Zur Lehre von den sog. schöpferischen Definitionen.

Von Walter Dubislav, Berlin-Friedenau.

I. Einführende Untersuchungen.

Unter einer sog. schöpferischen Definition versteht man eine Definition, vermittelst deren in bezug auf das der Untersuchung zu Grunde gelegte System von Voraussetzungen „neue ideale Gegenstände“ [1]) erzeugt werden sollen, und diese schöpferischen Definitionen, so behauptet man, sind vorzugsweise den exakten Wissenschaften, und zwar insbesondere der Mathematik eigentümlich. Da über die Art der Gegenstände, die man hinsichtlich eines Systems von Grundvoraussetzungen per definitionem zu erzeugen in der Lage sein soll, genauere Angaben fehlen, und da auch die schöpferischen Definitionen selbst nicht näher, ohne gewisse Umständlichkeiten mit in Kauf zu nehmen, zu kennzeichnen sind, so möge zunächst die Erörterung eines in vieler Hinsicht instruktiven Beispiels dazu dienen, in concreto die Eigenschaften der schöpferischen Definitionen zu ermitteln, ehe wir daran gehen in abstracto diejenige Charakterisierung derselben anzugeben, die wir unserer Untersuchung zu Grunde legen wollen.

Wenn man beim Aufbau der Euklidischen Geometrie bis zu der Lehre von den Proportionen gelangt ist und nun daran geht, diese Lehre korrekt zu entwickeln, dann begegnet man einer eigentümlichen Schwierigkeit. Die sich für ein Paar kommensurabler Strecken a und b, d. s. Strecken, bei denen ein aliquoter Teil t der einen in die andere aufgeht, gleichsam von selbst darbietende Definition des Verhältnisses von a zu b: $\frac{a}{b}=\frac{m.t}{n.t}=\frac{m}{n}$, wobei m und n ganze Zahlen sein sollen, ist nämlich nur brauchbar, wenn a und b kommensurabel sind und versagt, wenn a und b inkommensurabel sind, denn dann gibt es kein gemeinschaftliches Maß t von a und b. Eine für alle Fälle brauchbare Definition eines Verhältnisses zweier Strecken, wie

[1]) Vgl. H. Weyl, *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft,* Handbuch der Philosophie, 1926. 4. Lieferung, S. 8 ff.

man sie zum Aufbau der Lehre von den Proportionen haben möchte, stößt also anscheinend auf unüberwindliche Schwierigkeiten. Um aber trotz dieser Schwierigkeiten eine exakte Lehre von den Proportionen zu gewinnen, verfielen die antiken Mathematiker auf folgenden genial einfachen Kunstgriff: Sie verzichteten beim Aufbau der Lehre von den Proportionen auf die Definition des Verhältnisses zweier Strecken, aber sie gaben eine solche an für die Gleichheit zweier derartiger Verhältnisse. Sie definierten: Es ist $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, wobei a, b, c und d Strecken sind, dann und nur dann, wenn für jedes beliebige Paar positiver ganzer Zahlen u und v mit $u.a > v.b$ bezw. $u.a = v.b$ bezw. $u.a < v.b$ auch $u.c > v.d$ bezw. $u.c = v.d$ bzw. $u.c < v.d$ wird.

Diese Definition läßt sich nun in einer bestimmten, gleich näher anzugebenden Weise als eine schöpferische Definition interpretieren, wobei zunächst dahingestellt bleibe, ob diese Interpretation Bedenken ausgesetzt ist oder nicht ist. Man kann nämlich die Auffassung vertreten, daß die betreffende Definition des Ausdrucks $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, der als Aequivalent des angegebenen Systems von Beziehungen betrachtet wird, an allen gleichen Verhältnissen ein gemeinsames Merkmal heraushebt, und daß dieses allen gleichen Verhältnissen gemeinsame Merkmal ohne weiteres umwandelbar sei bezw. auffaßbar sei, als ein per definitionem schöpferisch erzeugter, neuer idealer Gegenstand, dessen Existenz und Einzigkeit per definitionem feststehe. Anders ausgedrückt: Mit Hilfe der angegebenen „schöpferischen Definition" sei der Begriff „Verhältnis zweier Strecken" bezw. der betreffende Begriffsname definiert, der sich vermittelst bloßer „kombinierender Definitionen" anscheinend aus dem einschlägigen System von Voraussetzungen nicht definieren lasse. Und zwar erweise er sich als das ideale „Etwas", an dem alle gleichen Verhältnisse in gleicher Weise „teilhaben". [1])

Nachdem an Hand der Eudoxos-Archimedischen Definition der Gleichheit zweier Verhältnisse in concreto die Eigenschaften einer schöpferischen Definition genauer angegeben sind, soll nunmehr allgemein näher fixiert werden, was unter einer schöpferischen Definition zu verstehen ist. Die eingangs angegebene Aussage nämlich, eine schöpferische Definition sei eine solche, durch die in bezug auf das einschlägige System von Voraussetzungen neue ideale Gegenstände erzeugt werden, ist nach zwei Seiten hin einer näheren Ergänzung

[1]) Vgl. H. Weyl, *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaften*, Handbuch der Philosophie. 1926. 4. Lieferung. S. 10/11.

bedürftig. Es muß hinsichtlich der betreffenden Aussage einmal angegeben werden, was unter einer Definition verstanden werden soll, und zum anderen, was in bezug auf ein System von Voraussetzungen als ein „neuer" Gegenstand zu betrachten ist.

Obwohl unter einer Definition vielerlei verstanden wird[1]), und zwar gelegentlich eine Wesensbestimmung im aristotelischen Sinne, gelegentlich eine analytische Begriffsbestimmung im Sinne einer Zergliederung (Exposition) eines als gegeben betrachteten Begriffes in seine Bestandteile, gelegentlich eine synthetische Begriffsbestimmung im Sinne einer Konstruktion eines Begriffes aus schon vorhandenen, gelegentlich eine Feststellung über die übliche Bedeutung von Zeichen, gelegentlich eine weitgehend willkürliche Vereinbarung oder Verständigung über die Verwendung zu benutzender Zeichen wie schließlich eine Behauptung, die eine derartige Wesensbestimmung bezw. Zergliederung bezw. Konstruktion bezw. Festsetzung zutreffend beschreibt, so ist es doch unbeschadet dieses bedauerlichen terminologischen Wirrwarres, hinter dem sich meist sachliche Differenzen verbergen, möglich, die erste Ergänzung ohne umfangreichere Erörterungen zu geben. Vermöge der Korrespondenz nämlich, die zwischen Begriff und Begriffszeichen in einem auch in formaler Hinsicht hinreichend vollkommenen System einer Disziplin besteht, entspricht jeder Aussage über die Zusammensetzung von Begriffszeichen eine solche über die Zusammensetzung von Begriffen. Es ist mithin vergleichsweise gleichgültig, ob man eine Definition auffaßt als eine willkürliche, gewissen Bedingungen genügende Vereinbarung über die Zusammensetzung oder die Bedeutung von Zeichen bezw. als eine eine solche Vereinbarung zutreffend wiedergebende Behauptung, oder auffaßt als eine derartige Vereinbarung über die Zusammensetzung von Begriffen, bezw. als eine eine solche Vereinbarung zutreffend wiedergebende Behauptung. Damit gewinnen wir die Möglichkeit, uns für unsere Zwecke hinreichend präzise auszudrücken, ohne uns auf subtile Streitfragen einzulassen, wenn wir im Hinblick auf die betreffende Fixierung dessen, was eine schöpferische Definition ist, sagen: Unter einer Definition wird in dem betreffenden Zusammenhange eine Vereinbarung über die Zusammensetzung oder die Bedeutung von Zeichen bezw. eine eine derartige Vereinbarung zutreffend wiedergebende Behauptung verstanden.

---

[1]) Vgl. W. Dubislav, *Ueber die Definition.* 2. Auflage. 1927. S. 7 ff., wo eine auf Klärung der Probleme gerichtete, summarische Uebersicht über die wichtigsten Lehren von der Definition u. a. gegeben wird.

Was nun die zweite Ergänzung betrifft, so möge hinsichtlich eines Systems S von Grundvoraussetzungen einer Disziplin ein Gegenstand G dann und nur dann ein „neuer" hinsichtlich des betreffenden Systems S heißen, wenn keine Verbindung oder Knüpfung K von Gegenständen aus den Grundbereichen des Systems S allein vermittels der Konstruktionsprinzipien der Logik oder der in S enthaltenen[1]) herstellbar ist, die G äquivalent ist. Hierbei heißt ein Gegenstand G einem anderen H in bezug auf das System S äquivalent, wenn jede einschlägige Behauptung, die über G gilt, auch über H gilt, und umgekehrt. So ist etwa der „Gegenstand": „Die Zahl Eins" im Hinblick auf das Peano-Padoasche Axiomsystem der natürlichen Zahlen, wie leicht einzusehen ist, ein solcher, der sich als einer Knüpfung von Gegenständen der Grundbereiche oder des Grundbereiches des betreffenden Axiomensystems als äquivalent erweist. Es folgt aus einer derartigen Aequivalenz aber keineswegs immer, daß, wenn der Gegenstand G etwa als ein Begriff auffaßbar ist, es hinsichtlich des betreffenden Axiomensystems auch Gegenstände gibt, die unter diesen Begriff fallen. Ein derartiger Existenzialbeweis ist gegebenenfalls vielmehr jedesmal ausdrücklich zu führen. Damit ein Gegenstand G also als ein „neuer" hinsichtlich eines Axiomensystems zu bezeichnen ist, verlangen wir nicht nur, daß man seine Existenz aus diesem System nicht beweisen kann, sondern auch, daß er bezw. ein ihn bezeichnender Gegenstandsname in üblicher Weise nicht auf eine Knüpfung von primitiven Gegenständen oder Begriffen bezw. Zeichen des Systems reduzierbar ist, wobei die Regeln für die Herstellung derartiger Knüpfungen aus der Logik oder dem betreffenden System selbst zu entnehmen sind.

Bei Berücksichtigung der beiden Ergänzungen kann nunmehr die ursprüngliche Erläuterung dessen, was eine schöpferische Definition ist, folgendermaßen präzisiert werden: Unter einer „schöpferischen Definition" werde hinsichtlich eines Systems von Grundvoraussetzungen einer exakten Disziplin eine solche Vereinbarung über die Zusammensetzung oder die Bedeutung von Zeichen bezw. eine eine solche Vereinbarung zutreffend wiedergebende Behauptung verstanden, durch die relativ zu dem betreffenden Systeme im angegebenen Sinne neue Gegenstände erzeugt werden. Es bleibt hiernach aber, und das ist ausdrücklich hervorzuheben, besonderen Untersuchungen überlassen, festzustellen, ob man überhaupt hinsichtlich eines Systems von Grund-

[1]) An späterer Stelle werden wir auf diese Konstruktionsprinzipien noch näher einzugehen haben.

voraussetzungen einer Disziplin einwandfrei gelegentlich vermittelst schöpferischer Definitionen fortschreiten kann. Bei dem erörterten Beispiele zwar scheint ein Fortschritt vermittelst schöpferischer Definitionen nicht nur einwandfrei, sondern auch noch für den Aufbau einer exakten Proportionenlehre unerläßlich zu sein. Aber ein erstmalig von G. Peano [1]) zu anderen Zwecken verwandtes Beispiel zeigt, wenn man es für die Untersuchung schöpferischer Definitionen nutzbar macht, daß mindestens die vorbehaltlose Verwendung schöpferischer Definitionen beim Aufbau einer exakten Disziplin zu Irrtümern führt. Hat man nämlich hinsichtlich eines Axiomensystems der Arithmetik die Lehre von den reellen Zahlen bis zu den einfachsten Eigenschaften der rationalen Zahlen fortgeführt, dann könnte man bei skrupelloser Benutzung schöpferischer Definitionen vermittelst einer solchen geneigt sein, eine neue Operation, die sog. „Fragezeichen-Operation" folgendermaßen einzuführen: Es sei $\frac{a}{b} ? \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$, wobei vermittelst dieser „Definition" der hinsichtlich des betreffenden Axiomensystems „neue" Gegenstand „?", der sich nicht auf eine Knüpfung von Gegenständen aus den Grundbereichen des Systems reduzieren läßt, „schöpferisch definiert" ist. Man sieht aber leicht ein, daß diese besondere „schöpferische Definition" jedenfalls zu Irrtümern führt. Denn setzt man etwa $\frac{a}{b} = \frac{1}{3}$, $\frac{c}{d} = \frac{5}{7}$ so erhält man $\frac{1}{3} ? \frac{5}{7} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$. Setzt man aber $\frac{a}{b} = \frac{2}{6}$ $(= \frac{1}{3})$, so erhält man $\frac{2}{6} ? \frac{5}{7} = \frac{7}{13}$. Es müßte also $\frac{3}{5} = \frac{7}{13}$ sein. Die „Fragezeichen-Operation" ist mithin eine illegitime, und die betreffende „schöpferische Definition", durch die sie „erzeugt" wurde, stellt also eine unzulässige „Definition" dar, deren Verwendung beim Aufbau der Arithmetik zu Irrtümern führt. Damit ist gezeigt, daß die Verwendung „schöpferischer Definitionen", mag sie gelegentlich einwandfrei sein, jedenfalls nicht immer einwandfrei ist, und es ist also zu untersuchen, ob überhaupt und wenn ja, in welchen Fällen der Fortschritt vermittelst „schöpferischer Definitionen" beim Aufbau einer exakten Disziplin ein einwandfreier ist.

Indem wir uns bei dem Aufbau der Lehre von der Definition von der heuristischen Maxime leiten lassen, die für die Entwicklung der Hilbert'schen Beweistheorie in vieler Hinsicht maßgeblich gewesen ist, nämlich von der Maxime, den Aufbau einer exakten Wissenschaft unabhängig von Annahmen über die Existenz oder die Erzeugung im platonischen Sinne idealer Gegenstände zu gestalten,

[1]) Vgl. G. Peano, *Les définitions mathématiques, Bibliothèque du congrès de Philosophie.* Bd. 3, 1901.

werden wir unter anderem folgendes Resultat begründen[1]): Sofern man in einer exakten Wissenschaft Wahrheiten sucht, die von ihrer jeweiligen Bezeichnungsweise unabhängig sind, gibt es bei ihrem Aufbau hinsichtlich des ihr zu Grunde gelegten Systems von Voraussetzungen keinen einwandfreien Fortschritt vermittelst der Aufstellung von schöpferischen Definitionen.

Zur Begründung der obigen Behauptung gibt es im wesentlichen zwei Wege. Man kann einmal versuchen, sie aus der charakteristischen Beschaffenheit einer exakten Disziplin abzuleiten, die nach D. Hilbert darin besteht, daß die betreffende Disziplin axiomatisiert werden kann und daß in einem axiomatischen Aufbau derselben die relativ vollendetste Begründung zu erblicken ist, deren die Lehrsätze der betreffenden Disziplin überhaupt fähig sind. Man kann andererseits den Nachweis zu erbringen suchen, daß erstens eine vorbehaltlose Verwendung schöpferischer Definitionen zu Irrtümern führt, was wir durch eine geeignete Deutung der Peano'schen „Fragezeichen-Operation" bereits gezeigt haben, und daß zweitens überall da, wo die vermittelst der Aufstellung von schöpferischen Definitionen bislang erzielten Resultate als einwandfrei betrachtet werden, man diese Resultate auch ohne Benutzung schöpferischer Definitionen gewinnen kann. Wir werden den ersten Weg gehen.

Um allgemein zu zeigen, daß beim Aufbau einer exakten Disziplin die Verwendung schöpferischer Definitionen unter den angegebenen Voraussetzungen nicht zu rechtfertigen ist, lassen wir uns von nachstehender Ueberlegung leiten, die wir dann im einzelnen durchzuführen haben. Wir zeigen zunächst, daß innerhalb der Lehre vom Schluß, den Klassen und den Relationen jeder nur aus vollständigen Schlüssen bestehende Ableitungszusammenhang als ein Spiel interpretiert werden kann, oder besser, daß ihm ein Spiel, der Logik-Kalkül derart zugeordnet werden kann, daß, wenn aus Sätzen s, t, . . . die Sätze x, y, . . . beweisbar sind, den Sätzen s, t, . . . und x, y, . . . Spielstellungen S, T, . . . und X, Y, . . . derart entsprechen, daß aus

[1]) Diese Maxime hat P. Bernays, Erwiderung auf die Note von Herrn Aloys Müller: „Ueber Zahlen als Zeichen", Mathematische Annalen, 1923, S. 163, dahin formuliert: „Die Möglichkeit einer philosophischen Einstellung, von welcher aus die Zahlen als existierende, nicht-sinnliche Gegenstände erfaßt werden — die gleiche Art von idealer Existenz müßte allerdings dann folgerichtigerweise auch transfiniten Zahlen, insbesondere den Zahlen der sogenannten zweiten Zahlenklasse zuerkannt werden, — wird durch die Hilbertsche Theorie nicht ausgeschlossen. Wohl aber ist es ihr Ziel, eine solche Einstellung für die Grundlegung der exakten Wissenschaften entbehrlich zu machen."

den Stellungen S, T, ... vermittelst der Spielregeln die Stellungen X, Y, ... erspielt werden können, und daß umgekehrt, wenn aus Spielstellungen S, T, ... die Stellungen X, Y, ... spielgerecht erspielbar sind, alsdann die diesen Stellungen entsprechenden Sätze s, t, ... und x, y, ... sich so verhalten, daß aus den Sätzen s, t, ... beweisbar sind die Sätze x, y, ... Wir ermitteln dann die Spielstellungen bezw. Spielregeln, die den in Verbindung mit Beweisen benutzten Definitionen der betreffenden Lehre beim Spiele entsprechen. Hierbei stellen wir fest, daß nur eine ganz bestimmte Klasse von Definitionen, die wir präzise kennzeichnen werden, spielmäßige Analoga besitzen und daß zu diesen die schöpferischen Definitionen nicht gehören. Erblickt man jetzt mit D. Hilbert nach dem Vorgange von G. Peano, G. Frege, B. Russell und A. Whitehead in der axiomatischen Behandlung der betreffenden Lehre, welche Behandlung, wie wir zeigen werden, zu einem bestimmten Zeichenspiel führt, die relativ vollendetste Begründung, deren die Lehrsätze der Disziplin fähig sind, so folgt daraus, daß in letzter Hinsicht der Gebrauch aller derjenigen aber auch nur derjenigen Operationen beim Aufbau dieser Lehre zu rechtfertigen ist, welche sich auch bei kalkül-spielmäßiger Behandlung in kalkülspieltechnischer Hinsicht als einwandfrei erweisen. Da zu diesen Operationen aber nur solche Definitionen gehören, die innerhalb der Lehre vom Schluß, den Klassen und den Relationen, sofern man in dieser Lehre von der jeweiligen Bezeichnungsweise wesentlich unabhängige Wahrheiten sucht, keine schöpferischen Definitionen sind, so folgt, daß die Verwendung schöpferischer Definitionen beim Aufbau der betreffenden Lehre unter der angegebenen Voraussetzung nicht zu rechtfertigen und darüber hinaus zu verwerfen ist. Eine skrupellose Verwendung schöpferischer Definitionen führt nämlich nachweisbar zu Irrtümern und außerdem sind geeignete Anwendungskriterien nicht angegeben. Dieses hinsichtlich der Brauchbarkeit schöpferischer Definitionen negative Resultat ist dann weiterhin auch für alle anderen exakten Disziplinen zu begründen, wobei als Kriterium der „Exaktheit“ einer Disziplin das Vorhandensein der oben angegebenen Beschaffenheit derselben gilt. Hieraus werden wir dann durch „Formalisierung“ einer solchen Disziplin zeigen können, daß das gleiche Resultat auch für jede andere exakte Wissenschaft zutrifft.

Bevor wir aber daran gehen, die Rolle der schöpferischen Definitionen beim Aufbau einer exakten Disziplin entsprechend der angegebenen Ueberlegung zu ermitteln, wollen wir noch einem verbreiteten Mißverständnisse ausdrücklich vorbeugen. Man pflegt gerne die Mathematik als diejenige Disziplin hinzustellen, in der die Auswirkung der sog. Definitionsfreiheit in Form von „schöpferischen Definitionen" geradezu oder wenigstens vorzugsweise der Träger des wissenschaftlichen Fortschritts sein solle, und man glaubt vielleicht noch außerdem, daß die auf R. Dedekind zurückgehende treffende Charakterisierung der Mathematik als einer freien, im Sinne einer logisch willkürlichen [1]) Schöpfung des menschlichen Geistes notwendig „schöpferische Definitionen" in ihr verlange. Da hat es denn leicht den Anschein, als ob eine Lehre von der Definition, die nur sehr eingeschränkt schöpferische Definitionen im oben angegebenen Sinne akzeptiert, in unhebbaren Konflikt mit der Mathematik gerät. Ein derartiger Konflikt ist aber gar nicht vorhanden. Es läßt sich vielmehr zeigen, daß der der Mathematik und Teilen der Logik eigentümliche wissenschaftliche Fortschritt vermittelst symbolischer Konstruktionen durchaus kein Fortschritt vermittelst schöpferischer Definitionen ist, sofern man auch in der Mathematik und den betreffenden Teilen der Logik Wahrheiten sucht, die als von ihrer jeweiligen Bezeichnungsweise wesentlich unabhängig betrachtet werden. Aber selbst wenn man die erwähnten Disziplinen vorwiegend als spielgerecht zu spielende Spiele auffaßt, in denen infolgedessen die Frage nach der Wahrheit und u. U. noch die nach der Widerspruchslosigkeit völlig oder weitgehend belanglos ist, wird sich ergeben, daß auch dann der Fortschritt beim Mathematik- und Logikspiel nur zum kleinsten, vergleichsweise unwesentlichsten Teile auf der Aufstellung und Benutzung von „schöpferischen Definitionen" beruht.

II. Die Definitionen im Logik-Kalkül.

A. Der Logik-Kalkül als Spiel.

Um die Rolle der Definitionen im Logik-Kalkül zu ermitteln und damit zugleich die der schöpferischen Definitionen, gehen wir von derjenigen Ausgestaltung dieses Kalküls aus, die von Whitehead und Russell in den *Principia Mathematica* [2]) angegeben ist, deren Ausführungen Bd. I, S. 90 ff. wir als bekannt voraussetzen. Unsere Aufgabe ist es, den bei C. J. Lewis [3]) wohl erstmalig auftretenden

[1]) Eine Deutung dieses bekannten Wortes, die Fries'schen Gedankengängen nahesteht, findet man bei G. Hessenberg, Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 1908, S. 156 ff.

[2]) Whitehead und Russell, *Principia Mathematica*, Bd. I, 2. Aufl. 1925.

[3]) Vgl. C. J. Lewis, *A Survey of symbolic Logic,* 1918, S. 354 ff. wie E. L. Post, *Introduction to a General Theory of Elementary Propositions*, American Journal of Mathematics, 1921, S. 163 ff.

Gedanken der spielgemäßen Behandlung, der für uns gemäß der früher angegebenen Ueberlegung von ausschlaggebender Wichtigkeit ist, zu präziser Ausführung zu bringen. Wir haben also den Whitehead-Russell'schen Kalkül als Spiel aufzuziehen. [1])

Bei Benutzung einer von P. Bernays herrührenden Vereinfachung [2]) des ursprünglich Whitehead-Russell'schen Axiomensystems kommen wir dann zu dem nachstehend aufgebauten Spiele: Im Unterschiede etwa zu dem Schachspiel oder dem Gospiel ist das zu beschreibende Spiel, wir wollen es kurz das Schlußspiel nennen, ein bloßes Kombinationsspiel, bei dem es keine gegeneinander spielenden Parteien gibt, sondern bei dem es sich darum handelt, aus den in vier Ausgangsstellungen gegebenen Konstellationen der Spielfiguren (Zeichen) vermöge der Spielregeln andere Konstellationen der Spielfiguren in Form von neuen Spielstellungen spielgerecht zu erspielen. Gleichfalls im Unterschied zum Schachspiel ist jede Spielfigur, jede Ausgangsstellung wie jede spielgerecht erspielte Spielstellung so oft als vorhanden anzusetzen, wie das der besondere Spielverlauf als nützlich erscheinen läßt. Mit anderen Worten, wenn man in einer Ausgangsstellung oder bereits spielgerecht erspielten Spielstellung bei Anwendung der Spielregeln gewisse Aenderungen vornimmt, um zu

---

[1]) Da der logische Kalkül, der sich in den letzten Jahren zu einem unentbehrlichen Hilfsmittel der mathematischen Grundlagenforschung entwickelt hat, in philosophischen Kreisen im allgemeinen noch nicht hinreichend bekannt sein dürfte, halte ich es für angebracht, die vom Verfasser gebrauchten Zeichen kurz zu erklären. Die Buchstaben p, q und r bedeuten irgendwelche Sätze. $\vdash$ ist das Zeichen der Behauptung, $\sim$ das Zeichen der Verneinung, Es bedeutet demnach $\sim p$ das kontradiktorische Gegenteil von p. $p \vee q$ bedeutet „p oder q" d. h. die Aussage, die dann und nur dann richtig ist, wenn mindestens einer der beiden Sätze p und q richtig ist. $\sim p \vee q$ hat demnach den Sinn: „p nicht oder q". Diese Behauptung ist äquivalent der Behauptung: „wenn p, so q". Machen wir von dieser Aequivalenz Gebrauch, so können wir die vier Ausgangsstellungen (S. 476) folgendermaßen interpretieren: Stellung I: wenn p oder p, so p. Stellung II: wenn q, so p oder q. Stellung III: wenn p oder q, so q oder p. Stellung IV: aus „wenn q, so r" folgt: wenn „p oder q", so „p oder r". Was die beiden Spielregeln angeht, so bedarf die erste keiner weiteren Erklärung, die zweite wird verständlich, wenn wir bedenken, daß aus den Voraussetzungen $\vdash$ A und „wenn A, so B", offenbar B gefolgert werden kann. **E. H.**

[2]) Vgl. P. Bernays, *Axiomatische Untersuchungen des Aussagen-Kalküls d. „Principia Mathematica"*, Mathematische Zeitschrift, 1926, S. 305 ff. Die anderweitigen Vereinfachungen von H. M. Sheffer und I. G. P. Nicod berücksichtigen wir nicht, da sie mehr in formaler als in sachlicher Hinsicht wirkliche Vereinfachungen sind.

neuen Spielstellungen zu gelangen, so ist die ursprüngliche Stellung insofern doch als unzerstörbar zu betrachten, als man sie beim Weiterspiel jederzeit als noch in erneuter Ausführung vorhanden ansehen kann und sie in dieser Ausführung infolgedessen bei Fortsetzung des Spieles abermals zur Gewinnung neuer Spielstellungen ohne weiteres benutzen darf.

An Spielfiguren (die in soviel Ausführungen als vorhanden zu betrachten sind, wie das der jeweilige Spielverlauf erheischt) sind zunächst die nachstehenden gegeben: Die Buchstaben p, q und r, die beiden Funktionszeichen $\sim$ und $\smallsmile$, Klammern in Verbindung mit dem Funktionszeichen $\sim$, Punkte in Verbindung mit dem Funktionszeichen $\smallsmile$ wie schließlich das Behauptungszeichen $\vdash$ und in Verbindung mit demselben Punkte. Hierbei haben die Klammern wie die Punkte lediglich die Aufgabe, von anderen Zeichen einer Stellung diejenigen Zeichen abzugrenzen, auf welche sich das Zeichen $\sim$, bezw. das Zeichen $\smallsmile$, bezw. das Zeichen $\vdash$ bezieht, in einer weiter unten noch näher anzugebenden Weise, die für die Anwendung der Spielregeln von Wichtigkeit ist.

Die vier Ausgangsstellungen (die in soviel Ausführungen als vorhanden zu betrachten sind, wie das der jeweilige Spielverlauf erheischt) sind die folgenden:

Stellung I. $\vdash : \sim (p \smallsmile p) . \smallsmile . p$

Stellung II. $\vdash : \sim q . \smallsmile . p \smallsmile q$

Stellung III. $\vdash : \sim (p \smallsmile q) . \smallsmile . q \smallsmile p$

Stellung IV. $\vdash : . \sim (\sim q \smallsmile r) . \smallsmile : \sim (p \smallsmile q) . \smallsmile . p \smallsmile r$

Die Punkte unmittelbar hinter dem Zeichen $\vdash$ bedeuten, daß die Konstellation von Zeichen, die rechts neben demselben auf der Zeile bis zu der ersten etwa vorhandenen Stelle stehen, wo sich eine gleiche oder eine größere Anzahl von Punkten beieinander befindet, eine der vier Ausgangsstellen bildet bezw. aus denselben vermöge der Spielregeln gebildet ist. Ist auf der betreffenden Zeile keine gleiche oder größere Anzahl von nebeneinander befindlichen Punkten vorhanden, so geht die betreffende Stellung bis zum letzten rechts auf der betreffenden Zeile stehenden Zeichen einschließlich. — Die Klammern in Verbindung mit dem Zeichen $\sim$ wie die Punkte in Verbindung mit dem Zeichen $\smallsmile$ werden in ihrer Bedeutung gelegentlich der Beschreibung der Spielregeln charakterisiert werden.

Die beiden Spielregeln sind die folgenden:

R e g e l I. In jeder der Ausgangsstellungen wie in jeder aus denselben erspielten Stellung, sagen wir kurz in jeder Stellung A, darf für einen in A etwa vorkommenden Buchstaben, sagen wir x, irgendein anderer, sagen wir y, gesetzt werden beziehungsweise $\sim y$ beziehungsweise $y \vee z$, sofern man an jeder Stelle, wo x in der betreffenden Stellung vorkommt, dieselbe Substitution vornimmt, und wobei x, y und z irgendwelche Buchstaben bedeuten.[1])

Setzt man nun entsprechend Regel I etwa in Stellung II für q das Zeichen $p \vee r$, so erhält man: $\vdash : \sim p \vee r . \vee . p \vee p \vee r.$ Diese Formel läßt nun aber nicht ihre Struktur hinsichtlich der Zeichen $\sim$ und $\vee$ genau erkennen. Da das aber erwünscht ist, werden diese beiden Zeichen in Verbindung mit Klammern bezw. Punkten vermöge einer zusätzlichen Vorschrift derart benutzt, daß die Klammern bezw. Punkte diejenigen Zeichen von anderen abzuteilen haben, die mit dem Zeichen $\sim$ bezw. $\vee$ als verbunden betrachtet werden sollen. Man läßt bei den Zeichen $\sim$ und $\vee$ jedoch die Klammern bezw. Punkte gelegentlich fort, und zwar die Klammern in Verbindung mit dem Zeichen $\sim$, wenn sich dasselbe auf den rechts unmittelbar neben ihm stehenden Buchstaben bezieht, und die Punkte in Verbindung mit dem Zeichen $\vee$, wenn sich dasselbe nach links bezw. nach rechts nur auf einen unmittelbar neben ihm stehenden Buchstaben bezieht. Sowie man aber entsprechend Regel I Substitutionen vornimmt, hat man auf die Klammern- und Punktsetzung genau zu achten. In unserem Beispiel erhält man dann aus Stellung II vermöge der Ersetzung von q durch $p \vee r$ nicht die oben zunächst angegebene Formel, sondern die folgende: $\vdash : . \sim (p \vee r) . \vee : p \vee . p \vee r$ in der man, um die Struktur der Formel hinsichtlich der Zeichen $\sim$ und $\vee$ zu charakterisieren von Klammern und Punkten entsprechend nachstehenden Angaben Gebrauch macht:

Man benutzt die Klammern derart in üblicher Weise, daß die Zeichen, die von zwei spiegelbildlich gleichen Klammern, einem sog. Klammerpaar, eingeklammert werden, als zu dem Zeichen $\sim$ gehörig betrachtet werden, das unmittelbar links neben der ersten nach rechts offenen Klammer des betreffenden Klammerpaares steht. Eine ähnliche Bedeutung wie die Klammern hinsichtlich des Zeichens $\sim$ haben die Punkte hinsichtlich des Zeichens $\vee$, jedoch mit dem Unterschied, daß sich das Zeichen $\sim$ stets auf rechts neben ihm stehende Zeichen

---

[1]) Regel I läßt sich noch bei Benutzung eines „Funktionsdreiecks" in einer hier nicht näher anzugebenden Weise verkürzen. Für unsere Zwecke genügt die obige Fassung, die sich ersichtlich auf den Begriff einer Variablen wesentlich stützt.

bezieht, und daß das entsprechende Klammerpaar rechts von dem betreffenden Zeichen $\sim$ steht, während das Zeichen $\vee$ sich immer auf Zeichen bezieht, die sowohl rechts wie links von ihm stehen. Hierbei deutet eine unmittelbar rechts neben einem Zeichen $\vee$ stehende Punktmenge an, daß alle rechts von ihm stehenden Zeichen bis hin zu einer gleich großen oder größeren Punktmenge zu dem betreffenden Zeichen $\vee$ gehören. Steht rechts keine gleiche oder größere Punktmenge (unmittelbar beieinander befindlicher Punkte) auf derselben Zeile wie unmittelbar neben dem betreffenden Zeichen, so gehören alle rechts auf dieser Zeile neben $\vee$ stehenden Zeichen zu demselben. Genau entsprechend lautet die Vorschrift für eine unmittelbar links neben einem Zeichen $\vee$ stehende Punktmenge. Gemäß diesen Vereinbarungen über die in Verbindung mit einem Zeichen $\sim$ stehenden Klammerpaare wie die in Verbindung mit einem Zeichen $\vee$ stehenden Punktmengen ist ferner noch zu beachten, daß bei Substitutionen gemäß Regel I unter Umständen einer Stellung zusätzlich neue Klammerpaare bezw. Punktmengen entsprechend einzufügen sind, damit die betreffende Stellung auch nach Vornahme der betreffenden Substitution in ihrer Struktur hinsichtlich der Zeichen $\sim$ und $\vee$ eindeutig gekennzeichnet ist. Da aus dem angegebenen Beispiel aber die Anwendung dieser Bemerkung hinreichend deutlich zu entnehmen ist, wollen wir auf die lediglich etwas umständliche restlose Fixierung dieser Spieleigentümlichkeit verzichten.

Gestattet die Spielregel I bei einmaliger Anwendung, von einer Stellung zu einer anderen zu gelangen, so liefert die jetzt anzugebende Spielregel II ein Mittel, um bei einmaliger Anwendung von zwei Stellungen bei bestimmten Beschaffenheiten derselben zu einer anderen zu gelangen. Repräsentiert $\vdash .\, A$ eine Stellung und $\vdash .\sim A \vee B$ eine zweite (wobei wir hier zu Zwecken einer kurzen Darstellung mit $\vdash .\, A$ beziehungsweise $\vdash .\sim A \vee B$ in ihrer besonderen Form nicht näher oder jedenfalls nicht in allen Einzelheiten gekennzeichnete Stellungen andeuten), so darf vermöge einmaliger Anwendung von Spielregel II die Konstellation von Zeichen $\vdash .\, B$ als eine (spielgerecht erspielte) Stellung betrachtet werden.

Obiges Spiel stellt das der sog. elementaren Lehre vom Schluß (elementaren Lehre von der Deduktion) entsprechende dar. Aus ihm erhält man ohne irgendwelche prinzipiellen Schwierigkeiten vermittelst der Einführung von zusätzlichen Spielfiguren in Gestalt von Funktions- und Variablenzeichen in Verbindung mit dem „All“- und dem „Einige“-(Existenz-)zeichen wie der Aufstellung von wenigen neuen Ausgangsstellungen das der allgemeinen Lehre vom Schluß, den Klassen und den Relationen entsprechende Spiel, wobei man sich zweckmäßigerweise nach der neuen Darstellung von Whitehead und Russell in der zweiten Auflage der *Principia Mathematica*, Bd. I, Anhang A, S. 635 ff. richten wird. Hierbei treten wesentlich neue Spielregeln, was hervorzuheben ist, nicht auf, sondern die alten werden nur entsprechend erweitert. Da jedoch bereits innerhalb der elementaren Lehre vom Schluß alles ausgeführt werden kann, was über die in der exakten Logik auftretenden Definitionen auszuführen ist, brauchen wir auf diese Erweiterung des ursprünglichen Spieles nicht näher einzugehen.

(Schluß folgt.)