Philosoph. Jahrbuch der Görres-Gesellschaft.

31. Band. 2. Heft.

Die Zweckmässigkeit der in der Schöpfung verwirklichten Geometrie.

Von Prof. Dr. Anton Weber in Dillingen a. D.

Die mathematische Forschung des vorigen Jahrhunderts hat zu der Erkenntnis geführt, dass die euklidische Geometrie nicht die einzig mögliche Geometrie darstellt. Die zahlreichen vergeblichen Versuche, das Parallelenaxiom Euklids zu beweisen, legten die Vermutung nahe, dass es sich überhaupt nicht beweisen lässt und dass es keine notwendige Voraussetzung der Geometrie bildet. Diese Vermutung wurde zur Gewissheit erhoben, als man tatsächlich ohne das genannte Axiom neue, in sich widerspruchsfreie, Geometrien begründen und durcharbeiten konnte. Das euklidische Parallelenaxiom fordert, dass es zu einer Geraden durch jeden äusseren Punkt eine und zwar nur eine Parallele gibt. Fordern wir statt dessen durch jeden äusseren Punkt zwei, von einander verschiedene, Parallele, dann gelangen wir zur hyperbolischen Geometrie. In der elliptischen Geometrie hingegen gibt es gar keine Parallelen.

Ebensowenig, wie das Parallelenaxiom sind die übrigen Axiome beweisbar oder notwendig. Jedes derselben lässt sich streichen und durch ein anderes ersetzen. Nachdem diese Tatsache erkannt war, bemühte man sich, die willkürlich aufgestellten Axiome und die mittels der Axiome beweisbaren Sätze genau auseinander zu halten. Hierbei ergab sich, dass in der euklidischen Geometrie die Anzahl der Axiome ziemlich gross ist. Hilbert zählt in seinen „Grundlagen der Geometrie"[1]) nicht weniger als 21 Axiome auf. Lässt man hiervon eines oder mehrere hinweg und ersetzt sie durch andere, so erhält man eine neue Geometrie mit anderslautenden Sätzen.

Die Anzahl der möglichen Geometrien ist also sehr gross, vielleicht sogar unendlich gross, und als der Schöpfer daran ging, den Weltplan zu entwerfen, da hatte er unter den vielen Möglichkeiten nach Zweckmässigkeitsgründen eine Auswahl zu treffen. Die vorliegende Arbeit versucht die Gründe aufzudecken, welche den Schöpfer bei seiner Auswahl geleitet haben. Naturgemäss muss hierbei der Schöpfer anthropomorphistisch aufgefasst werden. Wir stellen uns den Weltbaumeister vor, wie er nach Art eines menschlichen Baumeisters den Plan seines bevorstehenden Werkes entwirft, wie er ihn

[1]) Hilbert, Grundlagen der Geometrie (Sammlung: Wissenschaft und Hypothese) 2 ff. Teubner, Leipzig und Berlin.

nach allen Seiten durchdenkt und wie er Schritt für Schritt seine Entscheidungen trifft.

Die Axiome der heutigen Geometrie lassen ihre Zweckmässigkeit nicht unmittelbar erkennen. Sie stellen nicht die ersten Entscheidungen dar, welche der Schöpfer im Verlauf seiner Ueberlegungen getroffen hat. Die ersten Entscheidungen wollen wir aufsuchen und als Grundsätze bezeichnen. Durch Schlussfolgerung lassen sich daraus andere Sätze ableiten, speziell auch die Axiome der euklidischen Geometrie.

Die vorliegende Arbeit beschränkt sich darauf, ein System von Grundsätzen zu entwickeln und dessen innere Widerspruchslosigkeit darzutun. Die Ableitung der Axiome aus diesen Grundsätzen erfolgt auf mathematischem Wege und ist teilweise sehr umständlich; sie möge einer anderen Arbeit vorbehalten bleiben. Den Zeitbegriff setzen wir als etwas Gegebenes voraus.

Um die Widerspruchslosigkeit eines Systems von Grundsätzen nachzuweisen, steht ein einfaches Mittel zu Gebote: man braucht nur zu zeigen, dass sie in irgend einer, als möglich nachgewiesenen, Geometrie verwirklicht sind. In unserem Fall ist die Zweckmässigkeit einer speziellen Geometrie, nämlich der euklidischen, nachzuweisen. Wir dürfen also nur solche Grundsätze aufstellen, die in der euklidischen Geometrie verwirklicht sind, und damit ist ihre Widerspruchslosigkeit von selbst gegeben.

I. Die Stoffpunkte.

Wir finden in der Schöpfung eine auserordentlich grosse Anzahl von Einzelwesen zu einer organischen Einheit verbunden. Der Zusammenhang beruht nicht auf äusserem Zwang, sondern jedes Einzelwesen strebt selbst zum Ganzen; die Welt ist eine Vielheit, die nach Einheit strebt. Eine Differenzierung der Geschöpfe und namentlich ein Rangunterschied unter denselben war anscheinend von Anfang an mitprojektiert, wenigstens im Prinzip. Sonst hätte das Schöpfungswerk keinen Anspruch auf Kunstwert.

Die Rangskala der Schöpfung zeichnet sich durch grossen Umfang aus. Die vernünftigen Wesen, welche den Höhepunkt der Rangskala bedeuten, beschäftigen uns hier nur nebensächlich, nur, insofern sie bestimmt sind, die Welt bis zu einem gewissen Grade zu beherrschen. Darauf mußte das Weltprojekt Rücksicht nehmen, d. h., die Welt musste so gebaut werden, dass sie von den Vernunftwesen beherrscht werden kann. Von dieser Forderung abgesehen, beschränken wir uns auf die vernunftlosen Geschöpfe. Auch sie spiegeln noch einigermassen die Vernunft und das Selbstbestimmungsvermögen des Schöpfers. Ihr Verhalten ist nämlich nicht für jeden Zeitpunkt willkürlich vorgeschrieben, sondern durch vernünftige Gesetze geregelt; diese Geschöpfe sind gleichsam die Träger von vernünftigen Gedanken. Ausserdem werden sie nicht durch fremde Einflüsse zum Handeln gezwungen, sondern sie sind selbst das

Prinzip ihrer Handlungen. Die Naturgesetze gestatten, das Verhalten der vernunftlosen Wesen in allen Fällen mit mathematischer Sicherheit vorher zu bestimmen. Wir wollen diese Wesen Stoffpunkte nennen. Für sie gilt also der Grundsatz:

1. Grundsatz. Das gesamte Verhalten der Stoffpunkte ist durch Naturgesetze vollständig und eindeutig bestimmt.

Wenn wir die Bezeichnung Stoffpunkte wählen, soll damit keineswegs behauptet werden, dass diese Geschöpfe ausdehnungslos seien. Das könnten wir vorläufig gar nicht behaupten, weil wir den Begriff der Ausdehnung noch nicht festgelegt haben. Durch die Bezeichnung Stoffpunkt soll nur die begriffliche Einfachheit der Einzelwesen angedeutet werden.[1]) Die Anzahl der ins Leben zu rufenden Stoffpunkte soll vorläufig unbestimmt bleiben. Eine Entscheidung darüber kann erst in einem viel späteren Stadium des Weltprojektes getroffen werden, erst dann, wenn es sich um Aufstellung der Detailpläne handelt. Bis dahin müssen wir alle Grundsätze so formulieren, dass sie von der Zahl der Stoffpunkte unabhängig sind. Wir fordern also:

2. Grundsatz. Die Anzahl der existierenden Stoffpunkte kann beliebig verändert werden, ohne dass eine Abänderung der Grundsätze notwendig würde.

Mit anderen Worten: Zu den wirklich existierenden Stoffpunkten dürfen wir beliebig viele weitere Stoffpunkte hinzudenken und ebenso dürfen wir davon beliebig viele wegdenken. Für die veränderte Anzahl von Stoffpunkten gelten dann die nämlichen Grundsätze. So können wir z. B. das Verhalten zweier Stoffpunkte berechnen unter der Annahme, dass sie allein existieren.

Die Eigenschaft der Schöpfung als Kunstwerk verlangt, dass unter den Stoffpunkten Verschiedenheit besteht. Damit ist nicht gesagt, dass sämtliche Stoffpunkte von einander verschieden sein müssten. In diesem Fall wäre es den Vernunftwesen erschwert oder gar unmöglich gemacht, die Welt zu beherrschen. Jedes Beherrschen setzt nämlich genaue Kenntnis des zu beherrschenden Objektes voraus. Wollen wir uns z. B. einen Magneten als Kompass dienstbar machen, dann müssen wir vorher seine Eigenschaften kennen lernen; dazu war die Erfahrung von Jahrhunderten notwendig. Würde nur ein einziger Magnet existieren, dann könnte man darauf nicht soviel Forschungsarbeit verwenden.

Deshalb erscheint es wünschenswert, dass für die Stoffpunkte nur eine begrenzte Anzahl von Typen existiert, dass sich aber jeder Typus in zahlreichen Individuen verwirklicht findet. Nur dann

[1]) Um für unser Vorstellungsvermögen einigermassen den Zusammenhang zwischen den Stoffpunkten und der realen Welt herzustellen, können wir bildlich die Stoffpunkte mit den Schwerpunkten der Atome identifizieren.

rentiert es sich, die Typen genau kennen zu lernen. Für unsere Zwecke genügt folgende Forderung:

3. Grundsatz. Es existieren Stoffpunkte, die einander völlig gleich sind und genau den gleichen Gesetzen gehorchen.

Die vielen Einzelwesen der Schöpfung sollen sich zu einer Einheit zusammenschliessen, d. h. sie müssen zu einander in Beziehung treten, mit einander verkehren. Unter Verkehr verstehen wir hier alle Arten von wechselseitiger Beziehung, also alle physikalischen, chemischen, physiologischen etc. Wirkungen.

II. Der Abstand.

Eine grosse Menge von Einzeldingen bietet dem betrachtenden Geiste nur dann ein einheitliches Bild, wenn sie gegliedert ist. Tatsächlich finden wir in der Schöpfung eine Gliederung, im grossen wie im kleinen. Das Weltall zerfällt in Sonnensysteme, ein Sonnensystem in Sonne und Planeten. Die Gliederung setzt sich bis ins kleinste Detail hinein fort. Jede Pflanze besteht aus Teilen, und selbst die kleinsten selbständigen Wesen, die Molekeln, gliedern sich in Atome und Elektronen.

Nachdem der Schöpfer von Anfang an die Einheit in der Vielheit zum Prinzip erhoben hatte, stand die Notwendigkeit der Gliederung vom ersten Augenblick an fest. Die spezielle Art der Gliederung muss in diesem Anfangsstadium des Weltprojektes noch unentschieden bleiben. Nur die Möglichkeit einer beliebigen Gliederung muss einstweilen gefordert werden. Wir verlangen also, dass sich die Stoffpunkte beliebig in Gruppen und Untergruppen teilen lassen, und dass jede Untergruppe wieder in beliebig viele Abstufungen weiter zerlegt werden kann.

Die Gliederung soll nicht bloss eine gedachte sein, sondern objektive Bedeutung haben. Darum müssen die Glieder einer Gruppe im allgemeinen untereinander in engerem Verkehr stehen als mit fremden Stoffpunkten. Der engere Verkehr ist ja in unserem Fall das einzige zu Gebote stehende Mittel, um Gruppen zu bilden und als Einheiten zu charakterisieren. Die Gruppe soll eine Welt im kleinen darstellen, sie soll in sich geschlossen sein und nach aussen wie ein einheitliches Wesen handelnd auftreten. Die Glieder einer Untergruppe hinwiederum müssen im allgemeinen unter sich in engerem Verkehr stehen als Stoffpunkte, die verschiedenen Untergruppen angehören.

Diese Forderungen stellen wir aber nur im allgemeinen. In speziellen Fällen kann ein Stoffpunkt mit fremden Stoffpunkten in engerem Verkehr stehen als mit Stoffpunkten der eigenen Gruppe. Wenn sich z. B. ein Komet im Perihel befindet, steht er mit der Sonne in engerem Kräfteverkehr als Jupiter und Neptun, und dennoch gehören letztere zum Sonnensystem, während der Komet ein Fremdkörper ist. Wir verlangen also nur im allgemeinen, dass Glieder einer Gruppe untereinander in engerem Verkehr stehen als mit fremden Stoffpunkten. Ausnahmen lassen wir zu. Mit anderen Worten: Wir verlangen prinzipiell die Möglichkeit den Verkehr abzustufen.

Da die Gliederung der Stoffpunkte nach unten hin beliebig fortgesetzt werden kann, muss sich der Verkehr in einer grossen Anzahl von Intensitätsgraden vollziehen. Wie viele Intensitätsgrade erforderlich sind, lässt sich a priori nicht angeben, und deshalb verlangen wir, dass sich zwischen zwei Verkehrsgrade immer wieder eine Zwischenstufe einschalten lässt, dass es also unbegrenzt viele Verkehrsgrade gibt.

Eine besondere Ueberlegung erfordert die Frage, ob die Skala der Verkehrsgrade nach oben und nach unten begrenzt ist. Ein Mindestverkehr ist offenbar zwischen solchen Stoffpunkten vorhanden, die mit einander in gar keinem Verkehr stehen, die also keinerlei Kräfte aufeinander ausüben. Nach den heutigen naturwissenschaftlichen Anschauungen tritt dieser an sich mögliche Fall niemals ein. Er liegt auch nicht in der Absicht des Schöpfers, weil die Stoffpunkte nur durch den gegenseitigen Verkehr zu einem Ganzen verknüpft werden. Durch das Fehlen solcher Verkehrsverbindungen würde die Einheit der Schöpfung leiden. Wir fordern also, dass zwischen zwei beliebigen Stoffpunkten irgend ein Verkehr besteht, mag er noch so geringfügig sein. Dann ist zu jeder Intensitätsstufe des Verkehrs eine noch niedrigere Stufe logisch denkbar, und wir haben keinen Grund die Skala nach unten hin willkürlich zu begrenzen. Wir fordern vielmehr, dass eine solche Grenze nicht bestehen soll, oder mit anderen Worten:

4. Grundsatz. Zu jeder Intensitätsstufe des Verkehrs existiert eine noch geringere Verkehrsintensität.

Auch eine obere Grenze der Verkehrsintensität ergibt sich von selbst, d. h. eine derartige Intensität, dass eine weitere Steigerung nicht mehr denkbar ist. Diese Höchststufe liegt vor, wenn zwei Stoffpunkte zu einer metaphysischen Einheit vereinigt werden und aus den zwei Stoffpunkten gleichsam ein einziger wird. Man denke hier an die Vereinigung von Leib und Seele oder an die stoffliche Durchdringung, welche nach der alten Ansicht bei chemischen Verbindungen stattfindet. Nach der neueren Auffassung tritt allerdings in keinem Fall eine Durchdringung zwischen materiellen Körpern ein. Die Vereinigung von Leib und Seele können wir hier nicht berücksichtigen, weil die Seele nicht den Gesetzen der gewöhnlichen Stoffpunkte unterworfen ist. Deshalb lässt sich nicht behaupten, dass in der ausgeführten Schöpfung das begriffliche Höchstmass des Verkehrs wirklich vorkommt. Es liegt aber kein Zweckmässigkeitsgrund vor, dieses Höchstmass von vornherein auszuschliessen. Wir fordern also die Zulässigkeit dieser höchstmöglichen Verkehrsstufe, oder mit anderen Worten:

5. Grundsatz. Es existiert in der Verkehrsskala eine Höchststufe derart, dass ein intensiverer Verkehr logisch unmöglich ist.

Die verschiedenen Intensitätsgrade des Verkehrs wollen wir nummerieren und zwar derart, dass wir bei der höchsten Stufe zu zählen beginnen. Sie sei mit Null bezeichnet. Allen übrigen Stufen ordnen wir positive Zahlen zu. Zunächst wählen wir eine beliebige Anzahl von Intensitätsstufen aus und numerieren sie mit ganzen Zahlen. Steigenden Zahlen mögen abnehmende Intensitätsgrade entsprechen. Die Zahlenreihe lässt sich nach obenhin unbegrenzt erweitern, weil nach dem 4. Grundsatz die Intensitätsskala nach unten unbegrenzt ist. Solchen Intensitäten, die ihrer Grösse nach zwischen zwei bereits numerierten Intensitäten liegen, ordnen wir zwischenliegende Brüche zu: z. B., einer Intensität, die zwischen 2 und 3 liegt, den Bruch 2,5 und weiterhin einer Intensität zwischen 2,5 und 3 den Bruch 2,7. So lässt sich jeder Verkehrsintensität eine bestimmte positive Zahl zuordnen und jeder positiven Zahl eine bestimmte Verkehrsintensität. Die so festgelegten Zahlen wollen wir den Abstand der zwei betreffenden Stoffpunkte nennen. Haben zwei Stoffpunkte den Abstand Null, dann sagen wir, sie fallen zusammen.

Der Abstand ist seinem Wesen nach nichts anderes als der gewöhnliche geometrische Abstand. Quantitativ aber besteht ein Unterschied. Unsere Abstandszahlen sind bis zu einem gewissen Grad willkürlich gewählt und haben nur die Bedeutung von Ordnungszahlen, d. h., sie lassen erkennen, welcher von zwei Abständen der grössere ist, nicht aber, um wie viel er grösser ist. Wir dürfen z. B. nicht behaupten, dass der Abstand vier doppelt so gross sei als der Abstand zwei. Ebensowenig dürfen zwei Abstände addiert oder subtrahiert werden, selbst wenn sie in einer Geraden liegen. Vorläufig fehlt uns noch der Begriff der Geraden, und aus diesem Grunde müssen wir uns einstweilen mit den willkürlichen Abstandszahlen begnügen.

Der Abstand ist seinem Wesen nach massgebend für den ganzen Verkehr, d. h. für alle gegenseitigen Beziehungen und Einwirkungen der Stoffpunkte. Je kleiner der Abstand, desto grösser die eventuelle Anziehung oder Abstossung, desto intensiver die gegenseitige Licht- und Schallwirkung, desto bedeutender die Erwärmung oder Abkühlung. Sämtliche Wirkungen wachsen, wenn der Abstand kleiner wird, und sämtliche Wirkungen nehmen ab, wenn der Abstand steigt. Der Abstand ist also die fundamentalste Grösse; er ist auch die Grundlage des Raumbegriffes.

Wir haben den Abstand als eine Grösse definiert, von welcher die Intensität aller Wirkungen abhängt. Welcher Art diese Wirkungen sind, darüber entscheidet der Abstand vorläufig nichts. Es kann eine Wirkung allein eintreten oder mehrere verschiedenartige Wirkungen zugleich. Ehe der Schöpfungsplan zur Ausführung kam, musste natürlich über die Art und Zahl der Wirkungen eine Entscheidung getroffen werden. Vorläufig kann die Entscheidung verschoben werden, und in dieser Abhandlung können wir überhaupt davon absehen.

Dadurch gewinnt der Abstandsbegriff etwas von den Wirkungen Unabhängiges. Wir können von den Wirkungen ganz abstrahieren und nur den Begriff der Zahlengrösse beibehalten, die einer Gruppe von zwei Stoffpunkten zukommt und im Bedarfsfalle vom Schöpfer zur Abstufung der gegenseitigen Wirkung verwendet werden kann, aber nicht verwendet werden muss. Der Abstand wird damit eine selbständig existierende Grösse. Ob diese Grösse bei der schöpferischen Verwirklichung des Weltplanes reelle Existenz erhalten oder eine blosse Rechnungsgrösse bleiben soll, braucht hier noch nicht entschieden zu werden. Jedenfalls verlangen wir, dass ein Abstand ohne Wechselwirkung der Stoffpunkte keinen logischen Widerspruch bedeutet Wir fordern mit anderen Worten:

6. Grundsatz. Es sind Stoffpunkte möglich, die von einander einen beliebig verlangten Abstand haben und keine Wirkung auf einander ausüben.

Wir verlangten weiter oben, dass die Glieder einer Gruppe im allgemeinen miteinander in engerem Verkehr stehen als mit fremden Stoffpunkten. Die Forderung lässt sich nun dahin formulieren, dass die Glieder einer Gruppe im allgemeinen gegeneinander kleinere Abstände haben als gegen fremde Stoffpunkte. Doch gilt diese Forderung nur im allgemeinen, wie schon oben betont. Sie gestattet Ausnahmen, und daher können wir keinen diesbezüglichen Grundsatz aufstellen. Eine Gewehrkugel z. B. bildet in der Lunge einen Fremdkörper, und doch liegt sie den beteiligten Lungenpartien viel näher als die übrigen Körperteile. Die Glieder einer Gruppe können sehr weit voneinander abstehen, und es besteht kein Anlass, hierfür eine obere Grenze aufzustellen. Wir können für die inneren Abstände einer Gruppe überhaupt keine Vorschrift geben. Jede beliebige Kombination von Stoffpunkten dürfen wir als Gruppe bezeichnen und als solche behandeln, weil möglicherweise gerade diese Kombination einmal sich als zweckmässig erweisen wird. Deshalb fordern wir:

7. Grundsatz. Beliebig gewählte Stoffpunkte können als eine Gruppe betrachtet werden, gleichgültig, welches ihre gegenseitigen Abstände sind.

Die Einteilung in Gruppen soll indes nicht starr sein. Die Stoffpunkte einer Gruppe sind nicht a priori für einander bestimmt; sie können sich vielmehr nach Bedarf dieser oder jener Gruppe anschliessen. Jedem Stoffpunkt bleibt die Möglichkeit gewahrt, mit jedem anderen abwechselnd in engeren und weiteren Verkehr zu treten. Die Gruppen werden zu bestimmten Zwecken gebildet und solange aufrecht erhalten, bis ihr Zweck erreicht ist. Dann gruppieren sich die Stoffpunkte neu, und zwar so, wie es der neue Zweck erfordert. Solche Stoffpunkte, die bisher im engsten Verkehr standen, lockern ihre Beziehungen; andere, die sich bisher fremd waren, steigern ihren gegenseitigen Verkehr. Der Abstand zweier Stoffpunkte ist also eine veränderliche Grösse.

Damit soll nicht gesagt sein, dass sich alle vorhandenen Abstände zugleich und fortwährend ändern. Wir verlangen vielmehr: In einem gegebenen Augenblick muss sich die Aenderung auf einen relativ kleinen Teil der Abstände beschränken. Die Mehrzahl der Stoffpunkte muss ihre gegenseitigen Abstände beibehalten. Wir fordern also die Existenz starrer Systeme, d. h., solcher Gruppen, die eine Zeitlang ihre inneren Abstände nicht ändern. Solche starre Systeme sind offenbar notwendig zur Orientierung und ferners zu überlegtem, zweckmässigem Gebrauch der Stoffe. Unser Erdkörper ist ein solches starres System. Die Wohnhäuser, Strassen, Bahnlinien, Flüsse, Brücken und Unterführungen bilden festliegende Punkte und starre Linien im starren System des Erdkörpers. Dieses System prägen wir dem Gedächtnis ein und damit finden wir unsere Wege. Auch unsere Werkzeuge bilden starre Systeme. Sie behalten dauernd die Form, welche sie bei der Anfertigung erhalten und für ihren speziellen Zweck benötigen. Die Brauchbarkeit der Werkzeuge beruht auf ihrer Starrheit. Manche Werkzeuge, wie z. B. die Scheere, bestehen aus mehreren starren Systemen, die gegen einander beweglich sind. Sobald übrigens die Werkzeuge und die übrigen starren Systeme ihren Zweck oder ihre Brauchbarkeit verlieren, kann ihre Starrheit wieder aufgehoben werden.

III. Abstandsändernde Ursachen.

Der Abstand zwischen zwei Stoffpunkten ändert sich in der geschaffenen Welt auf verschiedene Ursachen hin. Da sind in erster Linie die anziehenden und abstossenden Kräfte zu nennen. Aber auch ohne Kräfte kann sich der Abstand ändern infolge des Beharrungsvermögens der Körper. Das Beharrungsvermögen hat zur Folge, dass sich ein Körper nach dem Aufhören der Kraftwirkung in geradliniger Bahn mit konstanter Geschwindigkeit weiterbewegt, dass sich also die Abstände ohne die Tätigkeit von Kräften weiter verändern. Eine solche kräftefreie Abstandsänderung setzt indessen eine zeitlich vorangehende Tätigkeit von Kräften voraus und kann als eine Nachwirkung der Kräfte betrachtet werden. Wir wollen daher die unmittelbare Wirksamkeit der Kräfte und das hierdurch ausgelöste kräftefreie Bewegungsvermögen zusammenfassen unter die Bezeichnung: Abstandsändernde Ursachen.

In der Natur unterliegt ein Stoffpunkt regelmässig zu gleicher Zeit dem Einfluss mehrerer abstandsändernder Ursachen. Immer jedoch lässt sich die Wirkung mehrerer Ursachen zerlegen in Einzelwirkungen zwischen je zwei Stoffpunkten. Diese Einzelwirkungen, die allein uns beschäftigen sollen, teilen wir in direkte und indirekte Abstandsänderungen ein. Direkt nennen wir die Abstandsänderung zwischen zwei Stoffpunkten, wenn sie durch gegenseitige Anziehung oder Abstossung erfolgt, also ohne Mitwirkung eines dritten Stoffpunktes. Hierher gehört auch diejenige Trägheitsbewegung, welche durch direkte Ursachen hervorgerufen wird und nach dem Aufhören dieser Kräfte oder noch während ihrer Tätigkeit in Erscheinung tritt.

Indirekt heisse dagegen eine Abstandsänderung, wenn einer der Stoffpunkte A oder B mit einem dritten Stoffpunkte C in Wechselwirkung tritt. Es mögen sich z. B. A und C gegenseitig anziehen und sich einander nähern. Während sich nun A bewegt, bleibt B in Ruhe, und der Abstand zwischen A und B ändert sich, ohne dass zwischen diesen beiden Stoffpunkten eine direkte Kraftwirkung bestände; es liegt also eine indirekte Abstandänderung vor. In diese Klasse von Bewegungen gehört auch jene Trägheitsbewegung, die durch indirekte Kräfte hervorgerufen wird. Offenbar sind die indirekten Abstandsänderungen abhängig von den direkten. Nur dadurch, dass zwischen A und C oder zwichen B und C eine direkte Abstandsänderung erfolgt, ändert sich indirekt auch der Abstand zwischen A und B.

Den direkten Ursachen wollen wir die beiden beteiligten Stoffpunkte als Sitz zuweisen. Statt dieses Ausdruckes wollen wir auch sagen: Die Ursache ist in beiden Punkten tätig. Nun können wir den Unterschied zwischen direkten und indirekten Ursachen folgendermassen formulieren: Eine Abstandsänderung zwischen zwei Stoffpunkten ist direkt, wenn die wirkende Ursache in beiden Stoffpunkten ihren Sitz hat. Die Aenderung ist indirekt, wenn die Ursache nur in einem der beiden Stoffpunkte und ausserdem in einem dritten Stoffpunkt ihren Sitz hat.

Soviel über die tatsächlichen Verhältnisse in der geschaffenen Welt. Nun versetzen wir uns wieder in jene Zeit zurück, wo die Welt noch nicht existierte und der Schöpfer eben daran war, den Weltplan zu entwerfen. Ohne weiteres selbstverständlich war es, dass er folgenden Grundsatz aufstellte:

8. Grundsatz. Der Abstand zweier Stoffpunkte ändert sich nicht, wenn keiner der beiden Stoffpunkte Sitz einer abstandsändernden Ursache ist.

Von den abstandsändernden Ursachen sind die direkten am wichtigsten, weil ohne sie auch keine indirekte Abstandsänderung erfolgen könnte. Es handelt sich vorläufig nicht darum, die direkten Ursachen zu spezifizieren, also Kräfte oder Beharrungsvermögen oder sonstige Ursachen festzulegen und ihre Gesetze aufzustellen. Wir fordern vielmehr nur die prinzipielle Möglichkeit solcher Ursachen. Ursachen, welche den Abstand verringern, nennen wir anziehende, solche, die den Abstand vergrössern, mögen abstossende Ursachen heissen.

Die in der Schöpfung existierenden indirekten Abstandsänderungen dürfen wir nicht als etwas Selbstverständliches ansehen. Es wäre ein Irrtum, sie als eine notwendige Folge der direkten Abstandsänderungen zu betrachten. A priori bilden die Abstände lauter von einander unabhängige Grössen. Solange der Schöpfer ihre Unabhängigkeit nicht durch irgendwelche Bestimmungen einschränkt, lässt sich einer der Abstände ändern, ohne dass sich andere gleichfalls ändern müssten. Wenn der Schöpfer die gegenseitige Unabhängigkeit der Abstände aufhob, mussten hierfür Zweckmässigkeitsgründe vorliegen.

Ein Beispiel möge uns diese Gründe veranschaulichen. Wenn wir schreiben, dann führt unsere Hand die Feder. Schreibpapier und Feder sollen einander genähert werden bis zur Berührung. Der Abstand zwischen Papier und Feder muss so klein werden, dass die Tinte aus der Feder an die Schreibfläche gesaugt wird. Die Annäherung erfolgt nicht durch Ursachen, die in Papier und Feder ihren Sitz haben, also nicht durch direkte Ursachen. Zu einer gegenseitigen Annäherung durch direkte Ursachen können wir Papier und Feder nicht veranlassen. In der fertigen Schöpfung gehören die Kräfte, die in den leblosen Körpern ihren Sitz haben, zum Wesen der Körper und sind vom Schöpfer ein für allemal festgelegt. Nur die Bewegungen unseres Körpers gehorchen unserem Willen. Wenn wir also den Abstand zweier Gegenstände ändern wollen, müssen wir zur indirekten Abstandsänderung greifen. Das geschieht tatsächlich beim Schreiben, denn die Annäherung zwischen Papier und Feder erfolgt durch Vermittlung eines dritten Körpers, nämlich durch die schreibende Hand. Indem sich die Hand der Schreibfläche nähert, nimmt auch der Abstand zwischen Federhalter und Schreibfläche ab. Letztere Abstandsänderung ist offenbar indirekt. Hätte der Schöpfer auf indirekte Ursachen verzichtet, dann wäre der Fall denkbar, dass die Hand gleichzeitig Federhalter und Schreibfläche berührt und trotzdem Federhalter und Schreibfläche kilometerweit von einander entfernt bleiben.

Sehen wir von diesem speziellen Beispiel ab, dann können wir allgemein sagen: Um die Welt beherrschen zu können, brauchen wir Menschen die Fähigkeit, zwei beliebige Gegenstände in einen gewünschten gegenseitigen Abstand von einander zu bringen. Das kann aber nur durch indirekte Ursachen geschehen. Aus diesem Grunde nahm der Schöpfer in seinen Weltplan die Forderung auf, dass sich ein Stoffpunkt unter dem Einfluss indirekter Ursachen in jeden gewünschten Abstand von einem zweiten Stoffpunkt bringen lässt. Dabei wird nicht vorausgesetzt, dass der zweite Stoffpunkt ohne Kräfte ist. Er darf vielmehr selbst Sitz von Kräften sein und mit anderen Punkten in Wechselwirkung stehen. Wir passen eben in diesem Fall die auf den zweiten Punkt wirkenden Kräfte der Bewegung des ersten Punktes an. Man erinnere sich beispielshalber, dass wir mitsamt Schreibtisch und Schreibpapier die Bewegung der

Erdkugel mitmachen. Trotzdem vermögen wir die Federspitze einem bestimmten Punkt der Schreibfläche zu nähern. Wir fordern also:

9. Grundsatz. Dem Abstand zweier Stoffpunkte lässt sich durch abstandsändernde Ursachen, die in einem der Punkte und in fremden Punkten ihren Sitz haben, jeder gewünschte Wert erteilen.

Nach unserer Darstellung tritt eine indirekte Abstandsänderung nur auf, wenn von den zwei beteiligten Stoffpunkten wenigstens einer mit weiteren Stoffpunkten in direkter Wechselwirkung steht. Wenn also die Stoffpunkte einer Gruppe mit keinem fremden Stoffpunkt in direkter Wechselwirkung stehen, bleiben die inneren Abstände der Gruppe und die inneren Abstandsänderungen von allen äusseren Vorgängen unbeeinflusst. Eine solche Beeinflussung liesse sich durch nichts rechtfertigen. Man stelle sich z. B. vor, die Bücher einer Bibliotehek würden plötzlich zu wandern beginnen und ihre gegenseitigen Abstände verändern bloss deshalb, weil in einer anderen Bibliothek die Bücher umgestellt werden. Wir müssen offenbar die gegenseitige Unabhängigkeit zweier Gruppen fordern, solange keine wechselseitigen abstandsändernden Ursachen vorliegen. Um diese Forderung exakt formulieren zu können, wollen wir folgende Bezeichnungen definieren. Innere Abstände einer Gruppe mögen alle jene Abstände heissen, die zwischen Stoffpunkten der Gruppe bestehen. Alle übrigen wollen wir äussere Abstände nennen, also sowohl jene, die zwischen einem Stoffpunkt der Gruppe und einem fremden Stoffpunkt bestehen, als auch jene, welche zwichen fremden Stoffpunkten untereinander vorhanden sind. In anologer Bedeutung wollen wir die Ausdrücke innere und äussere Abstandsänderung gebrauchen. Wenn kein Stoffpunkt der Gruppe mit einem fremden Stoffpunkt durch eine direkte abstandsändernde Ursache verbunden ist, nennen wir die Gruppe abgeschlossen. Nun können wir die obige Forderung folgendermassen formulieren:

10. Grundsatz. Die inneren Abstände und Abstandsänderungen einer abgeschlossenen Gruppe sind von allen äusseren Abständen und Abstandsänderungen unabhängig.

Die gegenseitige Abhängigkeit der Abstände ist die Vorbedingung jeder Geometrie. In der euklidischen wie in allen anderen Geometrien hängen die Abstände nach gewissen mathematischen Formeln zusammen und durch die Wahl der Formeln wird die Art der Geometrie bestimmt. Die euklidische Geometrie hat andere Formeln als die elliptische und diese wiederum andere als die parabolische Geometrie. In jeder Geometrie sind gewisse Abstandskombinationen möglich, andere unmöglich. Damit gelangen wir zum Begriff des geometrisch Möglichen. Wir definieren:

Irgend eine Annahme heisse geometrisch möglich, wenn sie nicht unseren bisherigen und den später noch folgenden Forderungen betr. gegenseitige Abhängigkeit der Abstände widerspricht. Eine geometrisch möglicher Vorgang braucht nicht notwendig auch physikalisch möglich zu sein.

Aus dem eben aufgestellten Grundsatz lässt sich nun folgender Satz ableiten:

Satz: Gibt es eine Anzahl von Stoffpunkten, deren jeder für sich allein in bestimmt vorgeschriebenen Abständen von den Stoffpunkten einer Gruppe geometrisch möglich ist, dann besteht auch die geometrische Möglichkeit, dass alle diese Stoffpunkte gleichzeitig existieren und die vorgeschriebenen Abstände einhalten.[1])

IV. Stetige Abstandsänderung.

Wegen der Veränderlichkeit der Gruppierung befindet sich die Welt in ständiger Entwicklung. Die Schöpfung bietet immer wieder ein neues Bild. Zwischen den Bildern, die einander ablösen, muss aus künstlerischen Gründen ein Zusammenhang bestehen. Das Weltgeschehen darf nicht eine zusammenhanglose Reihe von Bildern darstellen. Wie in einem kunstvoll angelegten Drama muss ein Bild aus dem anderen hervorgehen. Jedes Bild muss aus dem vorausgehenden herauswachsen, wie die Pflanze aus dem Samenkorn und die Blüte aus der Knospe, d. h. die Ueberführung eines Bildes in das folgende muss durch stetige, nicht durch sprungweise Aenderung erfolgen. Andernfalls hätten wir nicht einen Uebergang, sondern eine Zerstörung des vorhandenen Bildes und eine Neuschaffung der folgenden Szenerie. Die in der Welt existierenden messbaren Grössen dürfen sich also nur stetig ändern.

Hierdurch kommt zugleich die substanzielle Identität der Stoffpunkte zum Ausdruck und zu unserer Kenntnis, während sich die messbaren Grössen, wie Abstand, Form, Temperatur, als Akzidenzien darstellen.

Ein Abstand kann also nur dadurch in einen anderen übergehen, dass er alle zwischenliegenden Werte der Reihe nach annimmt. Das bietet uns den Vorteil, dass wir kommende Veränderungen rechtzeitig voraussehen. Ein feindliches Wesen, das sich uns nähern will, erreicht uns nicht momentan. Sobald es anfängt, uns in die Nähe zu kommen, können wir ausweichen oder Gegenmass-

[1]) Der Beweis für diesen Satz lässt sich folgendermassen führen: Die gegebene Gruppe sei G und die Stoffpunkte mit den vorgeschriebenen Abständen seien A_1, A_2 etc. Nun kann A_1 nach unsern Voraussetzungen für sich allein in den verlangten Abständen von den Stoffpunkten der Gruppe G existieren. Keiner der Stoffpunkte möge Sitz einer abstandsändernden Ursache sein. Nun rechnen wir G und A_2 zu einer einheitlichen Gruppe G_2, und diese ist unabhängig von A_1 nach dem 10. Grundsatz. A_2 kann also neben A_1 in den verlangten Abständen existieren. In gleicher Weise können wir bei den weiteren Stoffpunkten A_3, A_4 etc. vorgehen.

regeln treffen. Der Soldat kann dem Säbelhieb des Feindes ausweichen oder ihn parieren; gegen eine Gewehrkugel ist er machtlos, weil sie zu rasch herankommt. Bei sprungweiser Annäherung oder Entfernung würde sich unsere Umgebung blitzartig ändern. Ganz unvermittelt würden Gegenstände erscheinen und ebenso unvermittelt wieder verschwinden, ohne dass wir wüssten, woher und wohin. Wir fordern also:

11. Grundsatz. Alle Abstände sind stetige Funktionen der Zeit.

Diese Forderung genügt aber nicht, sondern bedarf zu ihrer Ergänzung eines weiteren Grundsatzes. Ehe wir denselben angeben, wollen wir den Begriff des Umweges formulieren. Zwei Stoffpunkte A und B mögen den Abstand c haben. Ferners existiere ein dritter Stoffpunkt C, welcher gegen A und B die Abstände a bezw. b hat. Nun wollen wir B durch indirekte Ursachen bewegen. Einmal möge B unmittelbar nach A bewegt werden, ein anderes mal zuerst nach C und von da nach A. Die Summe $a+b$ der zwei letzteren Abstände möge ein Umweg heissen. Wir können also B unmittelbar oder auf einem Umweg nach A bringen.

Es ist a priori möglich, dass der Umweg $a+b$ kleiner wird als der unmittelbare Weg c. Vielleicht lässt sich sogar der Umweg durch geeignete Wahl des Umwegpunktes C beliebig klein machen. Dann kann B seinen Weg nach A durch Wahl eines geeigneten Umweges beliebig stark abkürzen. Es kann bei gleicher Kraftanstrengung in beliebig kurzer Zeit nach A gelangen und dort völlig unerwartet ankommen. Es wäre also der Zweck des eben aufgestellten Grundsatzes zum Teil vereitelt. Deshalb verlangen wir, dass keine beliebig kurzen Umwege existieren. In der euklidischen Geometrie kann der Umweg $a+b$ nicht kürzer sein als der unmittelbare Weg c. Das wäre an sich die rationellste Forderung. Sie setzt aber das Vorhandensein eines entsprechenden Massystems voraus und kann nicht für jedes willkürlich gewählte Massystem Geltung haben. Wir besitzen einstweilen nur ein willkürliches System und müssen darum von einer vollständigen und zahlenmässigen Formulierung der angedeuteten Forderung absehen.

Für unsere Zwecke genügt es einen Spezialfall herauszugreifen, zu dessen Regelung auch unser willkürliches Massystem genügt. Wir fordern nämlich, dass bei unbegrenzter Steigerung des Abstandes c auch der Umweg $a+b$ unbegrenzt steigt. Würde für den Umweg eine obere Grenze g existieren, dann könnte jeder noch so grosse Abstand a durch einen Umweg ersetzt werden, der kleiner ist als g. Wir fordern also:

12. Grundsatz. In einer aus drei Stoffpunkten bestehenden Gruppe steigt die Summe zweier Abstände über eine beliebig vorgeschriebene Grösse, wenn wir den dritten Abstand genügend gross machen.

V. Die Bewegung starrer Körper.

Von starren Körpern verlangen wir, dass wir ihre Abstände von anderen Körpern ändern können, ohne hierdurch ihre Starrheit aufzuheben. Wenn aber diese Bewegung eines starren Systems überblickt und zweckmässig geleitet werden soll, dann dürfen die Bahnen der einzelnen Punkte nicht ein wirres Durcheinander bilden. Die Bahnen benachbarter Punkte dürfen nicht zu sehr von einander verschieden sein. Kleine Körperchen betrachten wir bei der Bewegung als einzelne Stoffpunkte. Alle Atome eines solchen Körpers haben von einem entfernten äusseren Stoffpunkt fast den gleichen Abstand und bei der Annäherung an das Ziel ändern sich die Abstände ziemlich gleichmässig. Bei einem stabförmigen Körper, z. B. bei einem Zeigestab, sind die Abstände von äusseren Punkten stärker gegeneinander verschieden. Es genügt aber, bei der Bewegung des Zeigestabes das obere und das untere Ende, also zwei Stoffpunkte, im Auge zu behalten und ihre Bewegung zu dirigieren. Die der Spitze benachbarten Stoffpunkte ahmen die Bewegung der Spitze nach, die in der Nähe des Griffes liegenden die Bewegung des Griffes. Je weiter ein Stoffpunkt von der Spitze wegliegt, desto mehr differiert seine Bahn von der Bahn der Spitze und desto mehr nähert sie sich der Bahn des unteren Endpunktes. Die Entfernung eines Stoffpunktes von dem äusseren Zielpunkt ist eine stetige Funktion seines Abstandes von der Spitze. Wäre die Funktion unstetig, dann könnte der Fall eintreten, dass ein Atom bereits ans Ziel gelangt, während sein unmittelbarer Nachbar noch meilenweit davon entfernt ist. Es könnte ferner der Fall eintreten, dass wir die Spitze langsam und vorsichtig der Landkarte nähern, und dass gleichzeitig die mittleren Partien des Zeigestabs einen Ausflug machen und hierbei das Fenster einschlagen oder in die Sonne gelangen und dort verbrennen.

Solche Vorfälle wären allerdings nicht zufällig. Um sie jedoch zu verhüten, müssten wir jedes einzelne Atom im Auge behalten. Wir müssten die Bewegung jedes einzelnen Atoms im voraus berechnen, ehe wir es wagen könnten, zum Zeigestab zu greifen. Zu einer solchen Rechnung würde ein Menschenleben nicht ausreichen. Man erinnere sich nur, dass ein Kubikzentimeter eines Stoffes Trillionen von Atomen enthält. Einfacher wäre es noch, durch vorsichtiges Probieren die richtige Bewegung ausfindig zu machen. Aber auch damit kämen wir an kein Ende bei der Vielheit und Verschiedenheit der denkbaren Bewegungen. Wer würde endlich dafür garantieren, dass sich unter den möglichen Bewegungen des Zeigestabes wenigstens e i n e befindet, bei welcher keines der Atome einen unbeabsichtigten Schaden anrichtet.

Eine zweckmässige Bewegung und wirksame Ueberwachung des Stabes ist nur dann ausführbar, wenn die Abstände seiner Stoffpunkte von einem äusseren Stoffpunkt untereinander einen stetigen Uebergang zeigen. Wir fordern also: Die Abstände der Stoffpunkte eines starren Systems von einem äusseren Stoffpunkt sind stetige

Funktionen ihrer Abstände von jedem Stoffpunkt des starren Körpers.

Die Folge davon ist, dass zwei zusammenfallende Stoffpunkte in ihren Abständen von allen übrigen Stoffpunkten übereinstimmen. Unterschieden sich nämlich zwei zusammenfallende Stoffpunkte A und C in ihren Abständen a und c von einem äusseren Stoffpunkt um eine von Null verschiedene Grösse, dann würde aus der eben aufgestellten Forderung und aus dem Stetigkeitsbegriff folgen, dass ein Stoffpunkt B denkbar ist, welcher näher an A liegt als C. Das ist aber ausgeschlossen, weil der Abstand Null nach unserer Begriffsbestimmung nicht bloss den faktisch kleinsten Abstand bedeutet, sondern den kleinsten denkbaren Abstand. Somit fordern wir:

13. Grundsatz. Zwei zusammenfallende Stoffpunkte stimmen in ihren Abständen von allen übrigen Stoffpunkten überein.

Hieraus folgt unmittelbar der

Satz: Haben zwei Stoffpunkte von einem dritten den Abstand Null, dann haben sie auch unter sich den Abstand Null.

VI. Der Raum.

Wenn in einer Anzahl von Stoffpunkten keine abstandsändernden Ursachen tätig sind, dann behalten sie nach dem 8. Grundsatz ihre gegenseitigen Abstände bei. Nun können wir allerdings nicht mit Sicherheit annehmen, dass solche ursachenfreie Stoffpunkte in der ausgeführten Schöpfung existieren. Diese Annahme hat sogar die Wahrscheinlichkeit gegen sich. Wir dürfen aber nach dem 2. Grundsatz beliebig viele Stoffpunkte zu den wirklich existierenden hinzudenken. Von dieser Möglichkeit machen wir nun Gebrauch. Wir fingieren eine grosse Menge gedachter Stoffpunkte, welche dauernd ohne abstandsändernde Ursachen bleiben, also einen unveränderlich starren Körper bilden. Zum Unterschied von den wirklich existierenden Stoffpunkten mögen sie Raumpunkte oder kurz Punkte heissen. Alle geometrisch möglichen Raumpunkte fassen wir unter die Bezeichnung Raum zusammen.

Die Raumpunkte befolgen so gut wie die Stoffpunkte alle Grundsätze und unterscheiden sich von den Stoffpunkten nur dadurch, dass sie niemals Sitz einer Ursache oder Wirkung werden. Sie haben den Zweck, uns die Orientierung und die Beschreibung zu erleichtern. Nicht jeder gedachte ursachenfreie Punkt soll notwendig zu den Raumpunkten gehören, sondern nur jene, die eigens und ausschliesslich für den angedeuteten Zweck bestimmt sind. Die Anzahl der Raumpunkte sei von Anfang an sehr gross gewählt und kann jederzeit unbegrenzt vergrössert werden. Nach dem Satz, den wir am Schluss des III. Abschnittes aufgestellt haben, ist es gleichgültig, in welcher Reihenfolge wir neue Raumpunkte hinzufügen. Ein Raumpunkt, der für sich betrachtet geometrisch möglich ist, bleibt es auch, wenn wir zuvor beliebig viele andere Raumpunkte fixieren. Nur die einzige Einschränkung wollen wir machen, dass keine zwei Raumpunkte zusammenfallen dürfen. Von zusammenfallenden Raumpunkten lassen wir alle weg mit Ausnahme je eines einzigen. Von zwei zusammenfallenden Raumpunkten wäre der eine überflüssig, weil er nach dem 13. Grundsatz von allen wirklichen und gedachten Stoffpunkten die gleichen Abstände hätte wie der andere. Es wäre durch den zweiten Punkt für die Orientierung nichts gewonnen, und deshalb ist es zweckmässig, ihn ganz wegzulassen.

Ein Stoffpunkt hingegen kann von einem Raumpunkt den Abstand Null haben. Dann sagen wir, der Stoffpunkt liege oder er befinde sich in dem Raumpunkt. Jedoch kann ein Stoffpunkt nicht gleichzeitig in zwei oder mehr Raumpunkten liegen nach dem oben abgeleiteten Satz: Haben zwei Stoffpunkte von einem dritten den Abstand Null, dann haben sie auch unter sich den Abstand Null. Wenn also ein Stoffpunkt gleichzeitig in zwei Raumpunkten läge, dann hätten die zwei Raumpunkte den Abstand Null, was wir vorhin als unzulässig erklärt haben.

Liegt ein Stoffpunkt in einem gegebenen Raumpunkt, dann hat er nach dem 13. Grundsatz von allen wirklichen und gedachten Stoffpunkten die gleichen Abstände, wie der gegebene Raumpunkt. Daraus folgt weiterhin: Zwei Stoffpunkte haben den gleichen Abstand wie die Raumpunkte, in denen sie liegen.

Liegt ein Stoffpunkt eine Zeitlang im gleichen Raumpunkt, dann behält er nach dem 13. Grundsatz von allen Raumpunkten konstante Abstände, und wir sagen, er ruht. Das tritt ein, wenn entweder keine abstandsändernde Ursache auf ihn wirkt, oder wenn mehrere Ursachen vorhanden sind, deren Wirkungen sich gegenseitig aufheben. Aendert ein Stoffpunkt seine Abstände von einigen oder von allen Raumpunkten untereinander, heisse relative Besolute Bewegung oder kurz Bewegung. Die Abstandsänderung von Stoffpunkten untereinander, heisse relative Bewegung. Liegt ein Stoffpunkt bei Beginn einer Bewegung im Raumpunkt A und am Schluss im Raumpunkt B, dann sagen wir, er habe sich von A nach B bewegt. Auf Raumpunkte angewendet lautet der 9. Grundsatz: Jeder Stoffpunkt kann durch indirekte abstandsändernde Ursachen von jedem beliebigen Raumpunkt nach jedem andern Raumpunkt hinbewegt werden.

Hieraus lässt sich durch zwingende Schlüsse beweisen[1]): Zwei Raumpunkte können nicht in ihren Abständen von allen übrigen

[1]) Zum Beweis bewegen wir einen gedachten Stoffpunkt S nach A und von da nach B. S hat bei seiner Bewegung von A nach B anfänglich von A den Abstand Null, von B den Abstand AB. Letzterer Abstand ist von Null verschieden, da zwei Raumpunkte nicht voneinander den Abstand Null haben können. Da sich die Abstände stetig ändern, lässt sich ein Zeitpunkt t angeben, in welchem der Abstand AS noch kleiner ist als BS. In diesem Augenblicke mögen alle abstandsändernden Ursachen aufhören, und S behält von diesem

Raumpunkten übereinstimmen. Fernes: Zwei Stoffpunkte, oder ein Stoffpunkt und ein Raumpunkt fallen zusammen, wenn sie von allen Raumpunkten bezüglich gleiche Abstände haben. Weiterhin folgt[1]): Ein Stoffpunkt liegt jederzeit in einem Raumpunkt.

Der Raum ist nach unserer Darstellung nicht ein Schöpfungsprodukt des Weltbaumeisters, sondern ein Hilfsmittel, das wir uns selbst schaffen. An dieser Auffassung des Raumes wollen wir auch im folgenden festhalten. Der Raumbegriff wäre für unseren Zweck nicht unbedingt nötig, aber er erleichtert unsere Aufgabe und er vereinfacht namentlich die Formulierung der nachfolgenden Grundsätze. Die hohe Brauchbarkeit dieses Hilfsmittels ist dem Schöpfer nicht entgangen; durch geeignete Konstruktion unserer Sinne hat er uns den Gebrauch dieses Hilfsmittels nahegelegt. Der von uns wahrgenommene Raum ist allerdings ein Bewegtes, also etwas anderes wie der oben definierte absolute Raum. Nachdem wir aber mittelst sinnlicher Wahrnehmung die Vorstellung des Raumes gewonnen haben, ist uns der Weg geebnet zur Vorstellung des absolut ruhenden Raumes und zur Definition seines Begriffes.

Die Gesamtheit jener Raumpunkte, womit ein Stoffpunkt während einer Bewegung zusammenfiel, nennen wir seine Bahn.

Unter Benutzung dieses Ausdruckes können wir den 9. Grundsatz in seiner Anwendung auf Raumpunkte folgendermassen formulieren: Jeder Raumpunkt lässt sich mit jedem andern durch eine Bahn verbinden.

Wir wollen nun diesen Grundsatz erweitern und zwar zu dem Zweck, den Stoffpunkten eine möglichst grosse Bewegungsfreiheit zu sichern. Ohne nähere Begründung leuchtet die Zweckmässigkeit des folgenden Grundsatzes ein:

14. Grundsatz. Auf einer Bahn kann sich jeder beliebige Stoffpunkt zwischen beliebigen Punkten der Bahn hin und zurück bewegen, ohne einen zwischenliegenden Punkt zu überspringen.

Im Interesse der Bewegungsfreiheit müssen wir ferner fordern, dass sich zwei Raumpunkte nicht bloss durch eine einzige Bahn,

Zeitpunkt an nach dem 7. Grundsatz zu allen Raumpunkten unveränderliche Abstände. Somit ist auch ein Raumpunkt geometrisch möglich, der die gleichen Abstände hat wie S, und da der Begriff Raum alle geometrisch möglichen Raumpunkte in sich fasst, können wir sagen: Es existiert ein Raumpunkt C, der die gleichen Abstände hat wie S, der also näher bei A liegt als bei B. Somit ist bewiesen, dass A und B wenigstens von einem Raumpunkt ungleiche Abstände haben.

[1]) Zum Beweis entziehen wir dem betreffenden Stoffpunkt im entsprechenden Augenblick alle abstandsändernden Ursachen, dann bleiben seine Abstände von allen Raumpunkten unveränderlich. Es ist also ein Raumpunkt von solchen Abständen möglich und existiert darum. Dieser Raumpunkt stimmt mit dem gegebenen Stoffpunkt in den Abständen von allen Raumpunkten überein, also liegt der Stoffpunkt in dem Raumpunkt.

sondern durch beliebig viele Bahnen miteinander verbinden lassen. Es kann der Fall eintreten, dass ein Punkt der einen Bahn durch einen fremden Stoffpunkt besetzt ist, welcher den Weg in gewissem Sinne versperrt. Wir haben allerdings die Stoffpunkte nicht für undurchdringlich erklärt, und aus den bisherigen Definitionen und Grundsätzen lässt sich die Undurchdringlichkeit der Stoffpunkte nicht beweisen. Wenn jedoch ein Stoffpunkt gezwungen ist, auf seinem Weg durch einen andern hindurchzugehen, dann tritt er zu diesem in den denkbar engsten Verkehr, und es ist fraglich, ob dieser enge Verkehr mit diesem Stoffpunkt momentan zweckdienlich ist. Er bedeutet zum mindesten eine Ablenkung von dem eigentlichen Ziel, kann aber unter Umständen die Erreichung des Zieles ganz verhindern. Man denke z. B. den Fall, dass eine Stelle der Bahn durch glühend heisses Metall besetzt ist. Dann kann ein lebendes Wesen diese Stelle nicht passieren, ohne vernichtet zu werden. Es können also Umstände eintreten, die eine oder mehrere Punkte unpassierbar machen. Darum ist es erwünscht, dass immer wieder eine neue Bahn zur Verfügung steht und dass sich gefährliche Punkte umgehen lassen.

Es kann sogar vorkommen. dass nicht bloss einzelne Punkte, sondern eine ganze Bahn unpassierbar wird. So kann z. B. die ganze Bahn durch fremde Körper besetzt sein. Man denke an Flusslinien, Wasserleitungen, Telegraphendrähte. Auch die Eisenbahnlinien zählen hierher; sie sind zwar nicht beständig in allen ihren Punkten von Bahnzügen besetzt, aber sie müssen für die Züge reserviert bleiben, wenn Unglücksfälle vermieden werden sollen, und deshalb baut man Unterführungen. Solche Beispiele lassen erkennen, dass in vielen Fällen ganze Bahnen dem allgemeinen Verkehr entzogen werden müssen. Um trotzdem eine weitgehende Bewegungsfreiheit zu sichern, fordern wir:

15. Grundsatz. Ein Stoffpunkt lässt sich von jedem Raumpunkt zu jedem anderen Raumpunkt derart hinbewegen, dass eine beliebige Anzahl von Punkten und Bahnen nicht getroffen werden.

Unter den zu meidenden Bahnen können sich auch solche befinden, welche den gleichen Anfangs- und Endpunkt haben wie die neu zu bestimmende Bahn. Mit anderen Worten: Zwei beliebige Raumpunkte lassen sich durch beliebig viele Bahnen miteinander verbinden.

VII. Die Bewegung der Gruppen.

Die Aenderung der inneren Abstände einer Gruppe heisse innere Bewegung. Eine bestimmte innere Bewegung nennen wir möglich, falls wenigstens eine Gruppe diese innere Bewegung ausführen kann und zwar wenigstens von einer absoluten Anfangslage aus. Aus dem 14. Grundsatz folgt dann unmittelbar der Satz: Ist eine innere Bewegung möglich, dann kann sie von jeder Gruppe ausgeführt werden, welche die verlangte Anzahl von Stoffpunkten besitzt, und die gleiche Anfangslage hat.

Wir wollen aber die innere Bewegung einer Gruppe von ihrer absoluten Anfangslage möglichst unabhängig machen. Die Raumpunkte sind ja nur gedachte Punkte und können nicht in die Bewegung hemmend eingreifen. Darum ist folgende Forderung ziemlich selbstverständlich:

16. Grundsatz. Ist eine besimmte innere Bewegung möglich, dann ist sie für jede Gruppe geometrisch möglich, welche die verlangte Anzahl von Stoffpunkten besitzt, und zwar ist sie von jeder absoluten Anfangslage aus geometrisch möglich, in welcher die Stoffpunkte die verlangten inneren Abstände haben.

Dieser Grundsatz hat einen rein geometrischen Inhalt und behauptet nicht, dass in einer neuen absoluten Anfangslage auch die erforderlichen Bewegungsursachen vorhanden sind. Nun mögen auch die abstandsändernden Ursachen berücksichtigt werden. Jene Ursachen, welche in zwei Stoffpunkten einer Gruppe ihren Sitz haben, mögen innere Bewegungsursachen heissen. Nun folgt aus dem 10. Grundsatz, dass die absolute Bewegung einer abgeschlossenen Gruppe nur von der absoluten Anfangslage und von den inneren Bewegungsursachen abhängt. Nach dem 1. Grundsatz muss aber die Bewegung durch die vorhandenen Bewegungsursachen vollständig und eindeutig bestimmt sein[1]). So gelangen wir zu folgendem Grundsatz:

17. Grundsatz. Die absolute Bewegung einer abgeschlossenen Gruppe ist durch die absolute Anfangslage und durch die inneren abstandsändernden Ursachen vollständig und eindeutig bestimmt.

Durch die absolute Bewegung einer Gruppe ist natürlich auch deren innere Bewegung vollständig und eindeutig bestimmt. Nun können aber die Raumpunkte weder auf die innere, noch auf die absolute Bewegung von Einfluss sein, denn sie sind niemals Sitz abstandsändernder Ursachen. Es muss also die innere Bewegung schon durch die innere Anfangslage vollkommen und eindeutig bestimmt sein. Wir fordern also:

18. Grundsatz. Die innere Bewegung einer abgeschlossenen Gruppe ist durch die innere An-

[1]) Man könnte vielleicht denken, dass noch andere Faktoren die Bewegung beeinflussen, z. B. Wärme. Darauf ist jedoch zu bemerken, dass wir unter der Bezeichnung abstandsändernde Ursachen alle Ursachen zusammenfassen, welche einen Abstand zu ändern vermögen. Soll also irgend ein Faktor auf die Abstände von Einfluss sein, dann kann es nur dadurch geschehen, dass er die abstandsändernden Ursachen beeinflusst. So lange sich also die Bewegungsursachen nicht ändern, kann sich auch die Bewegung nicht in anderer Form abspielen.

fangslage und durch die inneren abstandsändernden Ursachen vollständig und eindeutig bestimmt.

Daraus folgt:

Satz. In zwei abgeschlossenen Gruppen, die aus gleich vielen ganz gleichartigen Stoffpunkten bestehen und die gleiche innere Anfangslage haben, bringen die gleichen inneren Bewegungsursachen die gleiche innere Bewegung hervor.

Eine besondere Untersuchung erfordern solche Gruppen, die aus zwei gleichartigen und in vollkommen gleichem Zustande befindlichen Stoffpunkten bestehen und eine innere Bewegungsursache besitzen. Die verschiedenen hier auftretenden Möglichkeiten möge ein Beispiel aus der geschaffenen Welt illustrieren. Zwei sich anziehende gleichgrosse und gleichschwere Kugeln bewegen sich so gegeneinander, dass ihre Geschwindigkeit stets gleichgross bleibt und dass die zurückgelegten Wege gleichlang sind. A priori wäre auch der Fall möglich, dass der eine Stoffpunkt liegen bleibt, während sich der andere ihm nähert, oder dass ihre Geschwindigkeit ungleich gross ist, so dass sie ungleiche Wege zurücklegen. Wenn wir aber zwei gleichartige Stoffpunkte voraussetzen, können sie durch eine innere Bewegungsursache nicht ungleichmässig bewegt werden. Es müsste einer der beiden Stoffpunkte irgendwie gegen den anderen ausgezeichnet sein, er müsste zum mindesten in einem etwas verschiedenen Zustande sich befinden. Sonst wüssten die Stoffpunkte nicht, welcher von ihnen den grösseren und welcher den kleineren Weg zurückzulegen hat.

Wenn wir diesen Gründen zwingende Kraft nicht zuerkennen wollen, dann müssen wir derartige symmetrisch wirkende Bewegungsursachen mindestens als die einfachsten erklären und es wäre sicher unzweckmässig, wenn wir durch irgendwelche Grundsätze sie unmöglich machen würden. Wir fordern nicht die faktische Existenz solcher Bewegungsursachen, sondern nur ihre Möglichkeit. Das ist das Mindeste, was wir forden müssen. Somit soll gelten:

19. Grundsatz. In einer Gruppe von zwei gleichartigen und in gleichem Zustand befindlichen Stoffpunkten sind symmetrische innere Bewegungsursachen geometrisch möglich.

Den Begriff „symetrische Bewegungsursachen“ fassen wir möglichst streng. Wir fordern darum die folgenden drei Grundsätze:

20. Grundsatz. Zwei gleichartige und in gleichem Zustand befindliche Stoffpunkte bleiben in gleichem Zustand, wenn auf sie nur symmetrische innere Bewegungsursachen einwirken.

21. Grundsatz. Wirken auf zwei gleiche und in gleichem Zustand befindliche Stoffpunkte nur symmetrische innere Bewegunsursachen ein, so haben zwei beliebige Bahnpunkte des einen Stoff-

punktes den gleichen Abstand wie die entsprechenden Bahnpunkte des anderen Stoffpunktes.

(Hier sind unter entsprechenden Bahnpunkten solche Raumpunkte verstanden, in welchen sich die beiden Stoffpunkte zu gleichen Zeitpunkten befinden.)

22. Grundsatz. Haben zwei gleiche und in gleichem Zustande befindliche Stoffpunkte von einem Raumpunkt gleiche Abstände und wirken auf die beiden Stoffpunkte nur symmetrische innere Bewegungsursachen ein, dann haben sie jederzeit von dem Raumpunkt gleiche Abstände.

Nun wollen wir die Wirksamkeit innerer Ursachen in einem System von zwei beliebigen Stoffpunkten prüfen. Es ist natürlich wünschenswert, dass sich durch innere Bewegungsursachen jeder verlangte Abstand herstellen lässt, wenn auch nicht jede Kraft in so weiten Grenzen wirkt. Wir dürfen aber unsere Forderungen nicht so allgemein stellen, sondern müssen eine Ausnahme machen. Es zeigt sich nämlich, dass in zwei zusammenfallenden Stoffpunkten innere Bewegungsursachen keine Trennung herbeiführen können, wenn sie nicht aus einer Zeit stammen, in welcher die beiden Stoffpunkte getrennt waren. Das Beharrungsvermögen, das wir auch in die abstandsändernden Ursachen mit einbegriffen haben, hat sich zu einer Zeit entwickelt, wo die beiden Stoffpunkte nicht vereinigt waren, und ist imstande die Stoffpunkte wieder zu trennen. Fehlt aber das Trägheitsvermögen und überhaupt alle Bewegungsursachen, die aus einem früheren Zeitpunkt stammen, dann können sich die zwei Stoffpunkte durch innere Kräfte nicht trennen.[1])

[1]) Beweis: Zwei Stoffpunkte mögen gemeinsam im Raumpunkt A liegen. Es sollen darin nur solche innere Bewegungsursachen wirken, die nicht aus früheren Zeitpunkten stammen. Wir machen nun die Probeannahme, durch eine solche Bewegungsursache werde eine Trennung der Stoffpunkte herbeigeführt. Es muss also wenigstens einer den Raumpunkt A verlassen. Diesen Stoffpunkt nennen wir P. Am Ende der Bewegung liege er im Raumpunkt B. Der andere Stoffpunkt heisse Q. Wir lassen die Frage offen, ob er in A liegen bleiben kann oder gleichfalls eine neue Lage annehmen muss. Nun bringen wir P und Q wieder nach A zurück und legen nach B einen dritten Stoffpunkt S. Wiederholen nun P und Q die gleiche Bewegung, so fällt schliesslich P mit S zusammen. Fassen wir die drei Stoffpunkte P, Q, S zu einer Gruppe zusammen, dann existiert für diese Gruppe somit eine innere Bewegung Φ, bei welcher sich P dem S nähert, bis es damit zusammenfällt. Die innere Bewegung Φ wird lediglich durch die genannten inneren Bewegungsursachen zwischen P und Q hervorgebracht. Nun existiert aber wenigstens ein Punkt, der von B verschieden ist und von A den gleichen Abstand hat wie B. Zum Beweis hierfür brauchen wir nur einen Punkt D zu wählen, der von A einen grösseren Abstand hat als A, und dann D mit A durch eine Bahn verbinden, welche den Punkt B vermeidet. Bewegen wir uns auf dieser Bahn von D nach A, so ändert sich unser Abstand von A stetig, und da wir anfangs grösseren Abstand hatten als B und schliesslich den Abstand Null erreichen, müssen wir

Wir formulieren also unsere Forderung betr. Umfang der inneren Bewegungsursachen folgendermassen:

23. Grundsatz. Zwei nicht zusammenfallende Stoffpunkte können durch innere Bewegungsursachen ihren Abstand beliebig vergrössern und verkleinern.

VIII. Die Fundamentalpunkte.

Nun wollen wir die Bewegung starrer Systeme ins Auge fassen. Starre Körper sollen die Möglichkeit haben, auch bei einer Bewegung starr zu bleiben. Ein Hammer z. B. wird als Ganzes dem Ambos genähert und von ihm wieder enfernt. Das ist nur möglich, weil die Abstände zwischen Hammeratomen und Ambosatomen von einander abhängig sind. Bestände diese Abhängigkeit nicht, dann müsste der hämmernde Schmied jedes einzelne Atom des Hammers in Bewegung setzen. Das wäre schon wegen der grossen Anzahl der Atome unmöglich. Die Hand des Schmiedes berührt eine relativ geringe Anzahl von Atomen. Die übrigen Atome sind mit diesen berührten starr verbunden und bewegen sich mit, weil ihre Abstände vom Ambos in mathematischem Zusammenhang stehen mit den Abständen der berührten Atome vom Ambos. Dieses Beispiel lässt die Zweckmässigkeit der folgenden allgemeinen Forderung erkennen: Wird einer geringen Anzahl der Stoffpunkte eines starren Systems ihre Bewegung vorgeschrieben, dann ist die Bewegung aller Stoffpunkte des Systems eindeutig bestimmt. Die Anzahl der Stoffpunkte, denen die Bewegung vorgeschrieben werden muss, braucht nicht in allen Fällen gleich gross zu sein. Jedenfalls ist aber eine obere Grenze erwünscht, d. h. eine Zahl n, die für alle Fälle ausreicht. Wenn ein solcher Fall vorliegt, in welchem die Höchstzahl von Stoffpunkten direkt bewegt werden muss, dann nennen wir diese n direkt zu bewegenden Stoffpunkte Fundamentalpunkte und die daraus gebildete starre Gruppe Fundamentalgruppe. Die Zahl n

---

wenigstens einen Punkt passieren, der von A den gleichen Abstand hat wie B. Dieser Punkt heisse C. Nun legen wir P und Q wieder nach A, S aber nach C. Die Gruppe P, Q, S hat nun die gleiche innere Anfangslage wie vorhin. Nach dem 18. Grundsatz muss aber durch die gleichen inneren Kräfte die gleiche innere Bewegung erfolgen. Das heisst, P muss sich mit S vereinigen, also nach C gelangen. Betrachten wir dagegen P und Q als eine Gruppe für sich, dann muss nach dem 17. Grundsatz wieder die gleiche absolute Bewegung erfolgen, wie bei der ersten Trennung. P muss also nach B gelangen. Da aber P nicht zugleich nach B und C gelangen kann, muss unsere Probeannahme falsch sein, d. h. zwei zusammenfallende Stoffpunkte können sich durch innere Bewegungsursachen der angegebenen Art nicht trennen. Stammt dagegen die innere Bewegungsursache aus einer Zeit, in welcher P und Q noch getrennt waren und z. B. in E und F lagen, so können diese Ursachen Beziehungen zu den Raumpunkten E und F haben, also andere Bewegungen hervorbringen. Diese Art von Bewegungsursachen brauchen wir nicht näher zu untersuchen, weil wir sie vorläufig nicht fordern, sondern bloss nicht verbieten.

möge Fundamentalzahl heissen. Nun können wir unsere Forderung folgendermassen formulieren: Die Bewegung eines starren Körpers ist eindeutig bestimmt durch die Bewegung von n Fundamentalpunkten, welche dem Körper angehören oder durch eine geringere Anzahl seiner Stoffpunkte. Diese Forderung wollen wir als erste Fundamentalforderung bezeichnen und weiter unten zu einem Grundsatz ausgestalten.

Die aufgestellte Forderung macht die Bewegung der Körperpunkte abhängig von Abständen, nämlich von ihren Abständen gegen die Fundamentalpunkte. Wir könnten die Bewegung auch von anderen Grössen abhängig machen, z. B. von der Zeit, Geschwindigkeit, Beschleunigung, Temperatur etc. der Fundamentalpunkte. Zweckmässig wäre das nicht. Liessen wir die Bewegung von der Zeit abhängen, so würde zu verschiedenen Zeiten die gleiche Bewegung der Fundamentalpunkte eine verschiedene Bewegung der anderen Körperpunkte hervorrufen. Beispielsweise müsste heute beim Hämmern der Griff des Hammers in anderer Weise geführt werden als gestern, und die gleiche Bewegung des Federhalters brächte heute ein a, morgen ein b hervor. Auch sonstigen Grössen können wir neben der Bewegung der Fundamentalgruppe keinen Einfluss auf die Bewegung des starren Körpers einräumen. Jede neue Abhängigkeit brächte neue Komplikationen mit sich und erschwerte eine wohlberechnete zielbewusste Bewegung von starren Systemen. Wir wollen aber diese Bewegung möglichst erleichtern.

Wenn die Fundamentalgruppe ruht, dann folgt aus unserer ersten Fundamentalforderung nicht oder wenigstens nicht mit voller Klarheit, dass auch die übrigen Teile des Körpers ruhen. Wir können nur folgern, dass die Bewegung der übrigen Teile eindeutig geregelt sein muss, dass sie also entweder zur Ruhe gezwungen sind oder zu einer ganz bestimmten Bewegung. Eine freie Wahl zwischen beiden bestände nicht. Natürlich wäre es ganz unzweckmässig, eine Bewegung festzusetzen, weil in diesem Fall niemals der ganze Körper in Ruhe sein könnte. Wir ergänzen also unsere erste Fundamentalforderung durch die weitere Forderung: Ruht die Fundamentalgruppe, dann ruht der ganze Körper. Das wollen wir als zweite Fundamentalforderung bezeichnen; wir werden sie unten gleichfalls zu einem Grundsatz erweitern.

Neben den bereits angeführten Zweckmässigkeitsgründen sprechen zugunsten dieser zweiten Forderung auch die Vorteile, welche sie für die Herstellung starrer Körper verschafft. Wenn diese Forderung erfüllt ist, lässt sich ein starrer Körper dadurch herstellen, dass man seine Stoffpunkte mit n Fundamentalpunkten starr verbindet. Es genügen also für jeden Stoffpunkt n starre Verbindungen. Ohne die gegenseitige Abhängigkeit der Abstände müsste ein Stoffpunkt mit jedem anderen Stoffpunkt des Systems starr verbunden werden. Natürlich brauchen wir nicht sämtliche Stoffpunkte mit der gleichen Fundamentalgruppe zu verknüpfen. Wenn vielmehr ein Punkt durch n Verbindungen dem Körper starr angegliedert ist, kann er selbst als Stütze für andere dienen. In der wirklichen Schöpfung zählen die Atome eines starren Körpers von der Grösse eines Pfennigstücks nach Trillionen. Müsste jedes Atom eines solchen Geldstücks mit jedem anderen starr verknüpft werden, dann wären Trillionen von Verbindungen für jedes Atom nötig. So aber genügen deren drei.

Nach unserer Definition enthält die Fundamentalgruppe nur solche Stoffpunkte, von denen keiner überflüssig ist. Ueberflüssig wäre ein Fundamentalpunkt dann, wenn seine Bewegung durch die Bewegung der (n—1) übrigen Fundamentalpunkte eindeutig bestimmt wäre. In diesem Fall bräuchte man die Bewegung dieses Stoffpunktes gar nicht anzugeben, und die (n—1) übrigen Stoffpunkte würden allein schon die Bewegung des starren Systems eindeutig regeln. Dann läge eben der Fall vor, dass weniger als n Punkte genügen zur Bewegung eines starren Körpers. Um also unsere Definition der Fundamentalpunkte nach dieser Beziehung festzulegen fordern wir:

24. Grundsatz. Von den Stoffpunkten einer Fundamentalgruppe ist jeder beweglich, während die übrigen ruhen.

Wenn die Fundamentalpunkte ihren Zweck vollkommen erfüllen sollen, müssen wir ihre Anzahl n möglichst klein festsetzen und ihr Auffinden in einem gegebenen Körper möglichst erleichtern.

Je geringer die Anzahl der Fundamentalpunkte gewählt wird, desto einfacher ist ein Körper in zielbewusste Bewegung zu setzen und desto leichter ist seine Bewegung zu überwachen. Für jeden der Fundamentalpunkte muss nämlich die Bewegung im voraus berechnet oder wenigstens abgeschätzt werden und jeder Fundamentalpunkt muss auf der projektierten Bahn bewegt werden. Es erfordert also schon eine geringe Anzahl solcher Punkte eine verhältnismässig hohe Aufmerksamkeit und zielbewusste Tätigkeit. Daher stellen wir folgenden Grundsatz auf:

25. Grundsatz. Die Anzahl der Fundamentalpunkte hat den kleinsten Wert, der mit den übrigen Grundsätzen verträglich ist.

Ferners verlangten wir, dass sich in einem starren Körper leicht eine Fundamentalgruppe auffinden lässt. Am radikalsten wäre dieser Forderung genügt, wenn wir n beliebige Stoffpunkte als geeignet für Fundamentalpunkte erklären würden. Doch ist leicht einzusehen, dass wir nicht so radikal vorgehen dürfen. Wenn nämlich durch (n—1) Stoffpunkte die Bewegung des n-ten eindeutig bestimmt ist, eignet sich dieser Punkt nicht als letzter Fundamentalpunkt. Wir müssen also die n Punkte so wählen, dass keinem davon seine Bewegung durch die übrigen eindeutig vorgeschrieben ist. Wenn (n—1) Stoffpunkte ruhen, muss der n-te noch beweglich sein. Dass wir für die Fundamentalpunkte nicht zu weiteren Vorschriften genötigt sind, folgt aus dem Umstand, dass in der euklidischen Geometrie n Punkte immer als Fundamentalpunkte verwertbar sind, wenn sich jeder davon bewegen kann, während die übrigen ruhen. Da wir nun die Wahl und das Auffinden von Fundamentalpunkten möglichst erleichtern wollen, verzichten wir auf jede unnötige Einschränkung. Wir fordern also:

26. Grundsatz. Eine starre Gruppe von n Stoffpunkten bildet eine Fundamentalgruppe, wenn jeder von den Stoffpunkten beweglich ist, während die übrigen ruhen.

Die Eigenschaft einer Gruppe als Fundamentalgruppe hängt nur von ihren inneren Abständen ab. Existiert nämlich eine zweite Gruppe mit den gleichen inneren Abständen, dann ist sie nach dem 16. Grundsatz zur gleichen inneren Bewegung befähigt. Es lässt sich also gleichfalls jeder Stoffpunkt bewegen, während die übrigen ruhen, und darum ist nach dem eben aufgestellten Grundsatz auch die zweite Gruppe eine Fundamentalgruppe. Somit gilt:

27. Grundsatz. n Stoffpunkte bilden eine Fundamentalgruppe, wenn sie in allen inneren Abständen mit einer anderen Fundamentalgruppe übereinstimmt.

Nun können wir unsere zwei Fundamentalforderungen (Seite 129 al. 1 u. 3) erweitern und definitiv als Grundsätze formulieren. Die erste dieser Forderungen lautet: Die Bewegung eines starren Körpers ist eindeutig bestimmt durch die Bewegung von n Fundamentalpunkten, welche dem Körper angehören oder durch eine geringere Anzahl seiner Stoffpunkte. Nach dem eben abgeleiteten Satz dürfen wir einen Körper beliebig erweitern oder verkleinern, ohne dass die Fundamentalpunkte ihre Eigenschaft als solche verlieren. Jedem Punkt vielmehr, der mit den Fundamentalpunkten starr verbunden ist, wird durch sie die Bewegung eindeutig vorgezeichnet. Aehnliches gilt bezüglich unserer zweiten Fundamentalforderung. Wir können also jetzt diese beiden Forderungen zu folgenden Grundsätzen umformulieren:

28. Grundsatz. Die Bewegung eines Stoffpunktes, der mit einer Fundamentalgruppe in starrer Verbindung steht, ist durch die Bewegung der Fundamentalgruppe eindeutig bestimmt.

29. Grundsatz. Ein Stoffpunkt, der mit einer Fundamentalgruppe in starrer Verbindung steht, ruht, wenn die Fundamentalgruppe ruht.

In beiden Fällen ist jedoch die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, dass zur eindeutigen Bewegung des Stoffpunktes schon weniger als n Stoffpunkte ausreichen. Jedenfalls aber können auch alle n Punkte zur Bewegung des starren Systems benutzt werden.

Wenn unsere Sätze über die Fundamentalpunkte von Bedeutung für die Geometrie werden sollen, muss ihre Existenz gesichert werden. Das möge in folgendem Grundsatz geschehen:

30. Grundsatz. Es existieren Fundamentalgruppen.

IX. Die Symmetriepunkte.

Die Abhängigkeit der Abstände, wie sie durch den 28. und 29. Grundsatz bedingt ist, findet ihren mathematischen Ausdruck in Gleichungen zwischen den Abständen. Ueber die Form dieser Gleichungen lässt sich a priori nichts aussagen. Der Schöpfer konnte beliebige Gleichungen aufstellen, einfache oder komplizierte, algebraische oder transzendente. Damit war aber die Frage der Raumform entschieden; denn die verschiedenen möglichen Raumformen unterscheiden sich durch die Form der Gleichungen, welche den Zusammenhang zwischen den Abständen fixieren und durch die Konstanten, die darin vorkommen.

Von den Abständen eines Punktes bleiben nach den aufgestellten Grundsätzen höchstens n willkürlich, während alle übrigen aus diesen durch Auflösung der Gleichungen gefunden werden können. Ein solches Gleichungssystem hat im allgemeinen mehrere Lösungen, und nur im Fall linearer Gleichungen wird die Lösung eindeutig. Sind also für einen Stoffpunkt S die Abstände $a_1, a_2 \ldots a_n$ von n Fundamentalpunkten vorgeschrieben, dann ist im allgemeinen die räumliche Lage von S nicht eindeutig bestimmt. Es existieren vielmehr verschiedene Raumpunkte, welche die gleichen Abstände besitzen. Nur im Fall linearer Gleichungen würde ein einziger Raumpunkt mit den verlangten Abständen existieren.

Unsere bisherigen Grundsätze verlangen die Existenz von wenigstens zwei solchen Punkten. Sobald nämlich eine Fundamentalgruppe gegeben ist, lässt sich einer der Punkte bewegen. A und B seien zwei seiner Bahnpunkte. Auf der Bahn von A bis B existiert wenigstens ein Punkt M, welcher von A und B gleichen Abstand hat. In M möge nun der fragliche Stoffpunkt der Fundamentalgruppe ruhen. Dann stimmen offenbar A und B in allen Abständen von den n Fundamentalpunkten überein.

Solche Punkte, die in allen Abständen von n Fundamentalpunkten übereinstimmen, mögen Symmetriepunkte heissen. Ihre Höchstzahl nennen wir Symmetriezahl und bezeichnen sie mit ν. Die untere Grenze von ν ist in unserem Fall 2, wie eben gezeigt. Eine obere Grenze lässt sich a priori nicht nachweisen. Es wäre sogar möglich, dass unendlich viele Symmetriepunkte existieren. Aus Zweckmässigkeitsgründen empfiehlt es sich jedoch, die Zahl ν möglichst klein zu wählen, sie also gleich 2 zu setzen. Das erleichtert die Orientierung im Raum.

Die Lage eines Punktes, innerhalb eines starren Körpers, sowie die Lage eines äusseren Punktes relativ zum starren Körper ist nämlich durch n Abstände fixiert. Hierdurch wird uns die Orientierung ermöglicht. In der wirklichen Schöpfung bildet das grosse starre System der Erdkugel die Orientierungsbasis. Die Lage von Planeten und Kometen relativ zur Erde lässt sich durch drei Fundamentalabstände fixieren, jedoch nur zweideutig. Zu drei Fundamentalabständen existieren im allgemeinen zwei von einander verschiedene Punkte, die zu den Fundamentalpunkten symmetrisch liegen, also zwei Symmetriepunkte. Es ist nicht schwer, unter den zwei Symmetriepunkten denjenigen herauszufinden, in welchem sich der Planet wirklich befindet. Offenbar wäre aber die Orientierung schwieriger, wenn die Anzahl der Symmetriepunkte grösser wäre.

Diese Ueberlegung lässt es als zweckmässig erscheinen, dass wir die Symmetriezahl ν so klein als möglich fixieren. Dass die Festsetzung: $\nu = 2$ unseren bisherigen Grundsätzen nicht widerspricht, beweist der Umstand, dass in der euklidischen Geometrie die Symmetriezahl diesen Wert hat. Wir setzen also fest:

31. Grundsatz. Es existieren höchstens zwei Symmetriepunkte, d. h., solche Stoffpunkte, die in ihren Abständen von den Stoffpunkten einer Fundamentalgruppe übereinstimmen und nicht zusammenfallen.

Dieser Grundsatz schliesst nicht die Möglichkeit aus, dass zu einem gegebenen Punkt kein zweiter Punkt mit den gleichen Abständen existiert. Solche Punkte gibt es auch in der euklidischen Geometrie. Als Beispiel diene der Halbierungspunkt einer geraden Strecke, welche die Punkte A und B verbindet.

X. Die Beweglichkeit der Gruppen.

Im VII. Abschnitt haben wir die innere Bewegung von Gruppen behandelt. Jetzt wollen wir dafür sorgen, dass auch die äussere Bewegung möglichst ungehemmt erfolgen kann. In der geschaffenen Welt setzen wir einen Körper dadurch in Bewegung, dass wir einem Teil des Körpers die entsprechende Bewegung erteilen. Der Rest des Körpers bewegt sich von selbst mit. Es ist gar nicht selbstverständlich, dass der Rest des Körpers unter allen Umständen im freien Raum Platz hat. Wir kennen Raumformen, in welchen dieses Mitbewegen nicht in allen Fällen möglich ist, weil der Raum an manchen Stellen seine Ausdehnung verliert. Wenn wir also fordern, dass sich der Rest des Körpers unter allen Umständen mitbewegen lässt, dann fordern wir nichts Selbstverständliches, sondern wir schliessen damit ungeeignete Raumformen aus.

Wir wollen übrigens diese Forderung nicht auf starre Körper einschränken, sondern sie auch für solche Gruppen aufstellen, die gleichzeitig eine innere Bewegung vollführen. Wir erstreben also folgende Forderung: Wenn wir einem Teil der Stoffpunkte eines Systems eine äussere Bewegung vorschreiben, die mit der inneren Bewegung des Systems verträglich ist, d. h. bei welcher der betreffende Teil der Punkte unter sich die verlangten Abstandsänderungen erfährt, dann soll für die übrigen Systempunkte gleichfalls eine entsprechende äusere Bewegung möglich sein. Es zeigt sich aber, dass dieser Forderung nicht in ihrer vollen Allgemeinheit genügt werden kann. Wenn nämlich die Teilgruppe aus einer Fundamentalgruppe und wenigstens noch einem weiteren Stoffpunkt besteht, dann lassen sich Fälle angeben, in denen der Rest des Systems die Bewegung der Teilgruppe nicht mitmachen kann.[1]) Wir wollen uns also auf Teilgruppen beschränken, die nicht mehr als n Stoffpunkte enthalten. Dass eine weitere Ausnahme nicht nötig wird, beweist der Umstand, dass in der n-dimensionalen euklidischen Geometrie keine weitere Ausnahme gemacht werden muss. Ohne einen inneren Widerspruch befürchten zu müssen, können wir also fordern:

32. Grundsatz. Ist für eine gegebene Gesamtgruppe eine vorgeschriebene innere Bewegung möglich und existiert für einen aus höchstens n Stoffpunkten bestehenden Teil der Gesamtgruppe eine äussere Bewegung, welche die für die Teilgruppe vorgeschriebene innere Bewegung zur Folge hat, dann existiert auch für den Rest der Gesamtgruppe eine entsprechende äussere Bewegung.

Die Zweckmässigkeit dieses Grundsatzes möge durch ein Beispiel illustriert werden. Das Räderwerk einer Taschenuhr führt eine innere Bewegung aus und zwar stets die gleiche Bewegung, mag die Uhr ruhen oder selbst in äusserer Bewegung begriffen sein. Wenn wir die Uhr in die Tasche stecken und mit uns herumtragen, setzt sich die innere Bewegung des Mechanismus fort. Es würde genügen, drei Punkten des Gehäuses ihre absolute Bewegung vorzuschreiben.

[1]) Beweis: System K bestehe aus n Fundamentalpunkten $A, B, C \ldots$, zwei Symmetriepunkten P_1 nnd P_2, welche in ihren Abständen von den Fundamentalpunkten übereinstimmen, sowie einem Stoffpunkt S, der anfangs mit A zusammenfällt. Das System beschreibe nun folgende Bewegung Φ: Alle Punkte bleiben liegen mit Ausnahme von S, welches sich von A nach P_1 bewegt. Das Teilsystem T bestehe nun aus den gleichen n Fundamentalpunkten und aus S. Die Punkte P_1 und P_2 seien als Rest bezeichnet. Das Teilsystem mache nun folgende Beweguug Φ_1: Die Fundamentalpunkte ruhen, während sich S auf der gleichen Bahn wie vorhin nach P_1 bewegt. Die Bewegung Φ_1 kann auch der Rest des Gesamtkörpers K mitmachen. Nun führe aber das Teilsystem T eine andere Bewegung Φ_2 aus. Man beachte, dass $ABC \ldots P_1 S$ und $ABC \ldots P_2 S$ zwei gleiche Gruppen sind, dass also S in beiden Fällen die gleiche innere Bewegung ausführen kann. Während sich S im ersten Fall nach P_1 bewegt, gelangt es im zweiten Fall nach P_2. Die Teilbewegung Φ_2 des Systems T bestehe nun darin, dass sich S auf der angegebenen Bahn nach P_2 bewegt, während $ABC \ldots$ ruhen. Diese Bewegung ist innerlich identisch mit Φ_1 und doch vermag der Rest des Gesamtkörpers die Bewegung Φ_2 nicht mitzumachen. Sonst müsste P_1 in den Raumpunkt P_2 gelangen, während es doch mit der Fundamentalgruppe starr verbunden und daher unbeweglich ist.

Wir könnten aber auch drei innere Punkte wählen, die an der inneren Bewegung teilnehmen, z. B. die Spitzen der drei Zeiger, nämlich des Stunden-, Minuten- und Sekundenzeigers. Nur müssen wir darauf achten, dass diese drei Punkte jederzeit unter sich die vorgeschriebenen Abstände haben, d. h. jene Abstände, die sie infolge des Mechanismus bei äusserlich ruhender Uhr der Reihe nach einnehmen würden.

Der 32. Grundsatz sorgt also dafür, dass sich vollkommene innere Bewegungsfreiheit mit möglichst vollkommener äusserer Bewegungsfreiheit verbindet.

XI. Die Aehnlichkeit.

Die Vernunftwesen sollen die Welt beherrschen. Dazu gehört aber, dass sie die Welt kennen, wenn auch nur in den Hauptzügen. Nicht die Kenntnis aller existierenden Abstände ist nötig, wohl aber die relative Lage der grossen Gruppen, also beispielshalber in der wirklichen Welt die Lage der Himmelskörper, Weltteile, Städte. Alles Detail kann der einzelne Mensch nicht kennen und braucht es nicht zu kennen. Die Welt soll nach der Absicht des Schöpfers über unser Vorstellungsvermögen hinausgehen, damit sie uns ein Sinnbild der unendlichen Grösse des Schöpfers abgibt.

Um über die Welt oder grössere Teile der Welt einen Ueberblick zu bekommen, brauchen wir verkleinerte Darstellungen, Modelle oder Karten. Solche Modelle sind die Planetarien und Globen und die plastischen Darstellungen von Gebirgen. Für die verkleinerte Darstellung von zweidimensionalen Flächen genügen Karten. Nun ist keineswegs in jeder Geometrie eine verkleinerte Darstellung von Gegenständen möglich, welche allen Anforderungen genügt. Gewöhnlich verlangt man, dass die Dimensionen des Modells proportional sind zu denen des Originals. Dieser Forderung könnte man in der elliptischen Geometrie nicht entsprechen, so wenig, als man z. B. die Erdoberfläche auf einer ebenen Kartenfläche proportional abbilden könnte. Es lässt sich auch nicht behaupten, dass nur proportionale Modelle ihren Zweck erfüllen. Es genügt, wenn sich aus dem Modell die Abstände des Originals entnehmen lassen. Das ist der Fall, wenn jedem Abstand des Originals eine und zwar eine einzige Abstandsgrösse des Modells entspricht und umgekehrt, oder mathematisch ausgedrückt, wenn die Abstände des Originals und des Modells durch eine ein-eindeutige Funktion zusammenhängen.

Ausserdem müssen wir verlangen, dass für e i n e n Abstand des Originals der Modellabstand willkürlich gewählt werden darf. Das ist nötig um das Modell in geeigneter Grösse ausführen zu können.

Die Modelle sollen auch die Bewegungen veranschaulichen können. So z. B. veranschaulicht ein Planetarium die Bewegung unseres Sonnensystems. Die Bewegung eines Eisenbahnzuges lässt sich in einem plastischen Modell des Terrains veranschaulichen und schon bei der Projektierung einer Eisenbahnlinie im voraus erkennen.

Auch hier ist das Modell nur verwendbar, wenn jede im Modell mögliche Bewegung auch im Originalgelände möglich ist, natürlich in vergrösserter Ausführung. Ferner muss jede Bewegung im Originalgelände auch im Modell nachzuahmen sein, sonst könnte bei der Projektierung gerade die günstigste Linienführung übersehen werden oder es könnten bei der Ausführung des Bahnbaues unvorhergesehene Zwischenfälle eintreten; es könnte z. B. der Zug abstürzen. Wir können nun alle aufgeführten Forderungen in folgender Weise zusammenfassen:

33. Grundsatz. Zu jeder Gruppe von Stoffpunkten ist eine zweite Gruppe geometrisch möglich, derart, dass ein Abstand der neuen Gruppe beliebig gewählt werden kann, dass ferner die entsprechenden Abstände durch eine ein-eindeutige Funktion miteinander verknüpft sind, welche mit ihrem Argument steigt und fällt, und dass jeder Bewegung der einen Gruppe eine Bewegung der anderen entspricht.

XII. Die Dreizahl der Dimensionen.

Aus den 33 aufgestellten Grundsätzen folgt rein mathematisch, also durch zwingende Schlussfolgerung, dass in der Schöpfung die dreidimensionale euklidische Geometrie gilt. Der Beweis soll aber, wie schon eingangs bemerkt, an dieser Stelle nicht geführt werden. Dagegen wollen wir die Gründe noch genauer beleuchten, welche den Schöpfer bestimmt haben dürften, gerade drei Dimensionen zu wählen. Der euklidische Raum ist nicht notwendig dreidimensional. Dass er ein- oder zweidimensional sein könnte, beweist der Umstand, dass wir in den Kurven und Flächen unserer gewöhnlichen Geometrie tatsächlich ein- und zweidimensionale Raumgebilde vor uns haben. Aber auch eine vier-, fünf- und mehrdimensionale Geometrie bietet keine Schwierigkeit. Alle diese Raumformen wurden bereits von den Mathematikern untersucht und als frei von inneren Widersprüchen nachgewiesen.

Wir gehen nun von der Voraussetzung aus, dass der Raum euklidisch sein soll, und werfen die Frage auf: Welche Gründe veranlassten den Schöpfer, nicht mehr oder weniger als drei Dimensionen einzuführen?

Solange der Schöpfer den 15. Grundsatz aufrecht erhalten wollte, konnte er sich nicht für weniger als drei Dimensionen entscheiden. Allerdings lassen sich einzelne Hindernisse und begrenzte Bahnstücke schon im zweidimensionalen Raum umgehen, wenn man grosse Umwege nicht scheut. Um an das jenseitige Ufer eines Flusses zu gelangen, könnte man bis zur Quelle aufwärts gehen. Wo sich aber der Fluss vorübergehend in zwei Arme spaltet und eine allseits abgeschlossene Flussinsel bildet, ist eine Umgehung des Hindernisses nicht möglich, und die Insel wäre im zweidimensionalen Raum nicht zugänglich. Eine Brücke tritt aus der Fläche heraus, ist also nur im dreidimensionalen Raum möglich. Ein reichentwickeltes Telegraphen- und Telephonsystem zerlegt das ganze Land in lauter Inseln, die im zweidimensionalen Raum ohne Zugang wären. Man darf also nicht daran denken, unter drei Dimensionen herabzugehen.

Wenn wir auf die Forderung verzichten, dass sich ganze Bahnen umgehen lassen sollen und nur die Möglichkeit fordern, einzelne Punkte umgehen zu können, dann genügt ein zweidimensionaler Raum. Verzichten wir auch auf die Umgehung von Punkten, dann kommen wir schon mit einer einzigen Raumdimension durch. Diese Darlegung lässt erkennen, dass die dritte Dimension des Raumes die Rolle einer Aushilfsdimension spielt. Sie soll uns ermöglichen, Hindernissen auszuweichen. Tatsächlich hat der Schöpfer in gewissen Fällen von der dritten Dimension einen beschränkten Gebrauch gemacht. Das Leben des Menschen z. B. spielt sich auf der zweidimensionalen Erdfläche ab. Für gewöhnlich entfernen wir uns nur wenig aus dieser Fläche. Während sich die Entfernungen innerhalb der Fläche nach allen Richtungen bis zu 20 000 Kilometern erstrecken, steigen wir auf Treppen selten mehr als 15 m in die Höhe und 3 m in die Tiefe. Luftschiffe gelangen bis zu 10 Kilometern Höhe und Erdschachte reichen 2 Kilometer weit unter die Erdoberfläche. Das sind die äussersten Grenzen, bis zu welchen wir in die dritte Dimension vordringen. Zur Orientierung dient aber auch in solchen Ausnahmefällen die Erdoberfläche. In diesem Sinn nannten wir vorhin die dritte Dimension eine Aushilfsdimension.

Dieses Zurückdrängen der dritten Dimension ist wohlbegründet. Um über die Erde einen Ueberblick zu gewinnen, müssen wir uns Landkarten machen und diese sind nur zweidimensional. Die dritte Dimension, d. h. die Höhe und Tiefe, ist nur mangelhaft darstellbar. Wäre die dritte Dimension ebenso durchgebildet wie die beiden anderen, dann wäre die Darstellung noch schwieriger und noch mangelhafter. Um dreidimensionale Körper darzustellen, zeichnet man mehrere Schnitte. Was aber zwischen den Schnitten liegt, bleibt ohne Abbildung. Allerdings kommen auch körperliche Modelle zur Verwendung. Ihre Herstellung ist aber umständlich und ausserdem fehlt ihnen die Durchsichtigkeit. Es ist deshalb ein grosser Vorteil für uns, dass unser Wohnraum hauptsächlich nach zwei Dimensionen ausgedehnt ist, während die dritte Dimension zurücktritt.

Damit gelangen wir zur Besprechung eines weiteren Grundes, welcher für die Einführung von mindestens drei Dimensionen spricht. Das Bild, welches unser Auge auf der Netzhaut entwirft, ist eine sehr vollkommene Landkarte, aber es teilt den Mangel aller Landkarten: Es ist nur zweidimensional. Bei der Abbildung äusserer Gegenstände im Auge geht eine Dimension verloren. Dieser Verlust ist nicht einer mangelhaften Konstruktion des Auges zuzuschreiben, sondern würde bei jeder anderen Konstruktion ebenfalls auftreten. Die fehlende Dimension wird eben verbraucht als Raum für die Zuleitung der Lichtstrahlen von vorne her und zur Weiterleitung der empfangenen Lichtreize nach rückwärts mittels der Nervenfasern. Eine solche Zuleitung und Ableitung wäre bei jeder anderen Konstruktion des Auges notwendig und liesse sich auch dann nicht entbehren, wenn der Schöpfer statt der Lichtstrahlen andere Uebertragungsmittel geschaffen und zur Herstellung eines Netzhautbildes verwendet hätte. Wäre nun die Welt zweidimensional, so würde im Auge ebenfalls eine Dimension verloren gehen und unser Netzhautbild wäre höchstens eindimensional; wir würden nur eine mathematische Linie empfinden, deren verschiedene Punkte sich durch Farbe und Helligkeit unterschieden. Es ist klar, dass ein solches Bild recht ärmlich wäre und nicht die Grösse und Herrlichkeit des Schöpfers in seiner Schöpfung erkennen liesse.

Man könnte nun sagen, die Schönheit und Mannigfaltigkeit der Welt würde gesteigert, wenn sie mehr als drei Dimensionen hätte. Warum hat also der Schöpfer die geringste noch zulässige Zahl von Dimensionen gewählt? Darauf ist zu sagen: Je weniger Dimensionen existieren, desto übersichtlicher wird die Schöpfung. Für unser Vorstellungsvermögen genügen die drei Dimensionen vollkommen. Eine vierte Dimension könnte unser Vorstellungsvermögen nicht mehr bewältigen. Selbst die einfachsten Körper, wie Kugel, Würfel, Kegel etc., weisen im vierdimensionalen Raum bereits so zahlreiche Spezialfälle auf, dass sie kaum mehr zur Vereinfachung der Vorstellungsbilder dienen könnten.

Diese Schwierigkeit liesse sich vielleicht beheben durch Steigerung der Erkenntnis-Fähigkeiten des Menschen. Der Schöpfer hätte von Anfang an unser Denk- und Vorstellungsvermögen einer vier- und mehr dimensionalen Welt anpassen können. Deshalb ist es wünschenswert, noch andere Gründe zu kennen, die den Schöpfer zu so sparsamer Verwendung der Dimensionen veranlasst haben. Wir müssen uns eben erinnern, dass in der Schöpfung nicht bloss Vielheit, sondern auch Einheit herrscht. „Vielheit, die nach Einheit strebt", das war der Grundgedanke des ganzen Schöpfungswerkes. An der rechten Stelle muss also Vielheit verlangt werden und an der rechten Stelle Einheit. Vielheit in den speziellen Erscheinungen und Formen, dagegen Einheit in der Gruppierung der Erscheinungen. In der Frage der Dimensionen können wir nicht zweifeln, dass sie vereinheitlichend wirken. Wir verlangen also eine möglichst kleine Anzahl von Dimensionen. Allerdings dürfen wir nicht allzuweit heruntergehen. Zu wenige Dimensionen würden nicht bloss vereinheitlichend, sondern auch verarmend auf das Schöpfungsbild wirken. Dass die Dreizahl der Dimensionen noch nicht verarmend wirkt, beweist die Erfahrung, welche uns in unserer dreidimensionalen Welt einen enormen Erscheinungsreichtum kennen lehrt.

XIII. Abweichungen.

Die Grundsätze, welche wir aufgestellt haben, führen durch logische Folgerungen, also ohne weitere Zweckmässigkeitsgründe, zur euklidischen Geometrie. Damit ist unsere Aufgabe gelöst.

Es könnte nun den Anschein gewinnen, als ob wir zu viel bewiesen hätten; denn es steht gar nicht fest, dass in der wirklichen Welt die euklidische Geometrie gilt. Man ist geneigt zu der Annahme, dass die Geometrie der Schöpfung hyperbolisch ist. Es wäre zu viel behauptet, wenn man diese Annahme als sicher oder auch nur als wahrscheinlich hinstellen wollte. Immerhin sind die Gründe derart, dass diese Annahme nicht mehr als reine Utopie betrachtet werden kann. In der hyperbolischen Geometrie gilt nun der 33. Grundsatz nicht. Wenn aber wirklich der Welt diese Geometrie zu Grunde liegt, dann besteht wenigstens die Tatsache, dass diese Geometrie der euklidischen ausserordentlich nahe kommt. Es gibt nämlich unendlich viele Arten von hyperbolischen Geometrien, die sich aber nur durch den absoluten Wert einer Grösse k unterscheiden. Je grösser man das k wählt, desto mehr nähert man sich der euklidischen Geometrie. Man kann letztere als hyperbolische Geometrie mit unendlich grossem k betrachten.[1])

Die wirkliche Schöpfung nähert sich der euklidischen Geometrie jedenfalls so stark, dass wir die Abweichung davon bisher durch keine Messung finden konnten, wenn eine solche Abweichung überhaupt besteht. Selbst die genauesten astronomischen Messungen sind mit der euklidischen Geometrie vereinbar. Mit einer so weitgehenden Annäherung ist aber der Zweck des 33. Grundsatzes vollständig erreicht. Es genügt offenbar die Herstellung solcher Modelle und Zeichnungen, deren Ungenauigkeit unter der möglichen Beobachtungsgrenze liegt. Soweit aber ist in der Schöpfung der 33. Grundsatz unzweifelhaft durchgeführt. Eine solche Annäherung an die euklidische Geometrie ist offenbar nicht zufällig. Diese Geometrie stellt ein Ideal vor, welches dem Schöpfer vorschwebte, aber vielleicht aus irgend einem, uns nicht bekannten Grunde, nicht völlig exakt erreicht werden konnte. Wir haben also keinen Anlass den 33. Grundzu streichen.

Wie bei diesem Grundsatz, so müssen wir allgemein die Möglichkeit zulassen, dass die Schöpfung in ihren Abständen von den aufgestellten Grundsätzen um geringfügige Beträge abweicht. Unsere Grundsätze stellen Ideale dar, und somit stellt auch die euklidische Geometrie das Ideal dar, welches der Schöpfer nach Möglichkeit zu verwirklichen trachtet. Etwaige Abweichungen von dieser Geometrie dürfen natürlich nicht dem Zufall überlassen bleiben, sondern müssen ebenfalls durch Grundsätze geregelt werden. Bei welchen Grund-

[1]) Siehe z. B. Killing, Einführung in die Grundlagen der Geometrie (Paderborn 1893, Schöningh) I 72 f.

sätzen Abweichungen zulässig sind und welchen Betrag diese Abweichungen erreichen dürfen, ohne den Zweck der aufgestellten Grundsätze zu gefährden, brauchen wir solange nicht zu prüfen, als solche Abweichungen nicht experimentell nachgewiesen werden. Unsere Aufgabe ist ja nicht, a priori und ohne Zusammenhang mit der wirklichen Schöpfung einen Weltplan zu entwerfen, sondern wir haben der Zweckmässigkeit der fertig vorliegenden Welt nachzuweisen. Solange keine Abweichungen von der euklidischen Geometrie experimentell beobachtet werden, fehlt uns das Objekt der Erklärung. Wir begnügen uns also damit, die prinzipielle Möglichkeit von kleinen Abweichungen zu betonen.