt sich mit dem Problem der Bedeutung des aristotelischen Denkens für Hegels Naturphilosophie, einem Problem, das zu der zentralen Frage nach der Natur der dialektischen Methode überleitet. Diese kann man nicht angemessen beschreiben, ohne Hegels Naturphilosophie vor dem Hintergrund der aristotelischen Tradition zu betrachten. Selbst wenn man ein so verwickeltes Thema nicht unmittelbar behandeln möchte, stellt sich beim Nachdenken über Hegels Naturphilosophie unausweichlich die Frage nach der Rezeption aristotelischen Denkens[1].

[1] Die Literatur konzentriert sich auf Hegels nachträgliche Aneignung von Grundbegriffen der aristotelischen Philosophie wie „dynamis", „energeia" und „entelechia" in den *Vorlesungen über die Geschichte der Philosophie*. Über diese Literatur berichtet Kl. Düsing, Hegel und die Geschichte der Philosophie