

Zur Analysis des Raumes. ¹⁾

Von Aloys Müller in Köln.

I.

Die Philosophie ist bescheiden geworden. Die Zeiten sind vorüber, wo man so naiv glaubte, alles müsse definiert werden, und in einigen formellen und allgemeinen Bestimmungen das Wesen der Sache gefunden zu haben meinte; wo man sich so zufrieden und wohlig innerhalb eines wohlgefügt Systems von Definitionen fühlte, das alles Kleinste und Grösste im Himmel und auf Erden zu umspannen und zu erschöpfen schien. Es ist eines der grossen Verdienste der modernen Zeit, diesen kindlichen Hochmut und diese tatenlose Selbstgenügsamkeit, die sich in ewigen Wiederholungen und rein formellen Verbesserungen gefiel, grausam zerstört zu haben. Wie eine Offenbarung kam die Erkenntnis, dass wir bisher nur wie Spinnen im eigenen selbstgesponnenen Netze sasssen, während draussen die flutende Welt in jedem Sonnenstrahl und jedem Menschenauge, in jeder blühenden Pflanze und jedem Stein unserer spottete. Und grausam war sie, aber heilsam, die Wahrheit, dass die Natur uns noch genau so wie zu des Plato und des Aristoteles Zeiten ihr eintöniges Sphinxrätsel stellt, dass wir nur hier und da an der Oberfläche graben, und all unser Wissen nur Stückwerk ist und immer bleiben wird. Wir müssen darauf verzichten, das Wesen einer Sache in ein paar Worte zu fassen, — als ob wir das Wesen der Dinge überhaupt je begreifen lernten. All unser Forschen geht von aussen nach innen, von der Peripherie nach dem Zentrum, — und es gibt nur einen Punkt im Zentrum, aber unendlich viele auf der Peripherie.

Das Raumproblem hat sich in viele Raumprobleme aufgelöst. Die Frage nach dem „Was?“ ist in nebelhafte Fernen gerückt, wir sind glücklich, wenn uns einige Einblicke in das „Wie?“ gegönnt sind. Dazu kommt noch die Tatsache, dass in die Kategorie dessen, was uns als selbstverständlich erscheint, das Einfachste sowohl wie

¹⁾ Wenn wir nachstehender Abhandlung Aufnahme in den Spalten unserer Zeitschrift gewähren, so bedeutet dies selbstverständlich keine Billigung der darin vorgetragenen Meinungen.
D. R.

das Schwierigste gehören; und wer einmal in stiller Stunde das platonische *ἄρα* am eigenen Geist und Herz verspürt, oder wer auch nur die Geschichte der Philosophie durchwandert hat, wird den Raum ohne Zögern zu dem letzteren zählen. Es ist nicht meine Absicht, all das, was wir an positiv sicherer und allgemeiner Kenntnis des Raumes besitzen, hier darzulegen. Es würde lächerlich wenig werden, etwas Kinderweisheit, die im letzten Grund noch voller Geheimnisse steckt, etwas Tertianerwahrheit, von der man noch nicht weiss, wie weit sie wahr ist. Ich möchte nur einige Probleme besprechen, ein paar Gedanken geben, muss dabei manchmal mehr andeuten als ausführen; vielleicht sind die Erörterungen geeignet, einen Ausblick auf die Tatsache zu geben, dass der Raum philosophisch so unergründlich erscheint wie astronomisch.

Im Folgenden ist teils logisch, teils auch nur psychologisch vorausgesetzt, dass der Raum etwas von den Dingen Verschiedenes, von ihnen unabhängig Existierendes sei, dass er Substantialität besitze. Mir ist, so lange ich denke, unbegreiflich gewesen, wie solche, die die Objektivität der Aussenwelt annehmen, den Raum anders als in diesem Sinne fassen können. Jeder, der voraussetzungslos, ohne von Schulmeinungen hypnotisiert zu sein, Astronomie studiert, muss sich zu jener Ansicht bekennen. Ich habe viele andere Astronomen befragt, und alle haben sie, sobald sie verstanden, um was es sich handelte, mir recht gegeben; manche bezeichneten jene andere Auffassung, die im Raume die Möglichkeit von ausgedehnten Körpern sieht, als ein prächtiges Beispiel für die trostvolle Wahrheit, dass der Humor in der Philosophie noch lange nicht am Aussterben sei. Das ist ein scharfes Wort, aber dass es in der strengsten Fachphilosophie Anschauungen gibt, die dieses Urteil verdienen, das mögen der Solipsismus und Ulricis Lehre vom Wesen des Urteils beweisen.

„Möglichkeit von ausgedehnten Körpern!“ Man nehme einmal an, unser Aetherraum sei begrenzt. Man kann, ohne mit der Astronomie in Widerspruch zu treten (es ist das ja tatsächlich schon behauptet worden), ein zweites Weltall annehmen, das mit unserem Aetherraum in keiner Verbindung steht, von dem also niemals ein Lichtstrahl auch nur zu unseren fernsten Sternen dränge. Was liegt zwischen diesen beiden Universen? — Raum, also die „Möglichkeit von ausgedehnten Körpern“! Da aber das Mögliche nur in dem Gedanken und in den Dingen Existenz hat¹⁾, aber weder Gedanken noch Dinge

¹⁾ Gutberlet, Metaphysik, 3. Aufl. S. 25.

sich dazwischen befinden, so existiert tatsächlich das reine, absolute Nichts zwischen den beiden Universen. Wenn wir einmal bei fortgeschrittener Kultur Fahrzeuge konstruiert haben, die uns von Stern zu Stern tragen, so wird schliesslich jeder Bauer des Sonntags Nachmittags auf einem solchen Weltsegler für 10 Pfennig an die Grenzen des Aetherraumes fliegen können, um das Nichts zu sehen, — oder sage ich besser nicht zu sehen?

Gutberlet antwortet auf den Einwurf¹⁾:

„Die Möglichkeit der Dinge ist nicht ein reines Nichts und auch keine abstrakte Idee, sondern etwas sehr Reales, objektiv Gegebenes, wenn auch nicht Existierendes.“

Ich muss gestehen, dass für mich hier die Philosophie aufhört. Entweder existiert etwas tatsächlich zwischen den Körpern, oder es existiert nichts dazwischen. Das letztere ist ein solcher Ungedanke, dass er nicht widerlegt zu werden braucht, sondern höchstens den Spott verdient, der ihm oben zu teil wurde. Wenn aber das erstere der Fall ist, dann ist dieses Etwas entweder eine Bestimmtheit der Dinge oder etwas Selbständiges. Dass der Raum eine Bestimmtheit der Dinge sei, lehnt Gutberlet mit allen anderen vernünftigen Philosophen ab. Also bleibt doch nichts anderes übrig, als ihm Substantialität beizulegen. Das ist alles logisch so klar, dass nur die allmächtige Hypnose der Schule davon abwenden kann. Alle Ausführungen Gutberlets über den Raum zeigen eine alte, nur zu gut bekannte Inkonsequenz: bald wird die Möglichkeit existent gedacht, bald nicht. Wenn doch unsere Scholastiker sich einmal von der Möglichkeitslehre losmachen könnten; dann wäre schon so unendlich viel gewonnen!

II.

Das Problem der Unendlichkeit des Raumes hat als solches bestanden, so lange das Raumproblem überhaupt besteht; ja vielleicht bevor man sich fragte, was der Raum sei, hat man seine Tiefen zu ergründen versucht. All die staunenswerten Hilfsmittel der Astronomie sind ausser stande, eine direkte Antwort auf die Frage zu geben, ob der Raum endlich oder unendlich sei. Wir sind lediglich auf das Denken angewiesen und können physikalische und astronomische Tatsachen und Schlüsse nur indirekt benutzen. Dass infolgedessen der dichtenden Phantasie ein sehr weiter Spielraum gegönnt wurde, ist ohne weiteres verständlich. Dieselbe beschränkte sich allerdings zu-

¹⁾ a. a. O. S. 226.

meist auf die Gründe, weil in der einfachen Alternative: „endlich“ — „unendlich“ alle Möglichkeiten erschöpft schienen und auch tatsächlich sind. Aber es gab auch Auffassungen, die diese Alternative für unrichtig hielten. Eine der seltsamsten Lehren dieser Art ist jene, die auf demselben Fehler beruht wie die am Schluss des ersten Abschnittes besprochene. Man konnte den Raum nicht für endlich ansehen; denn dann stand man vor der sehr heiklen Frage, wo und was die Grenzen des Raumes seien, und was jenseits dieser Grenzen läge. Man wollte ihn nicht für unendlich erklären aus gewissen theologischen Gründen. So konstruierte man sich denn ein Mittelding, eine potentielle Unendlichkeit, die tatsächlich endlich ist, deren Grenzen aber immer weiter hinausgeschoben werden können.

Dass man damit einen Ontologismus schlimmster Art trieb, sah man nicht ein. Man hatte etwas, was rein im Begriff existiert, — denn die potentielle Unendlichkeit stellt nur eine Beziehung unseres endlichen Vorstellungsvermögens zum aktual Unendlichen dar — in die Wirklichkeit übertragen. Dazu hatte man die gestellte Aufgabe gar nicht gelöst und befand sich noch immer in demselben Widerspruch, in dem man vorhin zu sein glaubte; denn da das potential Unendliche in Wahrheit doch ein Endliches ist, war letzthin dennoch im Sinne jener Alternative entschieden.

Alle Versuche, an dieser Alternative vorbeizukommen, sind gescheitert und mussten scheitern; denn es gibt nur Endliches oder Unendliches. Kann der Raum endlich sein? — Nein; denn dann hätte er Grenzen. Eine Grenze aber kann ihrem Begriffe nach immer nur Raum von Raum scheiden. Eine Grenze des Raumes ist ein logischer Widerspruch. Der Raum kann demnach nur (aktual) unendlich sein. Daran knüpft sich sofort die weitere Frage, wie es denn nun mit dem Weltall im Raume stehe, ob dasselbe nur endliche oder auch unendliche Ausdehnung besitze. Ist die Grenze des Aether-raumes endlich, so müsste sich der Aether schon längst in den leeren Raum verflüchtigt haben; füllte jedoch das Weltall den Raum aus, so ständen wir unter dem Gasdrucke eines unendlichen Universums, wovon aber nichts zu merken ist.

In ein ähnliches Dilemma war Zöllner geraten. Er half sich mit dem Begriffe des vierdimensionalen Raumes, und auch heute ist man sehr geneigt, den Widerspruch, der sich aus der Existenz eines endlichen wie eines unendlichen Raumes zu ergeben scheint, mit Hilfe jenes Begriffes zu heben.

Ich will nun nicht behaupten, dass ich mit den vorhin entwickelten Schlüssen völlig einverstanden bin, also nicht die Notwendigkeit der Existenz eines mehrdimensionalen Raumes postulieren: Die Schwierigkeit betreffs der Aetherausdehnung scheint auf andere Weise gelöst werden zu können, der letztere Schluss beruht auf einer Verallgemeinerung physikalischer Gesetze, deren Berechtigung bisher noch nicht erwiesen ist. Ich muss mich deshalb begnügen, im Folgenden zu zeigen, dass eine gleichzeitige Existenz eines drei- und vierdimensionalen Raumes möglich ist, und dieselbe tatsächlich einen Ausweg aus jenem Dilemma bietet.

Stellen wir uns ein Flächenwesen auf einer Kugeloberfläche vor. Es besitzt nur eine zweidimensionale Anschauung und kann sich mit dem besten Willen nicht darüber erheben. Aber sein zweidimensionaler Raum existiert dadurch, dass er gekrümmt ist, zugleich in einem anderen Sinne als dreidimensionaler, ohne dass jenes Wesen sich dieser Tatsache bewusst ist, oder besser bewusst sein kann. Wir haben nicht das mindeste Recht dazu, unsere dreidimensionale Anschauung als die höchstpotenzierte zu betrachten; man hat es bisher immer naive Kindlichkeit genannt, etwas deshalb zu verwerfen, weil wir es nicht kennen. So zwingt uns der Analogieschluss dazu, die Möglichkeit einer gleichzeitigen Existenz anzunehmen.

Selbstverständlich können wir uns einen vierdimensionalen Raum nicht vorstellen. Aber wir sind dadurch in derselben Lage wie jenes Flächenwesen; auch es würde sich, falls es eines gäbe, einen dreidimensionalen Raum nicht vorstellen können, und dennoch existiert er. Gerade dann, wenn behauptet würde, dass wir uns einen mehrdimensionalen Raum vorzustellen vermöchten, wäre die Lehre falsch. Die absolute Unvorstellbarkeit ist also ein notwendiges Moment des Begriffes und der Möglichkeit einer gleichzeitigen Existenz. Die Vorstellung des vierdimensionalen Raumes ist, um einen sehr verständlichen theologischen Ausdruck zu gebrauchen, eine präternaturale Gabe. Wenn es Flächenwesen gäbe und unter ihnen Philosophen, so würden manche von ihnen wohl genau so philosophieren wie bei uns die Gegner des vierdimensionalen Raumes. Die höher Entwickelten lachen darüber; denn die Natur ist erhaben über Philosophenkapricen. Aber warum halten wir hier inne? Warum besitzen wir nicht den weiten Blick, um denselben Massstab an uns anzulegen? Es kann noch höher Entwickelte geben, die auch über uns lachen. „Die grösste Sünde ist Begrenzung“ (Emerson).

Zwei vielfach gehörten Einwüfen muss ich noch begegnen. Man sagt zunächst, ein Dreieck auf einer gekrümmten Fläche, etwa der Oberfläche eines Eies, würde, wenn es von einer Raumfläche zur andern verschoben würde, in sich eine Verzerrung erleiden; so müsste auch, falls neben unserem dreidimensionalen noch ein vierdimensionaler Raum existierte, jeder Körper bei einer örtlichen Bewegung wegen der dann vorliegenden Krümmung unseres Raumes eine Verzerrung erfahren, die mit unseren feinen Instrumenten unbedingt nachweisbar wäre. Aber das Verhältnis eines bei einer Ortsveränderung sich verschiebenden Dreiecks zur Oberfläche des Eies lässt sich stets durch eine Zahl über Null ausdrücken, dagegen ist das Verhältnis irgend eines irdischen Körpers — und mag er noch so gross sein — zum unendlichen Raum gleich Null. Wäre das Dreieck unendlich klein im Verhältnis zur Oberfläche, so würde es auch keine Veränderung in sich erfahren. Ganz ohne Halt ist allerdings der Einwurf nicht, was aber schon Riemann und Helmholtz bemerkt hatten. Beide halten es nämlich für möglich, dass an den zur Parallaxenbestimmung in den Raum gelegten ungeheuren Dreiecken eine Verschiebung unter dem Einfluss des als existent vorausgesetzten vierdimensionalen Raumes konstatiert werden könne, wenn es einmal gelingen sollte, eine grössere Standlinie zu erhalten, als es die Verbindungslinie von Aphel und Perihel der Erdbahn ist.¹⁾

Der zweite Einwurf betont den auf den ersten Blick überraschenden Gedanken, dass man, wenn man einen vierdimensionalen Raum für möglich hielte, die Möglichkeit der Räume von fünf, sechs, sieben, ja unendlich vielen Dimensionen nicht leugnen könne, dass es aber offenbar ein Unsinn sei, die tatsächliche Existenz dieser Räume zu behaupten. Allerdings wäre dies unsinnig, aber es hat kaum ein namhafter Vertreter der Metageometrie diese Behauptung aufgestellt. Ich gebe zwar zu, dass die Verallgemeinerungen der Mathematiker (sie sprechen z. B. von einer n -fach ausgedehnten Grösse — ein Begriff, der aber genau so berechtigt ist wie $\sqrt{-1}$) und die nicht sehr glückliche Terminologie die irrige Auffassung und Konsequenz der

¹⁾ Es hat jemand die anscheinend höchst geistreiche Frage aufgeworfen, ob es nicht auch eine vierdimensionale Zeit geben könne. Aber hier versagen sowohl die Analogieschlüsse aus dem Verhältnis der Zeiten niederer zu solchen höherer Ordnung, wie auch die Analogie mit dem Raum; denn die Zeit besitzt nur eine Dimension. Man muss beachten, dass der Raum mehr sinnlich, die Zeit mehr geistig ist.

Gegner erklärlich machen. Aber ein genaues mathematisches Verständnis der Sache hätte ihnen sagen können, dass nur die Ueber-eilung und eine etwas oberflächliche Betrachtung nach der Zahl der Dimensionen jenen Schein der Willkürlichkeit bei den Anhängern der Lehre finden lassen. Der Kern der neuen Raumlehre liegt darin, dass sie den Raum, der bisher als eben betrachtet worden war, nun als gekrümmten auffasst. Eine höhere Form als der gekrümmte dreidimensionale Raum lässt sich aber nicht denken. Da übrigens, wie ich vorhin schon bemerkte, der Ausdruck vier- oder mehr-dimensionaler Raum die irrige Deutung erleichtert, so wäre es wohl wünschenswert, wenn die Terminologie neuerer Mathematiker accep-tiert würde, die den ebenen Raum zweidimensional, den ge-krümmten dreidimensional nennen.¹⁾ Ich habe die alte Bezeichnung beibehalten, um nicht noch grösseren Missverständnissen ausgesetzt zu sein, als ich jetzt schon befürchte.

Sehen wir nun zu, wie die Annahme einer gleichzeitigen Existenz des drei- und vierdimensionalen Raumes das Problem der Unendlich-keit des Raumes prinzipiell löst.

Ein Raum kann in zweifacher Weise begrenzt sein: einmal so, dass Raum in einem Sinne von Raum in demselben Sinne geschieden ist, fürs andere so, dass Raum in einem Sinne von Raum in einem andern Sinne geschieden ist. Das wird uns durch eine einfache Ueberlegung klar. Stellen wir uns eine Kreislinie in einer Fläche vor. Ein vierdimensionales Wesen könnte in alle Ewigkeit seinen ein-dimensionalen Raum der Kreislinie durchmessen, ohne an ein Ende zu kommen. Trotzdem ist die Kreislinie begrenzt, aber nicht in sich, sondern vom zweidimensionalen Raum begrenzt. Denken wir uns weiterhin ein Flächenwesen auf einer Kugeloberfläche. Auch dieses würde ewig in seinem zweidimensionalen Raum fortschreiten können, derselbe ist ebenfalls nicht in sich, sondern nur vom dreidimensionalen Raum begrenzt. Ein Raum kann also in dem einen Sinne endlich, in dem andern unendlich sein. Es ist genau so möglich, dass wir beim Fortbewegen im dreidimensionalen Raum nie zu Ende kommen

¹⁾ Die Terminologie darf nicht verwechselt werden mit Helmholtz' Unterscheidung des sphärischen, pseudosphärischen und ebenen Raumes, die nach ihm alle berechenbare dreidimensionale Räume mit konstantem Krümmungsmass sein können. Es ist überhaupt einer der folgenschwersten Fehler bei diesem Problem gewesen, dass man philosophische und mathematisch-analytische Er-örterungen konfundierte.

könnten, dass derselbe keine Grenze an sich, sondern nur eine solche an dem oder durch den vierdimensionalen Raum besitzt. Unser Raum kann, kurz ausgedrückt, dreidimensional unendlich, vierdimensional endlich sein („Man hat mit Recht die Unendlichkeit unter dem Bilde des Kreises vorgestellt“. Hegel, Rechtsphilosophie).

Die Zahl der Weltkörper wäre in einem solchen Raume endlich, würde aber den ganzen Raum füllen. Wir kämen beim Fortschreiten niemals weder an eine Grenze des Raumes, noch an einen leeren Raum.

Das ist die einfachste und schönste Lösung jenes Problems, die ich kenne. Ich will sie nicht als wirklich, sondern nur als möglich hinstellen; sie stösst auf Schwierigkeiten wie jede andere Lösung, allerdings weniger auf Schwierigkeiten in der Sache selbst als in den Voraussetzungen dazu. Es wäre jedoch zu bedenken, ob in der Lösung selbst nicht ein starkes Präjudiz für ihre Wirklichkeit liege. Sie klärt zugleich eine kosmogonische bzw. kosmothanische Frage, indem sie, wie unmittelbar einleuchtet, den Widerspruch aufhebt, den man in der Anwendung des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie auf ein unendliches Universum fand.

Wenn einmal in fernster Zukunft durch Parallaxenbestimmungen der Nachweis einer tatsächlichen gleichzeitigen Existenz des drei- und vierdimensionalen Raumes erbracht würde, so wäre damit zwar nicht die Lösung, wohl aber die Berechtigung zu einer anderen Frage an die Hand gegeben, der Frage nämlich nach der Beweglichkeit des Raumes. Es ist klar, dass diese Frage ganz ohne Sinn ist, wenn nur ein unendlicher dreidimensionaler Raum existiert, obgleich sie auch unter dieser Voraussetzung schon aufgeworfen wurde. Wenn wir uns aber der früher gebrauchten Vorstellungen einer Kreislinie in einer Fläche und einer Kugeloberfläche in dem dreidimensionalen Raum erinnern wollen, so sehen wir ein, dass Verschiebungen, Verlegungen von Räumen niederer Ordnung in solchen höherer Ordnung möglich sind, ohne dass Veränderungen in den ersteren vor sich gehen oder ev. Bewohner sich der Bewegung unmittelbar bewusst würden. Da natürlich die Konstatierung einer solchen Bewegung durch Koordination in den Räumen höherer Ordnung erfolgt, so wird es uns wohl nie vergönnt sein, die Bewegung unseres dreidimensionalen Raumes im vierdimensionalen festzustellen, falls die gleichzeitige Existenz bewiesen wäre. Ich halte jedoch soviel von der Unendlichkeit des Menschengenies und den wunderbaren, geheimnisvollen Beziehungen in der Schöpfung, dass ich die absolute Möglichkeit einer solchen

Konstatierung für den Fall jenes Nachweises nicht schlechthin leugnen möchte. Es erscheint übrigens bemerkenswert, dass die uralte Auffassung vom Raume als einer Art Gefäß, in dem die Körper schwimmen wie die Fische im Wasser, allerdings in einem andern Sinne, als sie in den naiven Menschenverstand einging, von einer Richtung der modernen Wissenschaft wieder aufgenommen worden ist.

Die tiefsinnigen Spekulationen, die von Newton an bis auf Liebmann über den sog. absoluten Raum angestellt worden sind, werden zunächst weder durch den Beweis der gleichzeitigen Existenz noch den der Bewegung unseres Raumes tangiert; denn die Frage, ob die Bewegung eines einzigen Körpers im dreidimensionalen Raum für unsere dreidimensionale Anschauung festgestellt werden kann, hat schlechterdings nichts mit dem Problem der Räume höherer Ordnung zu tun, wenn man nicht gerade auf dem Standpunkt steht, dass die Existenz eines Weltachsensystems, Neumann's Körper *Alpha*, in einem nicht gekrümmten unendlichen Raume unmöglich sei. Eine andere Frage wäre allerdings, ob und wie dieses Weltachsensystem oder der Körper *Alpha* durch die ev. Verschiebung unseres dreidimensionalen Raumes bzw. das vierachsige Koordinatensystem mitbestimmt wäre, eine andere Frage auch, ob das Trägheitsgesetz unter allen Umständen seine Giltigkeit behält, oder ob es durch ein die Bewegung in der vierten Dimension regulierendes analoges Gesetz begrenzt wird. Doch hier muss auch die kühnste Phantasie mutlos Anker werfen.

(Schluss folgt.)