Miszellen.

Bemerkungen zum Paradoxienproblem.

von Olaf Helmer, Berlin.

Man findet häufig die Meinung vertreten, die Russellsche Paradoxie und die Paradoxie vom Dorfbarbier seien von gleicher oder zumindest ähnlicher logischer Struktur. Unter der Russellschen Paradoxie werde dabei diejenige von »der Menge aller Mengen, welche sich selbst nicht enthalten«, verstanden, und unter der Dorfbarbier-Paradoxie diejenige vom »Dorfbarbier als dem Manne im Dorfe, der alle die Männer des Dorfes rasiert, welche sich nicht selbst rasieren«.

Die folgenden Ueberlegungen sollen zunächst jene verbreitete Ansicht über die logische Aequivalenz beider Paradoxien widerlegen. Die Klarstellung des prinzipiellen Unterschiedes zwischen beiden, den die logische Analyse aufweisen wird, wird zugleich fruchtbare Gesichtspunkte zur Beurteilung anderer Paradoxien mit sich bringen.

Es sei zunächst eine Vorbemerkung zur Definitionstheorie gestattet. Wir schließen uns der Auffassung von W. Dubislav an, wonach eine Definition nichts ist als eine zusätzliche Substitutionsvorschrift [1]) (zusätzlich im Hinblick auf die allgemeinen Substitutionsregeln, nach denen die Sätze der verwendeten Sprache tautologisch umgeformt werden); eine solche Vorschrift hat im wesentlichen der einen Bedingung zu genügen, daß sie den Kalkül widerspruchsfrei läßt, sofern er es vorher war. Im Grunde ist also, worauf schon hinsichtlich spezieller Fälle R. Dedekind aufmerksam machte, die Aufstellung einer Definition notwendig mit einem diesbezüglichen Beweis verbunden. Handelt es sich etwa speziell um eine Kennzeichnungsdefinition, d. h. um eine Definition der Form „a sei dasjenige Ding, dem die Eigenschaft E zukommt", so bedarf es ersichtlich eines Beweises, daß die Eigenschaft E „kennzeichnend" ist, d. h. daß es wirklich ein und nur ein Ding gibt, dem sie zukommt. Wir wollen dies die Bedingung der Eindeutigkeit nennen. Wird sie nicht beachtet, z. B. indem man definiert: „a sei die größte Primzahl", so läßt sich offenbar jeder beliebige Unsinn ableiten.

Dieser definitionstheoretische Exkurs wird uns die Analyse der Paradoxien erleichtern.

---

[1]) W. Dubislav: *Die Definition*. 3. Auflage 1930, insbesondere S. 68 ff.

Die *Russellsche Paradoxie* ruht auf folgenden beiden Voraussetzungen:

(a) Ist α eine Klassenvariable, so ist $\alpha \varepsilon \alpha$ (sprich: α ist Element von α) eine zulässige Formel.

(b) Bestimmtheitsaxiom: Ist f (x) eine Aussagefunktion, so genügt die Kennzeichnungsdefinition $\alpha =_{\mathrm{Df}} \hat{x}\,(f\,(x))$ der oben formulierten Bedingung der Eindeutigkeit, d. h. es gibt eine und nur eine Klasse, die aus denjenigen x besteht, welche f (x) wahr machen.

(a) und (b) erlauben uns nämlich, folgende Definitionen aufzustellen:

(D 1) $$F\,(\alpha) =_{\mathrm{Df}} \overline{\alpha \;\varepsilon\; \alpha}$$ [2]

und

(D 2) $$\pi =_{\mathrm{Df}} \hat{\alpha}\,(F\,(\alpha))$$

Betrachten wir nun den Ausdruck $\pi \varepsilon \pi$, so erhalten wir unter Benutzung unserer beiden Definitionen

$$\pi \;\varepsilon\; \pi \equiv \pi \;\varepsilon\; \hat{\alpha}\,(\overline{\alpha \;\varepsilon\; \alpha})$$

Die rechte Seite dieser Aequivalenz besagt aber, gemäß der Bedeutung des ε-Zeichens, $\overline{\pi \;\varepsilon\; \pi}$; also hat man

$$\pi \;\varepsilon\; \pi \equiv \overline{\pi \;\varepsilon\; \pi}$$

womit die Paradoxie hergestellt ist. Um sie zu vermeiden, wird man auf eine ihrer Voraussetzungen verzichten müssen. Nun ist das unter (b) formulierte Bestimmtheitsaxiom für den Klassenkalkül alias Mengenlehre unentbehrlich; mit ihm würde der Klassenkalkül fallen. Man wird sich daher zur Streichung der Voraussetzung (a) entschließen müssen. Das bedeutet eine tiefgreifende, aber notwendige Revision der verwendeten Sprache; sie hat ihren präzisen Ausdruck in der *Russellschen Typentheorie* gefunden.

Nun möge die *Dorfbarbier-Paradoxie* einer entsprechenden Formalisierung unterzogen werden. Man setze

(D' 1) $$x\,R\,y =_{\mathrm{Df}} x \text{ rasiert } y$$

(dabei bestehe der Individuenbereich, d. h. der Definitionsbereich der Relation R, aus allen Männern des Dorfes, die überhaupt rasiert werden, sei es von sich selbst oder nicht). Dann ist der Dorfbarbier wie folgt zu definieren:

(D' 2) $$b =_{\mathrm{Df}} (\imath x)\,(y)\,(x\,R\,y \equiv \overline{y\,R\,y})$$

(= „dasjenige x, von dem für alle y gilt: x rasiert y dann und nur dann, wenn y sich nicht selbst rasiert"). Da die Eigenschaft, durch die b hier charakterisiert ist gewiß b zu kommt, gilt:

$$(y)\,(b\,R\,y \equiv \overline{y\,R\,y})$$

setzt man noch $y = b$ ein, so ist man bei der Paradoxie angelangt:

$$b\,R\,b \equiv \overline{b\,R\,b}$$

---

[2]) Die Negation ist durch Ueberstreichen bezeichnet.

Nun bereitet aber in diesem Fall ihre Beseitigung keine Schwierigkeiten: Zwar ist die Definition (D' 1) gewiß unbedenklich; gleiches gilt aber keineswegs von der Kennzeichnungsdefinition (D' 2). Sie stellt vielmehr einen groben Verstoß gegen die früher ausgesprochene Bedingung der Eindeutigkeit dar; es existiert hier nämlich nicht genau ein, sondern gar kein Gegenstand der verlangten Art, und es ist also nichts da, was mit b bezeichnet werden könnte. Damit wird aber jeder (angebliche) Satz, der das Zeichen b enthält, speziell der oben erhaltene, zu einer sinnlosen Zeichenkombination.

Die Verschiedenheit beider Paradoxien scheint uns nun hinreichend klargestellt worden zu sein. Die erste gab Anlaß zu einer weitgehenden Abänderung der Syntax, die zweite konnte durch den bloßen Hinweis auf eine selbstverständlich zu befolgende Regel über die Einführung neuer Termini erledigt werden.

Die allgemeine Situation ist nun folgende: Es liegt eine bestimmte Sprache vor, d. h. ein Vorrat von Zeichen (Worten) sowie eine Reihe syntaktischer Regeln, welche festlegen, wann eine Zeichenreihe eine Formel (ein Satz), genauer: wann sie eine zulässige Formel (ein sinnvoller Satz) bzw. eine unzulässige Formel (ein sinnloser Satz) heißen soll. Von einer vernünftigen Sprache pflegt man nun zu verlangen, daß auf Grund ihrer Syntax jede widerspruchsvolle Formel unzulässig ist. Ist diese Forderung nicht von vornherein erfüllt, so sucht man durch schrittweise Verbesserung der Syntax diesem Zustand nahezukommen. Ein solcher Eingriff in die Syntax wird sich immer dann als notwendig erweisen, wenn eine Paradoxie auftritt: denn eine Paradoxie ist nichts anderes als ein widerspruchsvoller, aber syntaxgemäß abgeleiteter, d. h. zulässiger Satz. Gelingt eine entsprechende Abänderung der Syntax — wie z. B. die Einführung der Typentheorie im Falle der Russellschen Paradoxie — so wird damit der ursprünglich paradoxe Satz in der verbesserten Sprache eine sinnlose Zeichenzusammenstellung.

Im einzelnen wird es sich also beim Auftreten einer Paradoxie zunächst darum handeln, ihre „Ursachen" aufzuspüren, d. h. die syntaktischen Voraussetzungen ihres Zustandekommens festzustellen. Da können wir nun — geleitet durch die eingangs behandelten Paradoxien — folgende Fälle unterscheiden:

1) Der fragliche Satz ist gar nicht syntaxgemäß aufgebaut, sondern verdankt seinen paradoxen Anschein einem Verstoß gegen die Syntax: ein solcher Satz *ist* bereits unzulässig, und es liegt also eine *Scheinparadoxie* vor. (Speziell geht also, wenn man so will, eine echte Paradoxie durch eine geeignete Verbesserung der Sprache in eine Scheinparadoxie über.)

Unter den echten Paradoxien werde ein trivialer Spezialfall vorweggenommen:

2) Der fragliche Satz ist Folgerung eines widerspruchsvollen Axiomensystems. Wir wollen dann von einer *axiomatischen Paradoxie* sprechen.

Die wichtigsten Fälle sind nun aber die folgenden:

3) Die Worte des fraglichen Satzes sind zwar nicht syntaxwidrig zusammengestellt; vielmehr wird der paradoxe Charakter des Satzes durch ein einzelnes in ihm vorkommendes Wort verschuldet. Eine solche Paradoxie möge eine terminologische Paradoxie genannt werden. Ist W das störende Wort, so können wir den Fall, wo W ein undefinierter Grundbegriff ist, als unter 2) erledigt betrachten, da die Eigenschaften der Grundbegriffe durch ein Axiomensystem beschrieben werden. W kann also als ein durch Definition eingeführter Begriff augesehen werden. Eingriffe in die Syntax der vorliegenden Sprache, die die Paradoxie ausschalten sollen, wären dann also auf dem Gebiet der Definitionsregeln vorzunehmen. Z. B. würde die Dorfbarbier-Paradoxie eine terminologische Paradoxie sein, sofern die zugrundegelegte Sprache noch als so primitiv angesehen wird, daß in ihr die Aufstellung von Kennzeichnungsdefinitionen syntaktisch zulässig ist, welche nicht der erwähnten Bedingung der Eindeutigkeit genügen. Uebrigens beruhen, soweit sich übersehen läßt, alle bekannten terminologischen Paradoxien auf einem Verstoß gegen die Eindeutigkeitsbedingung bei Kennzeichnungsdefinitionen.

4) Die Worte des fraglichen Satzes sind sämtlich einwandfrei definierte oder Grundbegriffe, der paradoxe Charakter des Satzes kommt erst durch die Zusammenstellung der Worte zustande. In diesem Fall wollen wir die Bezeichnung syntaktische Paradoxie wählen. In einer Sprache ohne Typentheorie ist z. B. die Russellsche eine syntaktische Paradoxie. Durch die Einführung der Typentheorie hofft man die Gefahr syntaktischer Paradoxien endgültig überwunden zu haben. Da jedenfalls die Typentheorie eindeutige Regeln darüber aufstellt, wie man aus Grundbegriffen und definierten Begriffen einen Satz zusammenstellen darf (nämlich durch Einsetzen von Argumenten in die Leerstellen von Funktionen, durch Verknüpfung mit Hilfe der logischen Grundverknüpfungen sowie durch Voranstellen gewisser logischer Operatoren), würde eine neuerlich auftretende syntaktische Paradoxie nicht durch eine Ergänzung zur Typentheorie erledigt werden können, sondern würde eine völlige Abänderung der Typentheorie erzwingen.

Zusammenfassend können wir feststellen: Die Frage, ob ein vorgelegter Satz paradox ist, hat nur Sinn im Hinblick auf eine bestimmte Sprache. Unter den echten Paradoxien, d. h. denen, die nicht bloß durch Nichtbeachtung einer Syntaxregel entstanden sind, unterscheiden wir axiomatische, terminologische und syntaktische. Für ihre Beseitigung sind bezw. zuständig die Axiomatik, die Definitionslehre und die Typentheorie.