

Die Bedeutung der mathematischen Untersuchungen Couturats für die Logik.

Von Joseph Schnippenkötter in Duisburg.

I.

1. Kant behauptet in der Vorrede zur zweiten Ausgabe seiner „Kritik der reinen Vernunft“¹⁾, als er davon spricht, „ob die Bearbeitung der Erkenntnisse, die zum Vernunftgeschäfte gehören, den sicheren Gang einer Wissenschaft gehe oder nicht“, von der Logik folgendes: „Dass die Logik diesen sicheren Gang schon von den ältesten Zeiten her gegangen sei, lässt sich daraus ersehen, dass sie seit dem Aristoteles keinen Schritt rückwärts hat tun dürfen“, und weiter, „dass sie auch bis jetzt keinen Schritt vorwärts hat tun können und also allem Ansehen nach geschlossen und vollendet zu sein scheint“. Diesen Vorteil habe die Logik ihrer „Eingeschränktheit“ zu verdanken.

Wenn man nun heutzutage mehr noch als früher — denn der zitierte Ausspruch Kants wurde gleich angezweifelt — behauptet, dass nicht nur neue logische Lehren, die „mehr zur Eleganz als zur Sicherheit der Wissenschaften gehören“, hinzugekommen seien, sondern dass die Logik einer bei weitem tieferen Grundlegung und eines umfassenderen Ausbaues nicht nur fähig sei, ja diese Umgestaltung der Logik auch schon tatkräftig eingesetzt habe, so wird es zuerst notwendig sein, den Begriff der Logik zu präzisieren und die Fundamente der alten Logik klar zu stellen, um dann zu zeigen, durch welche Umstände, durch welche Forschungen und Fortschritte in den Wissenschaften man sich genötigt sah, die alte Logik einer durchgreifenden Revision zu unterziehen, und so darzulegen, worin der Unterschied erstens in den Grundlagen selbst liegt und zweitens in der naturnotwendigen Aufrichtung bzw. Erweiterung des Gebäudes dieser Wissenschaft, die selbst wieder das Fundament aller Wissen-

¹⁾ J. Kant, Kritik der reinen Vernunft (herausgegeben von Kehrbach, Leipzig, Reclam) 12.

schaften sein soll. Auf diese Weise nur ist das Wesen der neuen Logik klar zu erkennen. Und wenn die Bedeutung der mathematischen Untersuchungen Couturats für die Logik eine Darstellung erfahren soll, so ist dies nur möglich, wenn wir unser Thema in den weiteren Rahmen der historischen Darstellung der Entwicklung der Logik einspannen, so dass das Werk des einzelnen als Organ an dem grossen lebenden Körper perzipierbaren Geisteslebens zu verstehen ist, das erst als Teil des Gesamtkörpers lebt und verständlich wird.

2. Wenn auch wegen der ungeheueren Schwierigkeit, eine Wissenschaft zu definieren, d. h. die Grenzen, in unserem Falle der Logik, genau abzustecken und eine Gebietsvermischung zu vermeiden, manche Logiker der Versuchung unterlagen und nicht nur unbewusst, sondern bewusst eine (natürlich nicht in ihrem Sinne) unklare Begriffsbestimmung in logicis sogar zum Prinzip erhoben, so scheint mir aber trotz alledem Kants Ausspruch wahr zu sein: „Es ist nicht Vermehrung, sondern Verunstaltung der Wissenschaften, wenn man ihre Grenzen ineinanderlaufen lässt“¹⁾.

Die Logik hat die Aufgabe, eine Erklärung und wissenschaftliche Darstellung des Ursprungs der Regeln des Denkens zu geben, ihre Beziehungen zu anderen Tätigkeiten des Geistes zu präzisieren und dann die verschiedenen Arten und Formen des Denkens, das ist des Weges, der zur Erkenntnis der Wahrheit führt, aufzuzählen und darzulegen. Ziel der Logik ist also, der Erkenntnis der Wahrheit zu dienen, und zwar auf dem Wege des reinen Denkens zu notwendigen und allgemein gültigen Urteilen, d. h. zu wahren Urteilen zu gelangen.

Nicht soll hiermit eine scharfe Definition der Logik gegeben sein, da es ganz unmöglich ist, in wenigen Worten den Begriff der Logik auf einen adäquaten Ausdruck zu bringen; wohl fast jeder legt dem einen oder anderen Terminus einen verschiedenen Sinn bei, oder er will diese oder jene Seite mehr in den Vordergrund gerückt wissen und ist geneigt, sie als wahres Wesen der Logik auszugeben: es sollte nur angedeutet sein, was gemeint ist und was man im grossen allgemeinen unter Logik versteht. Des weiteren soll nicht kritisch entschieden werden, ob die Logik eine normative oder theoretische Disziplin ist, ob ihre Grundlagen und Voraussetzungen der Psychologie oder Metaphysik zu entnehmen sind oder keiner von beiden, ob sie apriorischen oder empirischen Charakter besitzt, ob

¹⁾ J. Kant, Kritik der reinen Vernunft 13.

sie „formal“ oder „material“ ist; wir wollen kurz historisch die Hauptvertreter der Logik betrachten, in grossen Zügen ihre Entwicklung verfolgen, um dann näher auf den Einfluss der modernen Mathematiker, speziell Couturats, für die Logik einzugehen und hieraus das Werden und das Wesen der neuen Logik zu erkennen.

3. a. Der Begründer der Logik als Wissenschaft, Aristoteles, baut seine Logik auf seiner metaphysischen Weltanschauung auf, die im Gegensatz zu Platos Ideenlehre und seinem Begriff der Erkenntnis des Seienden darin besteht, dass er nicht wie Plato eine von den empirischen Dingen getrennte Existenz des allgemeinen Artbegriffs, der „Idee“, und ihrer Beziehungen annahm, in folgedessen Plato keinen anderen Weg der Erklärung der Erkenntnis des wahrhaft Seienden einschlagen konnte, als dass er die Seele mit angeborenen Begriffen ausstattete, deren sich die Seele im gegebenen Falle dann nur erinnerte, — sondern dass Aristoteles die Wesenheiten der realen Objekte als in den Sinnesdingen selbst existierend forderte und die der Materie immanenten Ideen als Entelechien oder Formen der Dinge bezeichnete. Aus dieser Anschauung des Aristoteles folgert konsequent das Recht der Induktion (im alten Sinne), die darin besteht, aus den verschiedenen individuellen, empirischen Objekten das Zufällige, Unwesentliche zu beseitigen und den klaren, begrifflich allgemeinen Gegenstand aus den verschiedenen Einzeldingen herauszuschälen. Die Möglichkeit dieser Erkenntnis ergibt sich aus der den Einzelobjekten innewohnenden und also auch empirisch zugänglichen Wesenheit des Allgemeingültigen.

Neben dieser ersten Annahme der Aristotelischen Erkenntnislehre besteht aber noch die zweite, dass die Induktion nicht den allgemeinen Artbegriff erzeugt; denn da die gemeinsamen Merkmale immer in der Sphäre des sinnlich Wahrnehmbaren blieben, käme man nie aus der Empirie heraus, käme man nie zu Urteilen über die realen Gegenstände, die über die Erfahrung hinausgehen. Aristoteles nahm daher noch den *νοῦς ποιητικός*, eine geistige Energie, an, die unter Mitwirkung der Erfahrung in uns die Bildung des wissenschaftlichen Artbegriffs bewerkstelligt.

Auf diesen Grundlagen nun baut Aristoteles seine Logik auf. An die Spitze seines Systems setzt er den allgemeinen Artbegriff; die höchste Wirklichkeit ist die Substanz. Um die objektive Gültigkeit und Gewissheit der Urteile zu untersuchen, die der Mensch auf Grund seines natürlichen Instinktes bildet, löst er dieselben in

Begriffsverhältnisse auf; seine Logik ist eine *ἀναλυτικὴ τέχνη*, eine Kunst der Zerlegung. Die Beziehung von Subjekt und Prädikat ist ihm entweder eine logische Immanenz des Prädikates im Subjekt, oder das Subjekt subsumiert unter den Prädikatsbegriff. So ist die Denkform des Aristoteles, die allein apodiktische Gewissheit ergibt, der Syllogismus, der schliesslich es nur mit dem Über- und Unterordnen zweier Begriffe und Urteile, mit der Subsumtion von Inhalten zu tun hat; und zwar sind die Prämissen dieser Syllogismen gegründet auf des Aristoteles metaphysische Anschauungen von den realen Wesenheiten der Gegenstände.

b. Im wesentlichen übernahmen die Scholastiker die Aristotelische Auffassung der Logik. Die Wahrheit der Urteile über die meist transzendenten Gegenstände stand ihnen auf Grund einer anderen Erkenntnisquelle fest, und ihre hierauf sich stützenden Argumentationen nahmen einen so scharfsinnigen und überzeugenden Ausdruck an, dass sie für Jahrhunderte massgebend sein konnten.

c. Selbst Kant stand unter dem Einfluss des bewunderungswürdigen Lehrgebäudes der Aristotelisch-scholastischen Logik, und wenn man sieht, meint Couturat, dass Kant sich der alten scholastischen Logik sogar als eines Führers und eines Entdeckungsmittels bedient, „so bleibt man beschämt bei dem Gedanken, dass der grosse Kritiker ohne Kritik die Grundlagen seines ganzen Systems angenommen hat, dass dem majestätischen (aber allzu künstlichen und symmetrischen) Gebäude der drei Kritiken der unentbehrliche Unterbau, d. h. eine moderne und wahrhaft wissenschaftliche Logik fehlt, und dass mit einem Worte der eherne Koloss auf tönernen Füßen ruht“¹⁾.

Doch bedarf der Unterschied der Kantschen Logik von der Aristotelischen noch der Hervorhebung. Er wurzelt in der grundverschiedenen Auffassung beider vom Begriff der Erkenntnis. Unser Denken richtet sich nach Aristoteles nach den uns vorgegebenen Gegenständen, vorgegeben nach Inhalt, Materie und nach Form, nach den ihnen immanenten Beziehungen, Verkettungen, Verknüpfungen. Nicht so Kant: ihm sind die realen Aussendinge als ein Chaos von Gegenständlichkeiten gegeben, in welche Ordnung zu bringen Aufgabe unseres Verstandes ist. Die Denkfunktionen haften unserem Verstande an; mittels ihrer benutzen wir die uns a priori gegebene Möglichkeit zu verknüpfen, in Beziehung zu setzen, für die Dinge

¹⁾ L. Couturat, Die philosophischen Prinzipien der Mathematik (übersetzt von Carl Siegel, Leipzig 1908) 322.

und gelangen so durch die ordnende Tätigkeit unseres Verstandes, dessen Regeln und Begriffe wir in die Dinge hineinversetzen, zur Wahrheit der Erkenntnis. Was Kant nun unter Logik versteht, ist nicht schwer einzusehen. Seine allgemeine Logik abstrahiert von aller Materie; Forschungsinhalt derselben ist ihm allein der Komplex von Regeln, Denkformen, nach denen sich mit Notwendigkeit unser Verstand betätigt, und durch die der gesamte Inhalt der uns durch die Sinne gegebenen Erkenntnisgegenstände seine Form erhält. Kants Einteilung der Logik und Unterscheidungen dürfen wir füglich übergehen. Ebenso sei es uns erspart, die mannigfachen übrigen Systeme der Logik zu erwähnen, die im wesentlichen mehr oder weniger auf die oben skizzierten Grundanschauungen sich aufbauen.

Doch müssen wir eines Momentes, das sich als Schlüssel zum Verständnis für die Vertiefung und Erweiterung der Logik durch die Mathematik erweist, noch gedenken. Couturat spricht in der Einleitung seines Buches *„De l'Infini mathématique“*¹⁾ von dem Verhältnis der Einzelwissenschaft zur Philosophie: jede von beiden habe ihr eigenes Gebiet und ihre eigene Aufgabe; und wenn miteinander auch die Versuchung für die eine Disziplin nahe, dass sie auf das Gebiet der anderen übergreifen wolle, und das Bestreben sich geltend mache, sich gegenseitig zu verdrängen, so könnten sie sich aber nie ersetzen und würden es auch niemals können. Aber, so betont Couturat weiter, daraus folge durchaus nicht, dass die Einzelwissenschaften von der Philosophie unabhängig wären, dass sie sich ungestraft trennen könnten. Ganz im Gegenteil: könne die Philosophie nie die Einzelwissenschaften entbehren, denn sie fände in ihnen ihren durchaus notwendigen Inhalt und ihre natürliche Nahrung²⁾. Die ganze Geschichte der Philosophie könne dies dartun; alle Philosophen von Aristoteles bis Kant haben als Gegenstand ihrer Spekulationen die Wissenschaften betrachtet, wie sie zu ihrer Zeit existiert haben, und ihnen das „Material“ ihrer Systeme entlehnt. Seit einem Jahrhundert ungefähr aber habe sich dieses Verhältnis erheblich geändert; die Philosophie scheine sich von den Einzelwissenschaften losgesagt zu haben, und die Fortschritte derselben habe sie unbehelligt gelassen. Die Philosophie habe die physische Welt verlassen und sich auf das Studium des Geistes einschränken

¹⁾ L. Couturat, *De l'Infini mathématique*, Paris 1896, VII ss.

²⁾ Man vergleiche die ähnlichen Gedanken bei Karl Sentroul, *Was ist Neu-scholastische Philosophie?*, Münster 1909, 16 ff.

lassen; sie habe geglaubt, sich in einem besonderen Gebiet (domaine à part), der geistigen Welt, einschliessen lassen zu können und dort Gesetze auf eine eigene Methode, der „introspektiven Betrachtung“, zu entdecken. Nicht so sei es früher gewesen, erst recht nicht im 17. Jahrhundert, von dem Couturat sagt, dass niemals die Verbindung der Einzelwissenschaften mit der Philosophie inniger und fruchtbarer gewesen sei, als in diesem bewunderungswürdigen 17. Jahrhundert (que dans cet admirable XVII^e siècle), in dem alle Denker in den Wissenschaften bewandert und in der Mathematik beschlagen gewesen seien, und wo die grössten Metaphysiker die Erfinder der Analysis und der Infinitesimalrechnung wurden, d. h. die Begründer der modernen Wissenschaft.

d. Wir kommen zu Leibniz. Und wenn Couturat sein grosses Werk über Leibniz „*La Logique de Leibniz*“ verfasste, so geschah dies, um an einem historischen Beispiel die ungeheuere Fruchtbarkeit der engsten Verbindung zwischen der Philosophie und den Einzelwissenschaften, hier der Mathematik, zu beleuchten. In dem kurzen geschichtlichen Ueberblick über die Hauptauffassungen der Logik ist also noch Leibniz zu erwähnen, den ich an letzter Stelle eben deshalb hervorhebe, weil die neuesten Forschungen über Kant hinaus auf Leibniz zurückverweisen, und ein Verständnis der modernen Logik durch Kenntnis der Auffassungen Leibniz' wesentlich erleichtert wird. Leibniz' ganze Metaphysik der Monadenlehre beruht auf seiner Logik; Leibniz' berühmte Lehre von der prästabilierten Harmonie ist nichts als eine Entwicklung der Formel, die die logische Bedingung jeder Wahrheit ausdrückt: omne praedicatum inest subiecto. Ausserordentlich kühn erscheinen seine Gedanken von der universellen Logik, der universellen Sprache, der universellen Mathematik. Die moderne Logik, vom gleichen Prinzip beseelt, hat seinen Gedanken von der allgemeinen Charakteristik wieder aufgegriffen. Leibniz versuchte eine allgemeine Wissenschaftslehre auf Grund symbolischer und mathematisch formulierter Ausdrucksweisen der Grundbegriffe der Erkenntnis und der zwischen ihnen möglichen Beziehungen zu begründen. Doch schlug die Ausführung seiner Ideen fehl; der fruchtbare Boden der Leibnizischen Entdeckung zeitigte nicht den Erfolg, den sie verdient hätte. Trotz der als richtig erkannten Grundlage stand Leibniz selbst doch noch so unter Aristotelisch-scholastischem Einfluss, dass es ihm nicht gelungen ist, er es auch nicht gewagt hat, seine Entdeckungen bis zu dem Punkte durchzuführen,

wo er mit den modernen Reformatoren der Logik zusammen gekommen wäre, d. h. bis zur Relationslogik, deren Möglichkeit er dennoch geahnt hat. „Couturat bezeichnet es als einen grundlegenden Mangel an Leibniz' Logik, dass sie prinzipiell auf Urteile der Prädikation und dementsprechend auf blosser Umfangsrelationen eingeschränkt bleibe“¹⁾.

e. Doch welches sind nun die Fortschritte in der Mathematik, besonders im 19. Jahrhundert, die so erfolgreich die Logik beeinflusst haben? Auf fast allen Gebieten der Mathematik hat mit Urgewalt die Bewegung eingesetzt. Die Infinitesimalrechnung, der seit ihrer Entdeckung durch Newton und Leibniz immer etwas Unsicheres und Geheimnisvolles anhaftete, erfuhr, besonders durch Weierstrass, eine feste Basis durch seine strenge Theorie von den Grenzwerten. Die Funktionentheorie wurde durch Riemann, Weierstrass und durch mehrere Franzosen gereinigt und vertieft, von dem Vorurteil der Anschauung befreit und als rein logische Theorie begründet. Dieselben Klärungen machte vor allem die Geometrie durch dank der Untersuchungen Riemanns, Bolyais, Lobatschewskys, von Staudts, Steiners, Peanos usw. Die Entdeckung mehrerer in sich völlig logisch aufgebauter und ausgebaüter Geometrien, die in ihren Resultaten konträre Aussagen machen, war vom grössten Einfluss auf die Forschungen über die philosophischen Grundlagen der Mathematik. Auch die Mechanik und ihre Prinzipien gewannen an Bedeutung, wenn auch die Ergebnisse ihrer Untersuchungen noch nicht so zufriedenstellend und klar sind, wie in der Geometrie; sie sind noch nicht abgeschlossen. Vor allem aber brachte Licht in die die Fundamente der Mathematik durchwühlende Arbeit das Auftauchen zweier neuer Theorien von weittragender Bedeutung: der Mengenlehre und der Gruppentheorie. Mit der Mengenlehre ist der Name Georg Cantors, mit der Gruppentheorie der Sophus Lies' unlöslich verknüpft. Die Mathematiker erkannten den Wert und die Tragweite ihrer Entdeckungen nicht nur für die Mathematik, sondern auch für die Philosophie. Sie begannen zu verallgemeinern; die „Algebra der Logik“ war ein Arbeitsgebiet der Mathematiker in England, Frankreich, Italien und Deutschland. Ob die zum Teil nicht oder wenig philosophisch geschulten Köpfe mit ihren über den Bereich der Mathematik hinausgehenden Anschauungen den Anforderungen

¹⁾ E. Cassirer, Leibniz' System in seinen wissenschaftlichen Grundlagen, Marburg 1902, 548.

der wissenschaftlichen Philosophie immer stand zu halten vermögen, soll hier nicht untersucht werden.

Die Philosophie hielt sich noch fern von den mathematischen Errungenschaften, aber dank der Bemühungen der Mathematiker „erwachte auch die Logik“, wie Couturat sagt, „aus ihrer jahrhundertelangen Erstarrung“. Die Geometrie hat sich von Euklid lossagen können, nicht aber die Logik von Aristoteles¹⁾. Und dies war es gerade, was sich Couturat zum Ziel gesetzt hat, die Erfolge der neueren Mathematik weiteren philosophischen Kreisen zugänglich zu machen. Couturats Bedeutung liegt weniger in mathematischen Untersuchungen, als in der Zusammenfassung und kritischen Verwendung derselben für die Logik.

II.

Welches sind nun im einzelnen die Hauptpunkte dieser mathematischen Errungenschaften? Und welche Bedeutung haben dieselben für die Logik?

1. Vor allem ist die moderne Definition der Mathematik von weittragender Bedeutung für die Logik geworden. Die alte Auffassung vom Wesen der Mathematik als der Wissenschaft von der Grösse hat man einmütig verlassen. Auch die Definition als die Wissenschaft von der Zahl ist aufgegeben, einerseits, sofern man den bis dahin üblichen Zahlbegriff meint, und andererseits, weil die Mathematik sich eine willkürliche Beschränkung auferlegen würde, deren Falschheit durch die Tatsache grosser unzweifelhaft mathematischer Theorien erwiesen ist. Wenn A. Voss in seiner Akademie-rede über das Wesen der Mathematik vom 11. März 1908 sagt, dass die reine Mathematik die Wissenschaft von den Zahlen sei, und dass er in der Zahlenlehre das eigentliche Wesen der Mathematik sähe, so dürfen wir nicht vergessen, dass Voss nicht den alten Begriff der Zahl als einer Art von Grösse aufrecht erhält, sondern er unter „Zahl“ etwas anderes versteht; „Zahlen sind aber von uns geschaffene Zeichen für ordnende Tätigkeiten unseres Verstandes, die sich nach bestimmten allgemeinen Regeln miteinander verknüpfen lassen“²⁾. Allgemein aufgegeben aber hat man die alte Antwort, die Mathematik sei die Wissenschaft von den Grössen. Gibt es doch ganze Zweige der Mathematik, wo von der Beziehung des Kleiner-

¹⁾ Vgl. L. Couturat, *La Logique de Leibniz*, Paris 1901, 130 ss.

²⁾ A. Voss, Ueber das Wesen der Mathematik, Leipzig 1908, 26.

oder Grössersein gar nicht die Rede ist, wie z. B. die Kombinatorik, die Gruppentheorie, die projektive Geometrie, die Analysis situs, die Zahlentheorie. Nicht also der Begriff der Quantität, nicht der Begriff der Grösse ist es, der an die Spitze gestellt wird, sondern es ist neben dem Zahlbegriff, der durch seine neue Fassung auch wesentliches Material für die moderne Logik liefert, der Begriff der Ordnung, der Anordnung, der qualitativen Beziehung, der Verknüpfung. Mathematik ist „die Wissenschaft der geordneten Gegenstände“, sagt G. Itelson¹⁾. Vor allem der Funktionsbegriff ist das Lebenselement aller Mathematik; der fundamentale Gedanke der Mathematik ist die Funktionalität.

2. Wie kam man zu dieser grundlegenden und tief in Mathematik und Philosophie einschneidenden Auffassung? Es sind vorzüglich vier Arten mathematischer Untersuchungen, aus denen der Begriff der Funktion als das Wesen der Mathematik resultierte: die eingehende Untersuchung des Begriffs der Irrationalzahl und eng zusammenhängend hiermit die des Kontinuums, ferner die Einführung der transfiniten Zahlen und die Ergebnisse der Forschungen über das Wesen der Geometrie. Es sollen in Kürze diese Untersuchungen betrachtet werden. Vorab aber sei noch die neue Fassung des Zahlbegriffes dargelegt, um daraus die allgemeinen Grundlinien der modernen Relationslogik festzulegen. Hierin nämlich liegt die Hauptbedeutung für die Logik.

a. Die Analyse des Zahlbegriffs bei Russell²⁾ und bei Couturat führte auf die entgegengesetzte Ansicht der bis dahin allgemein angenommenen Darstellung und Definition des Zahlbegriffs, die jüngst noch durch Helmholtz, Kronecker und Dedekind auf ihre Richtigkeit untersucht und neu bestätigt schien. Couturat, der übrigens seine Ansicht über die Lehre von der Zahl und Grösse seit seinem ersten Werke *„De l'Infini mathématique“* in manchen Punkten geändert hat, legt in seinen *„Principes des Mathématiques“* dar, dass die Kardinalzahl vor der Ordnungszahl, der Kardinalbegriff als der ursprünglichere unabhängig vom Ordinalbegriff zu definieren sei. Ja sogar zwei voneinander verschiedene, aber sich

¹⁾ Zitiert nach E. Cassirer, Kant und die moderne Mathematik (Kantstudien XII [1907]).

²⁾ Couturats Ansichten über die mathematisch-philosophischen Probleme und seine Lösungen decken sich vielfach mit denen von B. Russell; und beide ergänzen sich gegenseitig. Man vergleiche besonders B. Russell, *The Principles of Mathematics* 1, Cambridge, University Press 1903.

gegenseitig ergänzende Theorien (die Kardinal- und die Ordinaltheorie) gibt Couturat für die Definition des Kardinalbegriffs an, die beide erstens als solche die Unabhängigkeit des Kardinalbegriffs vom Ordnungsbegriff darlegen, und zweitens diese Unabhängigkeit noch in der Art ihrer gegenseitigen Ergänzung (die Ordinaltheorie ruht auf der Kardinaltheorie) beweisen sollen. Die Bedeutung der Kardinalzahldefinition für die Logik beruht auf ihrem rein logischen Wesen. Wir haben hier den Begriff der „Beziehung“, den Couturat zum Hauptinhalt der Logik erhebt. Nicht nur die Beziehungen der Unterordnung der Begriffe, die bis dahin allein in der Logik betrachtet und gehandhabt wurden, sondern Beziehungen jeder Art, wie sie der menschliche Verstand im täglichen Leben und in den Wissenschaften allenthalben gebraucht, werden dem Studium unterworfen, werden geordnet, analysiert und auf ihre formalen Elemente zurückgeführt. Und da die Mathematik die einfachsten und elementarsten Beziehungen enthüllt, so muss die Analyse der mathematischen Beweismethoden einerseits und andererseits selbst die der Axiome auf rein logische Grundsätze führen. Denn der Gedanke einer doppelten Logik, einer Logik der Mathematik und einer Logik der übrigen Wissenschaften kann Couturat nicht und kann wohl niemanden befriedigen. Couturat kommt, nachdem er die Operation der Abzählung als einen fehlerhaften Zirkel enthaltend und mit noch mehr Grund alle psychologischen Theorien abgetan hat, mittels Abstraktion zu folgender Definition der Kardinalzahl: „Zwei Klassen kommt dieselbe Zahl zu, wenn man zwischen ihren Elementen eine eindeutige und gegenseitige Verwandtschaft oder mit anderen Worten eine eineindeutige Beziehung herstellen kann“¹⁾. Wir haben hier einen elementaren Grundtypus der Beziehung, einer „symmetrischen und transitiven Beziehung“, die nicht versteckt die Zahl Eins enthält, sondern die ausschliesslich mit Hilfe der Identitätsbeziehung zwischen Individuen definiert wird. Diese mittels des Prinzips der Abstraktion gelieferte Definition, der übrigens der Mangel „der Existenz und Einzigkeit des definierten Objektes“ anhaftet, ein Fehler, den alle Definitionen mittels Abstraktion besitzen, ist nicht ein Axiom oder Postulat, sondern ein logisches Theorem; die Definition ist eine vollkommen logische Definition. Das Prinzip der Abstraktion ist ein Theorem der Logik der Beziehungen. Und wie die mathematische Gleichheit zweier Zahlen de facto die Identität der Zahlen ausdrückt und dar-

¹⁾ L. Couturat, Die philosophischen Prinzipien der Mathematik 48.

stellt, „so geht die mathematische Gleichheit in weitestgehender Analyse auf die logische Gleichheit zurück, d. h. auf die Identität von Begriffen“.

Bei Darlegung der Ordinaltheorie zur Definition seines Kardinalbegriffs geht Couturat auf den Fehler der Abstraktion, dass sie weder die Existenz noch die Einzigkeit des definierten Objektes sichert, ein und zeigt, dass auch hier ohne Hinzunahme irgend eines neuen Grundbegriffs die Definition der Zahl logisch vollkommen einwandfrei und die Verbindung von Arithmetik und Logik vollendet ist. Ohne Erfahrung und Anschauung gelangt man zur Erzeugung der Kardinalzahlen, die auf keinen anderen Grundlagen fussen, als rein logischen mit rein logischen Konstanten. Gründend auf diese Tatsache weist Couturat darauf hin, wie alle Definitionen und Gesetze der reinen Mathematik, selbst der kompliziertesten, in formaler Weise gereinigt werden können von aller Berufung auf Anschauung und von allen Postulaten, und der volle logische Charakter der Mathematik in die Erscheinung tritt mittels dieser Logik der Beziehungen, „die entschieden als das wahrhafte Organon der reinen Mathematik erscheint“.

b. Die allgemeinste Bestimmung der Logik der Relationen liegt in dem Wesen der „Beziehung“. Eine solche wird zwischen zwei Gliedern x und y symbolisch folgendermassen ausgedrückt: xRy . Man unterscheidet Vorderglied (x) und Hinterglied (y). Die Umkehrung der Beziehung yRx ist die „konverse“ Relation. Den Inbegriff der Vorderglieder resp. der Hinterglieder nennt man „Gebiet“ (domaine) resp. „Mitgebiet“ (codomaine), die Gesamtheit der Vorder- und Hinterglieder ist das „Feld“ (champ). Die Beziehungen werden eingeteilt in „symmetrische“ (wenn xRy mit der Umkehrung identisch ist), in „nicht-symmetrische“ (wenn xRy nicht die Notwendigkeit von yRx nach sich zieht), und in „asymmetrische“ (wenn aus xRy die Unmöglichkeit von yRx folgt). Ferner ist eine Beziehung „transitiv“ (wenn aus xRy und yRz folgt, dass xRz ist), „nicht-transitiv“ (wenn das nicht der Fall ist) und „intransitiv“ (wenn xRz als Folgerung von xRy und yRz nicht nur nicht notwendig, sondern sogar unmöglich ist). Wir wollen nicht näher hierauf eingehen.

¹⁾ Es taucht hier ein grosses erkenntnistheoretisches Problem auf. J. Cohn fragt: „Schafft die Relation den Zusammenhang oder besteht sie vielmehr selbst lediglich auf Grund eines vorausgesetzten Zusammenhangs?“ (J. Cohn, Voraussetzungen und Ziele des Erkennens, Leipzig 1908, 143).

c. Wie aber entwickelt sich weiter der Begriff der Ordnung? Durch die gegebenen Elemente ist niemals schon eine bestimmte Ordnung gegeben, sondern diese wird erst durch die erzeugende Relation bestimmt, wodurch erst das „Gebiet“ der Elemente gegeben ist¹⁾. Die Ordnung der Elemente ist also das wesentliche Prinzip, und Couturat legt auf Grund des eben entwickelten Zahlbegriffs durch seine Ordinaltheorie dar, wie zur Begründung der ganzen Arithmetik es genügt, wenn wir die Definition der natürlichen Zahlenreihe lediglich als eine Folge von Elementen präzisieren, die durch eine ganz bestimmte Ordnung miteinander verknüpft sind. Nicht der Aristotelische Substanzbegriff ist die Grundlage der Logik, die deshalb bis dato nur an die Grundform des Urteils der Prädikation gebunden war, sondern der Funktionsbegriff stellt sich als Mittelpunkt der Logik hin. „Für die unveränderlichen, einheitlichen Wesensrealitäten tritt der Begriff des Gesetzes ein, das bestimmte Formen innerer und äusserer Zusammenhänge schafft“¹⁾.

2. a. Doch betrachten wir weiter kurz die Hauptpunkte der mathematischen Untersuchungen, die zu dieser Erkenntnis führten, zuerst die Definition der Irrationalzahl. Die dem Mathematiker so nahe liegende Auffassung der irrationalen Zahlen als Grenzen von unendlichen konvergierenden Reihen hatte ihre grossen Mängel, bis der berühmte Dedekindsche „Schnitt“ ganz neues Licht in das Wesen der Irrationalzahl sandte. Der Grenzbegriff war ausgeschaltet und die Irrationalzahl, was wesentlich ist, in Beziehung zu den rationalen Zahlen gesetzt. Der „Schnitt“ wird im Gebiet der rationalen Zahlen ausgeführt, und man versteht darunter eine Zerlegung dieses Gebietes in zwei Teile (Untergebiet und Obergebiet), welches die beiden Eigenschaften hat, dass erstens jede rationale Zahl einem und nur einem dieser Gebiete angehört, und zweitens, dass jede Zahl des Untergebietes kleiner ist als jede Zahl des Obergebietes. Auf diese Weise sind einerseits alle rationalen Zahlen eingeteilt, andererseits ist die Trennung selbst durch keine rationale, sondern eben durch eine irrationale Zahl bewirkt. Betrachtet man aber diese Schnitte, so zeigt sich, dass sie sowohl untereinander, wie auch im Vergleich zu den Rationalzahlen sich wohl unterscheiden lassen, und ihnen, wie ja auch den Rationalzahlen, eine ganz bestimmte Ordnung beigelegt werden kann. Letzteres ist das entscheidende Charakteristikum vom

¹⁾ J. Geysler, Grundlagen der Logik und Erkenntnislehre, Münster 1909, 91.

logischen Standpunkt aus. Durch Russell wurde diese Dedekindsche Definition, die zum Beweise der Existenz der Irrationalzahlen sich noch eines Axioms bedienen musste, von diesem Axiom der Stetigkeit der realen Zahlen befreit und durch diese Modifikation logisch einwandfrei festgelegt.

b. Wie die Definition der Irrationalzahlen von jeglicher Reflexion auf anschauliche Gegenstände absieht, so folgt auch für das eng mit der Irrationalzahl verbundene Kontinuum, „dass man den Begriff des Kontinuums logisch und vollständig konstruieren kann, nicht nur ohne das geometrische Kontinuum hereinzuziehen, sondern ohne selbst auf den Grössenbegriff sich zu berufen, einzig und allein gestützt auf Ordnungsbetrachtungen“¹⁾. Es ist das Verdienst Georg Cantors, ein Verdienst von grösster philosophischer Tragweite, dem reinen Denken hier ein Gebiet erschlossen zu haben, das sich seit den ältesten Zeiten immer wieder hindernd in den Weg gestellt hat. Die ordinale Definition des Kontinuums ist dadurch wesentlich verschieden von der alten metrischen Definition, indem sie den Begriff der Grösse, des Abstandes zweier Punkte p_0 und p_1 der Mannigfaltigkeit (dieser Abstand ist allerdings immer kleiner als eine noch so kleine vorgegebene Zahl ϵ) vollständig eliminiert und so ohne diesen grössten Begriff auskommt, ein Grössenbegriff, der einerseits sich auf eine Anschauung beruft, andererseits noch den Begriff der Stetigkeit einer anderen Mannigfaltigkeit, der des stetigen Raumes, voraussetzt. Cantors absolute Definition des Kontinuums ist rein ordinal; und seine drei wesentlichen Eigenschaften des Kontinuums gehen auf die ihm ähnliche Mannigfaltigkeit der rationalen Zahlen zurück; man erhält so, wie man durch Abstraktion aller Mannigfaltigkeiten, die einer und derselben Mannigfaltigkeit ähnlich sind, den Ordnungstypus begrifflich macht, einen bestimmten „Ordnungstypus“. Ueber den Ordnungstypus unten näheres. So wenig anschaulich diese ordinale Definition des Kontinuums ist, um so erstaunlicher ist die Tatsache, dass sich nicht nur die Analysis, sondern sogar die Geometrie hierauf begründen lässt. „Dies stellt eine äusserst weittragende und in der Philosophie folgenschwere Tatsache dar, dass nämlich das geometrische Kontinuum sich auf das soeben definierte Zahlenkontinuum zurückführen lässt. Diese Tatsache schlägt endgültig die Lehren aus dem Felde, die den Begriff des Kontinuums als von der sinnlichen Anschauung herstammend und dem Denken widersprechend be-

¹⁾ A. a. O. 96.

trachten“¹⁾. Diese Vorherrschaft des reinen und abstrakten Zahlbegriffs auf einem empirischen Gebiet ist von grösster erkenntnistheoretischer Bedeutung. Nicht konnte die Empirie das Kontinuum erklären, alle Versuche blieben eben Versuche, und was die Sinnlichkeit nicht zuwege brachte, leistet der mathematische Begriff. Stetigkeit im wissenschaftlichen Sinne heisst nicht das lückenlose Zusammenfliessen der Elemente zu einem Ganzen, sondern die Trennung und die völlige ordinale Bestimmtheit der Elemente wird logisch aufrecht erhalten, jeder „Schnitt“ ist vom anderen, und mag er noch so nahe liegen, gedanklich etwas völlig Verschiedenes. Die Einheit und Eindeutigkeit des Ganzen wird allein durch die logische, begriffliche Vorschrift der Ordnung hergestellt und gehalten²⁾. Es würde zu weit führen, darzulegen, dass auch die erweiterten Zahlbegriffe, wie Brüche, unendliche Zahlen, komplexe Zahlen usw. sich auf den kurz skizzierten Zahlbegriff der Mannigfaltigkeiten der reellen Zahlen reduzieren lassen.

3. Weitere Aufmerksamkeit der Logiker musste die bei der Untersuchung der Grundlagen der Integralrechnung und der Funktionenlehre sich ergebende, vor ungefähr 25 Jahren auftauchende Mengenlehre auf sich ziehen. Dieselbe steht in engster Beziehung mit der modernen Logik oder Logistik. G. Cantor hat durch die Erweiterung des Zahlbegriffs mittels der sogenannten „transfiniten Zahlen“ auf Grund der Mengenlehre sich auch hier für die Logik grösstes Verdienst erworben. Die Mengenlehre befasst sich mit den wechselseitigen Beziehungen von Mannigfaltigkeiten. Wir haben da verschiedene Arten, vornehmlich vier, zu unterscheiden.

a. Erstens achtet man auf die in der Menge enthaltenen Einzelobjekte und sagt, dass eine Menge bestimmt sei, wenn man von irgend einem beliebigen Objekt aussagen kann, ob es der betrachteten Menge angehört oder nicht. Da wir es hier bei einer Menge ganz allgemein mit Objekten irgend welcher Art zu tun haben, so ist die nähere Untersuchung dieser Verhältnisse logischer Art, und die neue Logik nimmt auch tatsächlich diese Zugehörigkeit vom „Individuum“ zu einer „Klasse“, beides logische Begriffe, als zu ihrem Ressort gehörig, für sich in Anspruch. Auch die verschiedenen Arten der Verbindung zweier Mengen bezüglich ihrer Einzelobjekte liefern wesent-

¹⁾ A. a. O. 103.

²⁾ Man vergleiche den Aufsatz von E. Cassirer, Kant und die moderne Mathematik (Kantstudien XII [1907]).

liches logisches Material. Auf den Teil der Logistik, der hier hereinspielt, den „Klassenkalkül“, wird im Zusammenhang am Schluss dieser Arbeit näher eingegangen werden. Es genügt hier, den Zusammenhang der mathematischen Disziplin mit der Logik hervorzuheben zu haben: Couturat identifiziert sogar vollständig diesen elementaren Teil der Mengenlehre mit der Logik der Klassen.

b. Ein zweiter Teil der Mengenlehre fasst die Mengen, die Mannigfaltigkeiten, als Ganzes ins Auge und sagt von zwei Mengen, sie haben die gleiche „Mächtigkeit“, sie sind „äquivalent“, wenn sich zwischen den Elementen der beiden Mengen eine eindeutige Beziehung oder eine eindeutige und umkehrbare Verwandtschaft herstellen lässt.

Machen wir dies an einem einfachen Beispiele klar. Nehme ich die unendliche Reihe der positiven ganzen Zahlen und die ihrer Quadratzahlen oder auch Kuben, so entspricht jeder positiven ganzen Zahl eine und nur eine Quadratzahl oder ein Kubus und umgekehrt: jeder Quadratzahl oder dritten Potenz entspricht eine und nur eine ganze positive Zahl. Diese verschiedenen Mannigfaltigkeiten sind von „gleicher Mächtigkeit“. Es ist ein charakteristischer Unterschied dieser unendlichen Reihen von endlichen Reihen zu bemerken, nämlich, dass zwei unendliche Reihen, von denen die eine ein Teil der anderen ist (die Reihe der Quadratzahlen oder Kuben ist ein Teil der Reihe der ganzen positiven Zahlen) von gleicher Mächtigkeit, während Teil und Ganzes zweier endlicher Reihen niemals äquivalent sein können. Um an einem Beispiel den Begriff der „höheren“ Mächtigkeit zu illustrieren, nehme ich neben der Reihe der positiven ganzen Zahlen irgend eines Intervalls nicht nur alle „algebraischen“ Zahlen, die also als Wurzeln eine Gleichung

$$C_0 + C_1x + C_2x^2 + \dots + C_nx^n = 0$$

mit rationalen Koeffizienten befriedigen würden, sondern dazu auch noch die „transzendenten“ Zahlen, die einer solchen Gleichung nicht genügen würden (die natürliche Zahl e und die Zahl π sind z. B. transzendente Zahlen). Zwischen diesen beiden Mannigfaltigkeiten ist die eben beschriebene Art der Zuordnung der eindeutigen Beziehung nicht möglich, sie sind nicht von gleicher, sondern von „höherer“ Mächtigkeit. Um nun die Unterschiede dieser Mächtigkeiten zwischen den verschiedenen Mannigfaltigkeiten zu kennzeichnen, schuf man die „transfiniten Zahlen“; die kleinste transfinite Zahl wird als gemeinsames Merkmal beiden Mengen zugesprochen; die

Mengen der nächsthöheren Mächtigkeit wird durch die nächsthöhere transfiniten Zahl charakterisiert. Zwei unendlichen Reihen von derselben Mächtigkeit kommt also dieselbe transfiniten Zahl zu. Und diese transfiniten Zahl, der Begriff der Mächtigkeit, ist nichts anderes als der allgemeine Begriff der Kardinalzahl. Die transfiniten Kardinalzahl oder die Mächtigkeit einer Menge ist die Klasse der Mengen, die mit ihr gleichwertig sind. „Auf diese Art ist die Theorie der Mächtigkeiten der Menge nichts anderes als die Lehre von den Kardinalzahlen im allgemeinen“¹⁾, und wir kommen so auf die Bedeutung dieser Theorie für die Logik zurück, die bei der Definition der Kardinalzahl oben dargelegt wurde.

c. Betrachten wir drittens die uns in der Mannigfaltigkeitslehre gegebenen Mengen nicht nur der Mächtigkeit nach, sondern lassen wir den Begriff der Ordnung, der Anordnung der einzelnen Elemente mit hineinspielen, so kommen wir zu einem spezielleren, der vorigen Auffassung untergeordneten, aber nicht minder wichtigen Teil der Mengenlehre. Wie wir vorhin, wo die einzelnen Elemente auf irgend eine Weise, die nicht in Betracht kam, angeordnet sein konnten, zum Begriff der Mächtigkeit kamen, so bilden wir jetzt unter Berücksichtigung einer ganz bestimmten Ordnung und der hierauf fussenden gegenseitigen eindeutigen Zuordnung der Einzelobjekte den Begriff des „Ordnungstypus“. Zwei Mannigfaltigkeiten sind ähnlich oder von gleichem Ordnungstypus, wenn sich eine eindeutige Zuordnung herstellen lässt unter Wahrung der einmal festgesetzten Anordnung. Auch hier lassen sich zwischen endlichen und unendlichen Mannigfaltigkeiten charakteristische Unterscheidungen machen. Eine endliche Menge hat z. B. stets nur einen Ordnungstypus, d. h. sie bleibt sich immer selbst ähnlich, wie man sie auch ordnet. Unter den geordneten Mengen bezeichnet man als wohlgeordnete Mengen diejenigen, die ein erstes Element enthalten; die Ordnungstypen dieser wohlgeordneten Mengen sind die Ordinalzahlen. Der Ordnungstypus der natürlichen Zahlenreihe ist die erste der unendlich vielen Ordinalzahlen und wird allgemein mit w bezeichnet. Wie man nun hier nach Reihen mit den verschiedensten Ordnungstypen

$$w + 1, w + 2, \dots, w + n, \dots$$

$$2w, 3w, \dots, nw, \dots$$

$$w^2, w^3, \dots, w^n, \dots \text{ usw.}$$

definieren kann, so erhalten wir das neue grosse Zahlengebiet der

¹⁾ A. a. O. 235.

„transfiniten Ordinalzahlen“. Diese neugeschaffenen Zahlen, die tatsächlich und notwendig bestehende Beziehungen zwischen den Mannigfaltigkeiten ausdrücken, können nach ganz bestimmten Gesetzen verknüpft werden, d. h. es kann mit diesen Zahlen gerechnet werden. Wir erkennen auch die engste Beziehung dieser Theorie mit der oben geschilderten Definition des Kontinuums; und mit der Abhängigkeit dieser Lehre von den geordneten Mengen von der des Kontinuums ist auch ihre logische Bedeutung, ihre völlige logische Bestimmtheit dargetan.

d. Der vierte Teil der Mengenlehre ist die Lehre von den Punktmengen. Er steht den Anwendungsgebieten der Analysis und der Geometrie am nächsten und ist deshalb zuerst auf dem Plan erschienen. Es würde aber ganz zu weit führen, auf diese sehr verwickelte Theorie ins einzelne einzugehen, und es mag genügen, hervorzuheben, dass auch hier in logischer Hinsicht ähnliche Resultate erzielt wurden.

4. Um nun das wesentliche logische Moment an diesen mathematischen Untersuchungen über die Mengenlehre und die Schöpfung der transfiniten Zahlen hervorzuheben, müssen wir auf die logische Genesis des Zahlenbegriffs rekurrieren. Cantor kennt zwei Prinzipien einer Zahlbildung.

a. Sein erstes Erzeugungsprinzip definiert er: „Die Reihe der positiven realen ganzen Zahlen 1, 2, 3, . . . n hat ihren Entstehungsgrund in der wiederholten Setzung und Vereinigung von zugrundegelegten als gleich angesehenen Einheiten; die Zahl n ist der Ausdruck sowohl für eine bestimmte endliche Anzahl solcher aufeinander folgenden Setzungen, wie auch für die Vereinigung der gesetzten Einheiten zu einem Ganzen. Es beruht somit die Bildung der endlichen ganzen Zahlen auf dem Prinzip der Hinzufügung einer Einheit zu einer vorhandenen schon gebildeten Zahl“¹⁾. Das Prinzip

¹⁾ Cantor, Mannigfaltigkeitslehre § 11, 32 f. zit. nach Cassirer, Kant und die moderne Mathematik (Kantstudien XII) 25. Dieses Erzeugungsprinzip deckt sich im wesentlichen mit der Entstehung des Zahlbegriffs, die Geysers in seinen „Grundlagen der Logik und Erkenntnislehre“ 216 ff. entwickelt: „Zahlen sind reine Summeneinheiten, die einen bestimmten Namen erhalten haben und eine abzählbare Reihe von einfachen reinen Einheiten als Teile in sich enthalten.“ Cantor scheint mir implizite in seinem ersten Erzeugungsprinzip in den „als gleich angesehenen Einheiten“ die Forderung Geysers zu enthalten, „dass eben die Begriffe der reinen Einheit, die zu einem Ganzen verbunden sind, nicht identisch sind, sondern als »Teile«, als »Träger einer Unterscheidungsrelation« anzusehen sind“. Beide Theorien sind rein logischen Ursprungs.

würde der auch logisch einwandfreien Ordinaltheorie Peanos, die auch Couturat annimmt, die er aber doch auf seiner Kardinaltheorie fussen lässt, gleich sein oder derselben doch sehr nahe kommen.

b. Allein diese Ordinaltheorie begründet nicht zur Genüge die Möglichkeit der unendlichen Zahl. Dies zu leisten aber ist in der Lage das „zweite Erzeugungsprinzip“ Cantors. Er definiert es dahin, „dass, wenn irgend eine bestimmte Sukzession definierter ganzer realer Zahlen vorliegt, von denen keine grösste existiert, auf Grund dieses zweiten Erzeugungsprinzips eine neue Zahl geschaffen wird, welche als Grenze jener Zahlen gedacht, d. h. als die ihnen allen nächst grössere Zahl definiert wird“¹⁾. Ohne des weiteren auf die „unendliche Zahl“ einzugehen, erkennen wir hier aber schon ein Problem von weittragendster philosophischer Bedeutung. Es handelt sich um die Analyse des allgemeinen logischen „Begriffes“, um die Unterscheidung der beiden Momente Inhalt und Umfang, die für weitere logische Eigenschaften der Begriffe wichtig sind. Auch für das Prinzip der Induktion sind hier Anhaltspunkte der Betrachtung. „Inhalt eines Begriffes ist der Komplex, der in ihm zu einer bestimmten Gedankeneinheit zusammengefassten Teilgedanken“, und „Umfang ist gleich der Summe aller Gegenstände, von denen ein Begriff prädiiziert werden kann“²⁾. Um nun irgend einen Begriff zu präzisieren, genügt es, die „Intension“ uns vor Augen zu halten, d. h. allein den Inhalt, den Komplex der konstitutiven Teilgedanken, zu berücksichtigen. Und auf dieser „Intension“ beruht die „Extension“ eines Begriffes, d. h. der Umfang; auf Grund des Inhalts allein kann ich von irgend einem Gegenstande sagen, ob er unter diesen oder jenen Begriff fällt. Der Begriff der unendlichen Zahl ist ein typisches Beispiel für diese Sachlage. Es wäre absurd, unendliche Zahlen so begreifen zu wollen, dass man sie einzeln durchgeht, sie etwa Glied für Glied vergleicht. Und doch ist eine unendliche Zahl begrifflich exakt festgelegt, zwar nicht nach dem Umfang, wohl aber nach dem Inhalt, d. i. der erzeugenden Relation. Nicht die Substanz, der Dingbegriff, sondern das Gesetz, der Funktionsbegriff, ist zu einem bestimmten Denkinhalt festgelegt.

Das ist die Bedeutung der mathematischen Untersuchung der Mengenlehre für die Logik, die Funktionalität als erstes logisches Prinzip in den Vordergrund gerückt zu haben. Und wenn Russell

¹⁾ A. a. O.

²⁾ J. Geysler, Grundlagen der Logik und Erkenntnislehre 122 ff.

die Mehrzahl der Sätze der Mengenlehre, die Cantor und andere Mathematiker aufgestellt haben, durch seine Logik der Beziehungen wiederfindet, so ist es verständlich, wenn Couturat sagt: „Die Zurückführung der Mengenlehre auf die Logistik ist nicht ein theoretisches oder ideales Desiderat, sie ist vielmehr eine fertige Tatsache“¹⁾.

5. Als letzte für die Logik bedeutsame mathematische Untersuchung ist die über das Wesen der Geometrie zu nennen. Das Ergebnis kann kurz dahin zusammengefasst werden, dass auch in der Geometrie der reine logische Charakter hervortritt, dass sie unabhängig ist von aller Empirie, von aller Anschauung, dass ihre „Wahrheit“ im hypothetisch-deduktiven System liegt, und dass es gelungen ist, die reine Geometrie von allen Schlacken der herkömmlichen Anschauungselemente zu reinigen. Die sogenannten Grundbegriffe und Grundsätze der Geometrie sind nichts als logische Grundbegriffe und Grundsätze; „die Geometrien haben nicht mehr eigene Axiome ausser den gemeinen Axiomen der Logik selbst“²⁾, und „sie hat auch keine ihr eigentümlichen Grundbegriffe“³⁾. Die Möglichkeit der Existenz verschiedener Systeme der Geometrie ruht allein auf dem „Sinn“ vorgegebener Grundbegriffe und Grundsätze; die Theorie selbst ist nur die vollständige analytische Entwicklung des Gehaltes dieser Definitionen und Postulate, aus deren verschiedenem „Sinn“ eben die verschiedenen, von einander unabhängigen Geometrien resultieren. Deshalb bezeichnet Couturat die Geometrie im alten Sinne auch als Anwendungsbereich der Geometrie, — die Euklidische Geometrie z. B. ist ihm eine „angewandte“ Geometrie — und er hat nichts dagegen, seine reine Geometrie als einen Zweig der Analysis aufzufassen. Ob diesem „realen Sinn“ der vorausgesetzten Elemente irgend eine tiefere, als bloss willkürliche Existenzberechtigung zukommt, dies zu untersuchen, ist nicht Aufgabe der formalen Logik. Aber der Mathematiker treibt nicht ein Spiel mit sinnlosen Symbolen, sondern man sieht leicht ein, so bemerkt E. Cassirer, „dass sich hinter dieser Paradoxie vielmehr eine Umgestaltung dessen verbirgt, was eigentlich in wissenschaftlicher Hinsicht als die »Bedeutung« einer bestimmten Figur zu bezeichnen ist. Der wahrhafte »Sinn« einer geometrischen Gestalt besteht nicht in ihrem sinnlich-anschaulichen Sein; er ergibt sich erst aus den begrifflichen Eigentümlichkeiten, die wir ihr mittels

¹⁾ A. a. O. 240.

²⁾ A. a. O. 216.

³⁾ A. a. O. 218.

der Definition zusprechen, und aus den logischen Beziehungen, in die wir sie eingehen lassen“¹⁾).

6. Überblicken wir die Bedeutung der modernen mathematischen Untersuchungen, die Couturat zusammenfassend für die Logik in das hellste Licht zu stellen sucht, so ist es vor allem zweierlei, was hervorgehoben werden muss: erstens haben diese Untersuchungen den reinen rationalen Charakter der gesamten Mathematik dargetan und als ihr ureigenstes Wesen nicht das Objekt, nicht den Substanzbegriff, sondern die deduktive Methode, die die Einheit aller mathematischen Einzeldisziplinen begründet, festgelegt und damit als Teil der Logik erwiesen; zweitens sind neben dieser grundlegenden Vertiefung der Logik und Befreiung von metaphysischen Voraussetzungen die mathematisch-logischen Formen des Denkens in die allgemeine Logik eingereiht worden, die so eine grosse Bereicherung erfuh. Ob nun alle neuen logischen Sätze in allen Wissenschaften die Möglichkeit einer Anwendung finden, bezweifelt Couturat, denn der Inhalt der formalen Methoden, die Anwendungsobjekte, sind in den verschiedenen Wissenschaftsgebieten verschieden, und nach ihnen richtet sich auch das nötige Instrument der denkfunktionalen Behandlung. Und es ist sicher, dass eine Reihe logischer Lehrsätze ihr Unterkommen nur in mathematischen Disziplinen finden können. Nichtsdestoweniger sind diese Sätze logischer Natur. So wird die reine Mathematik nach ihrer Form schliesslich gänzlich mit der Logik identifiziert und nur durch den Inhalt, der aber eine Gesamtheit von Definitionen darstellt, die nur logische Termen enthalten, wird die Mathematik zu einem Anwendungsbereich der Logik, aber auch nur wieder zu einem besonderen Gebiet dieses Bereiches, da Anwendungsbereich der Logik auch die anderen Wissenschaften sind.

7. Diese neue, vertiefte und erweiterte Logik stellt nun die Grundbegriffe und Grundsätze des Denkens in Symbolen und Formeln dar, die auf diese Weise ein etwas mathematisches Aussehen bekommen, was wohl manchen mit der Formelsprache nicht vertrauten oder ihr aus irgend welchen Gründen abholden Philosophen abgeschreckt haben mag, näher auf den inneren Wert dieser Formeln einzugehen und sie in seinen Betrachtungskreis zu ziehen; und es mag dies vielleicht ein Grund, allerdings nur ein äusserer Grund, für das oben geschilderte getrennte Forschen von Mathematikern und Philosophen gewesen sein. Die neue fundamentale Logik bezeichnet

¹⁾ E. Cassirer, Kant und die moderne Mathematik (Kantstudien XII) 29.

Couturat mit dem Namen „Logistik“, und es mag zum Schluss in aller Kürze diese Logistik nach Couturat im Zusammenhang dargestellt werden. Das wesentlichste ist im Laufe obiger Darstellung schon berücksichtigt worden.

Couturat teilt die moderne Logik ein in vier Teile: den Urteilkalkül, den Klassenkalkül, den Kalkül der Relationen und die Methodenlehre.

a. Der grundlegendste Teil ist der Urteilkalkül, der sich mit den undefinierbaren Begriffen, den Definitionen und den unabweisbaren Grundsätzen befasst. Als wichtigsten undefinierbaren Begriff betrachtet er die Abhängigkeitsbeziehung, eine Relation. Weiter definiert er das Urteil, wozu das Identitätsprinzip benutzt wird; dann folgt die Definition des logischen Produkts von zwei Urteilen. Ferner zählt er eine Reihe von Grundsätzen und Prinzipien in symbolischer Form auf, von denen die Betrachtung des Prinzips des Syllogismus, das er zum „Prinzip der Deduktion“ erweitert, bezüglich der alten Logik Beachtung verdient. Einerseits gäbe es noch andere Typen und Grundlagen von deduktiven Schlüssen, als den Syllogismus allein, andererseits könne sich das Prinzip des Syllogismus nur kraft eines anderen Prinzips rechtfertigen. Denn eine syllogistische Forderung bestände nicht einfach in der Konstatierung der Abhängigkeitsverhältnisse zwischen Prämissen und Schlusssatz, sondern auch in der Konstatierung der Gültigkeit der Obersätze und in der Behauptung, dass der Schlusssatz für sich allein Geltung hat. Dieses könne aber nur mittels eines besonderen Prinzips geschehen.

b. Der zweite Teil der Logistik ist der Klassenkalkül. Grundlegender Begriff ist die „Klasse“, die oben bei Darlegung des Zahlbegriffs und der Mengenlehre eingehender berücksichtigt wurde. Auf dem Klassenbegriff fassen verschiedene logische Sätze wie Unterordnung, Gleichheit, Identität, logisches Produkt der Klassen, ihre logische Summe, formale Abhängigkeit (Typus der mathematischen Sätze) usw.

c. Im dritten Teil, dem Kalkül der Relationen, ist die „Beziehung“ Gegenstand der Untersuchung. Es ist bezüglich der alten Logik der wichtigste Teil, da durch ihn die volle logische Analyse der Mathematik möglich wird. Oben bei der Analyse des Zahlbegriffs legten wir die „Beziehung“ ausführlicher dar. Diesem Relationskalkül wird von seiten der Philosophen die grösste Beachtung geschenkt, und man sieht in ihm wohl allgemein einen Fortschritt

in der Logik, da die alte Logik sich fast ausschliesslich mit einer einzigen Beziehung zwischen Begriffen befasst hat.

d. Im vierten Teil, der Methodenlehre, zeigt Couturat, wie die in den ersten drei Teilen gegebenen logischen Elemente methodisch verwandt werden. Diese logische Methode ist ein zweifacher Prozess der Reduktion: Reduktion der Begriffe aufeinander mittels Definition, Reduktion der Sätze aufeinander mittels Beweises. Weiter wird die Notwendigkeit eines Existenzialurteils dargetan, damit Definitionen als Wahrheitsquelle dienen dürfen, was sie als solche nicht sind. Die Methodenlehre führt auf die Erkenntnis der Relativität der Undefinierbarkeit und Unbeweisbarkeit der Grundbegriffe und Grundsätze: sie sind nicht absolut. Die mittelbaren Definitionen durch Postulate oder Abstraktion sind nur provisorisch und müssen auf die einzigen wahrhaften nominalen oder ausdrücklichen Definitionen zurückgeführt werden.

Dies sind in Kürze die Grundzüge der modernen Logik.

Zum Schluss darf ich ein Wort von Carl Stumpf zitieren aus seiner Rede zum Antritte des Rektorates der Berliner Universität vom 15. Oktober 1907: „Schon die allgemeinsten mathematischen Ideen sind heute in einer Umwandlung begriffen, die die höchste Aufmerksamkeit der Philosophen herausfordert. Die Frage nach dem Ursprung der mathematischen Axiome, deren Wichtigkeit für die Erkenntnislehre bereits Leibniz und Kant durchschauten, ist durch die Mathematiker selbst in einer ungeahnten Richtung fortgebildet worden. Aber es ist den Mathematikern bisher nicht gelungen, diese Neubildungen in den Rahmen der allgemeinen Erkenntnisprobleme befriedigend einzufügen, sie zu den Begriffen von Erfahrung und apriorischer Erkenntnis, zu denen wir von anderen Seiten unweigerlich geführt werden, in einleuchtende Beziehung zu setzen: sie sind eben ihrerseits wieder nicht in der Erkenntnistheorie aufgewachsen. Nur ein mit beiden Gebieten gleichmässig vertrauter Denker könnte diese Aufgabe definitiv lösen, und sie muss einmal gelöst werden“¹⁾. Es ist dies auch Leibniz' Gedanke gewesen, dem er in einem Briefe an Malebranche Ausdruck gibt: „Les Mathématiciens ont autant besoin d'être philosophes que les philosophes d'être Mathématiciens.“

¹⁾ C. Stumpf, Die Wiedergeburt der Philosophie, Leipzig 1908, 23.