Miszellen.

Der Satz vom ausgeschlossenen Dritten in der Mathematik.

Es ist in der Mathematik eine Krisis ausgebrochen von solchem Ernste, daß kein geringerer als David Hilbert, einer der führenden Mathematiker der Gegenwart erklärt: Wir laufen Gefahr, den größten Teil unserer wertvollsten Schätze zu verlieren. Hilbert selbst stellt sich die Aufgabe, „der Mathematik den alten Ruf der unanfechtbaren Wahrheit wieder herzustellen, glaubt aber, daß dies nur durch eine „völlige Neubegründung der Mathematik“ möglich sei.

Der Anstoß zu der Umwälzung geht von dem holländischen Mathematiker Brouwer aus, der die für jeden Logiker sehr befremdende Behauptung aufstellt, daß der logische Satz vom ausgeschlossenen Dritten keine ausnahmslose Gültigkeit habe.

Von diesem Satz pflegt die Mathematik folgenden Gebrauch zu machen. Wenn man die Gültigkeit eines Satzes beweisen kann unter der Voraussetzung, daß ein bestimmter mathematischer Gegenstand eine gewisse Eigenschaft hat und auch unter der Voraussetzung, daß er diese Eigenschaft nicht hat, dann ist der Satz als wahr bewiesen, ohne daß es erforderlich wäre, zu entscheiden, ob der Gegenstand die Eigenschaft hat oder nicht hat.

Nehmen wir beispielsweise an, ein mathematischer Satz könne bewiesen werden, wenn unter den sechs Ziffern 6, 8, 9, 10, 11, 12 eine Primzahl vorkommt, und er sei auch beweisbar, wenn sich unter den sechs Ziffern keine Primzahl findet. Hier ist der mathematische Gegenstand (die Reihe der sechs Ziffern) so genau bekannt, daß man keinen Anlaß hat, das Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten heranzuziehen. Man durchläuft die Reihe der Ziffern, stößt auf die Zahl 11 und hat damit eine Primzahl gefunden. Anders läge die Sache, wenn unsere Ziffernreihe so lang wäre, daß man sie erst in zwanzig Jahren durchlaufen könnte. Hier würde man schließen: Bei der Durchmusterung der Ziffern, die zwanzig Jahre in Anspruch nimmt, werde ich entweder (wenigstens) eine Primzahl finden oder nicht. In beiden Fällen gilt der Satz, also gilt er schlechthin.

In diesem Falle würde auch Brouwer gegen die Heranziehung des Prinzips vom ausgeschlossenen Dritten nichts einzuwenden haben. Er würde aber Protest erheben, wenn wir bei einer unendlichen Ziffernreihe ebenso verfahren wollten. Hier würde er den fraglichen Satz nur dann als bewiesen anerkennen, wenn wir entweder durch einen glücklichen Zufall in der unendlichen Reihe eine Primzahl entdeckt oder durch Anwendung eines mathematischen Satzes (also ohne Durchlaufen der Reihe) die Entscheidung herbeigeführt hätten, ob eine Primzahl darin enthalten ist oder nicht.

Wie kommt Brouwer zu dieser nicht nur für einen großen Teil der Mathematik, sondern auch für die Logik grundstürzenden Auffassung. Der tiefere Grund ist seine radikal empiristische Auffassung der logischen Sätze. Die Prinzipien der Logik gelten ihm nur insoweit, als sie verifizierbar sind. In einer Abhandlung in *Crelles Journal* (1924) sagt er: „Die Konsequenz des den Gesetzen der Logik zugeschriebenen aprioristischen Charakters war, daß man bis vor kurzem diese Sätze, einschließlich des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten, auch in der Mathematik der unendlichen Systeme rückhaltlos angewandt hat und sich dabei nicht von der Erwägung hat stören lassen, daß die auf diesem Wege erhaltenen Resultate im allgemeinen weder praktisch noch theoretisch einer empirischen Bestätigung zugänglich sind. Auf dieser Grundlage sind, insbesondere im letzten halben Jahrhundert, ausgedehnte unrichtige Theorien aufgebaut worden.“

Diese Auffassung ist durchaus abzulehnen. Der Satz vom ausgeschlossenen Dritten erfreut sich der höchsten Evidenz und kann darum in seiner Allgemeingültigkeit nicht bezweifelt werden.

Der Satz versagt auch niemals, es sei denn, daß er auf ein in sich unmögliches Gebilde angewandt werde. In diesem Falle kann man allerdings zu zwei kontradiktorischen Urteilen kommen, die beide falsch sind. Bereits Kant hat als Beispiel hierfür die beiden Sätze aufgestellt: „ein eckiger Kreis ist rund“ und „ein eckiger Kreis ist nicht rund“. Das „Versagen“ des Prinzips ist ein Beweis dafür, daß es auf widerspruchsvolle Dinge angewandt wird. Wenn es also bei gewissen unendlichen Systemen zu Widersprüchen führt, so liegt der Grund in der inneren Unmöglichkeit dieser Systeme, die sich bei dieser Gelegenheit offenbart.

Die Paradoxien des Unendlichen, die heute die Mathematiker so lebhaft beschäftigen und die zu den schwierigsten Problemen gehören, die jemals dem menschlichen Verstande entgegengetreten sind, dürfen niemals dazu führen, die Gültigkeit der logischen Prinzipien einzuschränken. Dies darf um so weniger geschehen, als ja diese Prinzipien das einzige Mittel sind, dessen sich der Mathematiker bedienen kann, um jene Paradoxien aufzuklären.

E. H.