Zur neupositivistischen Philosophie der Mathematik.

Von Arnulf Molitor, Perchtoldsdorf bei Wien.

(Schluß.)

3. Der vermittelnde Standpunkt Mannourys[1]*).*

Seine Ansichten, die ebenso wie jene Hahns vom Pragmatismus stark beeinflußt sind, hat unser Autor am ausführlichsten in seinem Jugendwerk *Philosophisches und Methodologisches zur Elementarmathematik*, Harlem 1909, ferner in *Mathesis en mystiek*, Amsterdam 1925, und letztlich in Form eines kurzen Selbstreferats in Arend Heytings *Mathem. Grundlagenforschung, Intuitionismus, Beweistheorie*, Berlin 1934, dargelegt. Schon der Ort, an dem besagtes Referat erschienen ist, weist auf die Beziehungen Mannourys zum Intuitionismus hin, die allerdings — ebenso wie jene zum Pragmatismus — in seinem erstgenannten Werke vielleicht weniger als in den folgenden deutlich werden. Andererseits erscheinen bei ihm so manche Auffassungen des „Wiener Kreises" mehr als zehn Jahre vor dessen Begründung schon vorweggenommen und sein Selbstreferat stellt seiner eigenen Erklärung zufolge den ersten Versuch dar, die Gegensätze zwischen Logizismus und Intuitionismus zu überbrücken.

Mannoury will — radikal pragmatistisch — die Mathematik nicht als eine eigentliche Wissenschaft, sondern lediglich

---

[1]) G. Mannoury (1909 Privatdozent für die logischen Grundlagen der Mathematik an der Universität Amsterdam) hat außer den hier angeführten noch weitere einschlägige Arbeiten in holländischen Fachzeitschriften veröffentlicht, die mir ebenso wie *Mathesis en mystiek* aus sprachlichen Gründen unzugänglich geblieben sind. Der Umstand, daß der Verfasser die deutsche Sprache nicht in gleicher Weise beherrscht wie seine Muttersprache, hat vermutlich dazu beigetragen, sein Jugendwerk, das seines Titels ungeachtet sich keineswegs auf das beschränkt, was man gewöhnlich unter „Elementarmathematik" versteht, stellenweise unklar und schwer lesbar zu machen.

als Lebenserscheinung betrachten (vgl. Heytings genanntes Werk S. 58). Er unterscheidet dabei genau zwischen der mathematischen Erscheinungsform oder formalistischen Mathematik einerseits, und der mathematischen Denkform oder intuitionistischen[2]) Mathematik andererseits, wobei die erstere vollständig, die zweite teilweise sprachlicher Natur ist[3]). Daraus geht für Mannoury hervor, daß nicht die Axiomatik das eigentliche Anfangsstadium mathematischer Entwicklungsmöglichkeiten bilden kann, sondern dieser vielmehr sog. signifische oder psycho-linguistische Untersuchungen voranzugehen haben, auf Grund deren das Gebäude der Axiomatik errichtet werden soll, und daß überhaupt für die Grundlagenfragen die empirische, spezieller die psychologische Betrachtungsweise maßgebend ist. Im allgemeinen nähert sich, wie gesagt, M.s Standpunkt „am meisten dem Brouwerschen einerseits und dem des Wiener Kreises andererseits“. (Der bestimmte Artikel hier ist etwas unvorsichtig gewählt, denn der letztere Standpunkt ist keineswegs durchaus einheitlich.) Von Brouwer will sich M. durch eine weitergehende Skepsis in bezug auf den Wahrheitsgehalt (der Mathematik) unterscheiden; auch könne vom intuitionistischen Standpunkte aus der Einwand erhoben werden, daß die von M. geforderten psychologischen Untersuchungen die intuitionistische Mathematik zum Teile schon voraussetzen. (Diese etwas befremdliche Wendung kann m. E. nur so verstanden werden, daß der Sprachgebrauch Brouwers und seiner Schule eben die ganze Logik, die wie jeder Wissenschaft auch der Psychologie zugrunde liegen müsse, zur Mathematik zählt. Aber auch dann bleibt das Bedenken bestehen, daß es sich bei dieser Grundlage nicht sowohl um die „Logik“ als Wissenschaft oder als System, sondern vielmehr um die Fähigkeit logischen Denkens als notwendige Voraussetzung handelt.) Von den Ansichten der Wiener trennt ihn seine Bevorzugung psychologischer Betrachtungen, die für ihn primär, für jene aber mehr oder weniger sekundär seien. — Auch das ist noch zuviel gesagt, denn so weit mir bekannt, hat niemand aus dem Wiener Kreis solche angestellt oder auch nur berücksichtigt. Wohl aber begegnet sich M. speziell mit Carnap, wenn er die sprachliche Natur der Mathe-

---

[2]) S. unten Fußnote 7.

[3]) M. verkennt dabei völlig die Gefahr „glossomorphen“ Denkens, s. Teil 2 dieser Arbeit.

matik betont, s. o. Den Schluß daraus auf die Notwendigkeit empirischer und psychologischer Untersuchungen ziehen die Wiener allerdings nicht, und es ist wohl auch nicht ganz verständlich, wenn M. hier von einem „Hervorgehen“ spricht.

Die folgenden Erörterungen stützen sich hauptsächlich auf des Autors breite Entwicklungen in seinem erstgenannten Werke, die M. später keineswegs desavouiert oder auch nur abgeschwächt hat, zu denen er sich vielmehr auch 1934 noch wenigstens indirekt und implizite bekennt.

Je mehr wir den Zusammenhang der geometrischen Theoreme und Postulate kennen gelernt und den früheren „Axiomen“ ihre Ausnahmestellung aberkannt haben, umsomehr ist das Gebiet des Kantschen Apriori eingeschränkt worden. (Mannoury spielt hier etwa auf das Parallelenaxiom und die Entstehung der nichteuklidischen Geometrie an.) Die Revolution, die sich auf dem Gebiete der mathematischen Grundbegriffe vollzieht, wird nach M. voraussichtlich nicht Kant, sondern Hegel Recht geben, wenn dieser sagt: »Das Wirkliche ist nicht ein Räumliches, wie es in der Mathematik betrachtet wird; mit solcher Unwirklichkeit, als die Dinge der Mathematik sind, gibt sich weder das konkrete sinnliche Anschauen, noch die Philosophie ab.« (*Phänomenologie des Geistes,* 1832, Vorrede S. 9.) Wenn er aber hier (l. c. S. 9/10) M. im Anschluß an Hegel der Mathematik die Kompetenz abspricht, über die Wirklichkeit Aussagen zu machen, — noch deutlicher vielleicht, wenn er (l. c. S. 12) erklärt, daß die mathematische Art, die Wirklichkeit vorzustellen, zwar den menschlichen gesellschaftlichen Bedürfnissen vorzüglich entspricht, aber niemals für eine adäquate gehalten werden darf, — so widersprechen dem andererseits seine Behauptungen, daß die Ausbildung der mathematischen Philosophie uns dazu nötige, den Unterschied zwischen mathmatischer und experimenteller Wahrheit für einen unwesentlichen zu erklären (l. c. S. 12), und daß die Mathematik zu sehr mit der Psychologie — also mit psychischer Wirklichkeit —, verbunden sei, als daß wir uns der Frage nach der Berechtigung einer Berufung auf eine eigene Form der Anschauung entziehen könnten (S. 56).

Auch im folgenden ist die Stellungnahme M.s keineswegs klar und eindeutig. Was man „Tatsache (mehr eigentlich: ein faktisches Urteil)“ nennt, soll mit gleichem Rechte als ein Komplex von Erinnerungen und Erwartungen — also wiederum von psychologischen Wirklichkeiten — umschrieben werden können

(l. c. S. 125); vergleichen wir damit unsere mathematischen Überzeugungen, so ergibt sich nach M., daß ein solches (hypothetisches) Urteil immer in die Gestalt gebracht werden kann: »Ich erwarte, daß A eintreten wird, falls die Bedingung B erfüllt ist, und erinnere mich, daß es stets eingetreten ist, so oft B erfüllt war«. Gleich im Anschluß daran erklärt uns M., daß die Geometrie, soweit sie Erfahrungsergebnisse mitbegreift, der Naturbeschreibung oder noch besser der Psychologie angehört, mit Mathematik aber nichts zu schaffen habe. Sofern sie aber mathematisch, d. h. analytisch ist, sei sie von jeder Erfahrung, von jeder „Tatsache" völlig unabhängig. — Aber auch „die mathematische Geometrie ist nicht anderes als ein sprachliches Mittel, um gewisse Erinnerungen und Erwartungen" — also, nochmals: psychische Wirklichkeiten! — „zum Ausdruck zu bringen, ein Mittel jedoch, das ebensogut dazu dienen könnte, jede andere Erfahrung wiederzugeben. Es kann uns dann auch diese Geometrie ebensowenig etwas über die . . . Wirklichkeit lehren, als umgekehrt irgend eine Erfahrung sie bestätigen oder widerlegen könnte . . . Die Mathematik selbst enthält weder Wahrheit noch Lüge, sie hat nur eine bestimmte Form: die logische" (l. c. S. 126/127). — Hierin begegnet sich M. mit Wittgenstein, Carnap und Hahn. Aber andererseits erklärt er uns sogleich, daß diese seine Ansicht „ziemlich genau mit derjenigen P. Boutroux' übereinstimme, der zufolge es unmöglich sei, die ganze Mathematik aus dem Satze vom Widerspruche abzuleiten, auch wenn die alten empiristischen Theorien sicher falsch sind. — Das heißt aber doch nur m. W., daß nicht die ganze Mathematik analytisch ist. Überdies folgt aus jener Erfahrungsunabhängigkeit der Mathematik, ja selbst aus dem Umstand, daß sie nichts Neues über die (von M. nicht näher nalysierte) Wirklichkeit lehrt, m. E. noch nicht zwangsläufig, daß sie über sie bezw. über die Erfahrung in keiner Weise, auch nicht implizite, etwas aussagt. „Unabhängig" kann sehr verschiedene Bedeutungen haben, was M. nicht berücksichtigt. Das Parallelenaxiom z. B. ist von den übrigen Axiomen der euklidischen Geometrie insofern unabhängig, als es aus ihnen nicht abgeleitet werden kann; wohl aber ist es andererseits gleichwohl von ihnen insofern abhängig[4]), als

[4]) Vgl. Moritz Geiger *Systematische Axiomatik der euklidischen Geometrie*, Augsburg 1924, S. 27 f.

es ohne irgendwelche axiomatische Festlegungen betreffend die Begriffe des Punktes, der Geraden, des Sichschneidens etc. mathematisch sinnleer wäre. Woraus ist aber dann jener Teil der Mathematik bezw. der Geometrie abzuleiten, der nicht rein analytisch ist? Die Geometrie, erwidert uns M., ist erfahrungsmäßig entstanden. Anfangs eine Sammlung von Regeln, welche aus der Beobachtung fester Körper abgeleitet waren, ist sie in die Gestalt eines teilweise analytischen Systems gebracht worden" (S. 128). „Haben wir . . . also die Grundbegriffe des euklidischen Systems aus Voraussetzungen bezüglich Wahrnehmbares . . . abgeleitet, so ist damit (jedoch) nicht gesagt, daß diese Voraussetzungen dazu genügen würden, Saccheris Ideal: „Euclides ab omni naevo vindicatus" zu verwirklichen", . . . denn diese Voraussetzungen gestatten noch die verschiedensten Spezialisierungen (S. 197). „Das Angeführte möge aber dazu genügt haben, klar zu machen, wie die Grundvoraussetzungen der Geometrie weder von der Erfahrung bedingt, noch von dieser unabhängig sind". (Vgl. oben die Bemerkung über die verschiedenen Bedeutungen von „unabhängig"!) Denn „ein geometrisches System . . . kann . . . allen logischen Gesetzen gehorchen, ohne ein »ähnlich-sehendes« Abbild zu sein von unseren Erfahrungen in Bezug auf unsere Lineale und Zirkel" (S. 198), — eine Wendung, die das von M. Gesagte, eigentlich Gemeinte, keineswegs klarer macht. Obwohl also die geometrischen Grundvoraussetzungen nicht erfahrungsbedingt sein sollen, versichert uns M. sogleich S. 199, daß wir „irren würden, wenn wir den Einfluß der »Tatsachen« (d. h. der »psychischen Tatsachen«) auf das Entstehen der Geometrie als menschlichen Gedankenbaues verkennen wollten. Der Kantsche Apriorismus, welcher den ganzen »Euklid« fix und fertig aus jedermanns »innerer Anschauung« herleiten zu können glaubte, mag . . . kein Recht behalten haben, (aber) es hat doch immerhin »jedermanns« Art, die Dinge zu sehen, wenn nicht den Grund, so doch die Veranlassung zur Geometrie gegeben, und in diesem Sinne ist auch außer dem Gebiete der Logik in unserer »Psyche« Raum für den Raum!" (Von mir gesperrt. Verf.) — Spitzfindig könnte man da zunächst nach dem eigentlichen Unterschied zwischen „erfahrungsbedingt" und „von den Tatsachen beeinflußt", zwischen „dem Grund" und der „Veranlassung" fragen, bezw. ob die Veranlassung nicht auch zu den Gründen zählt, oder nicht diese die „Veranlassung" aus-machen, und welches denn „der (eigentliche, letzte) Grund ist, wenn es nur einer ist. Auf jeden Fall aber sagt die Geometrie — auch die „mathematische“ —, wenn anders M.s letzte Ausführungen zu recht bestehen, zum mindesten indirekt auch etwas über „Erfahrung“ bezw. Wirklichkeit aus, — was im Widerspruch zu des Autors Erklärungen l. c. S. 126 f. steht, denen gemäß sie „weder Wahrheit noch Lüge“ enthält. M. kommt also, in dem zitierten Werke wenigstens, über ein ständiges Schwanken seiner Meinungen nicht hinaus, wenn auch die, sagen wir, neupositivistische Komponente in seinem Denken, die der Mathematik keine Aussagen über Wirklichkeit zubilligt, weitaus die stärkere zu sein scheint, — wie er ja auch ganz wie Hahn erklärt, daß der Astronom die Sonnenfinsternis nicht auf Grund seiner Berechnungen, sondern seiner Beobachtungen vorherzusagen imstande sei[5]).

In der Richtung des Neupositivismus liegt auch die große Wertschätzung der Logistik. Peanos *Formulaire de mathematiques* soll „uns tiefer in die Geheimnisse der menschlichen Erkenntnis einzudringen erlauben . . ., als alle tiefsinnigen Folianten der Philosophen von Fach zusammen“ (l. c. S. 131)[6]). Ganz im Sinne Carnaps und Wittgensteins ist es ferner, wenn M. uns warnt, die logistische Formel $a \supset b . \cap . b \supset c . . \supset . . a \supset c$, in Worten: »Wenn aus dem Urteil a das Urteil b, und (gleichzeitig) aus dem Urteil b das Urteil c folgt, so folgt aus a unmittelbar c«, an sich als eine abstrakte Notwendigkeit, als eine *causa sui* zu betrachten; „sie ist nur eine der »Anweisungen zum Gebrauche« der Symbole“ $\supset$ und $\cap$, und diese »Anweisungen« könnten durch ganz andere ersetzt werden, ohne daß irgend ein »Denkgesetz« dadurch verletzt würde. Hieraus aber geht nicht (etwa) hervor, daß die Urteile, welche wir gewohnt sind in der Form des Syllogismus auszusprechen, für uns keinerlei Gültigkeit haben könnten, sondern nur erstens, daß diese Gültigkeit keine absolute, sondern eine zu unseren Erfahrungen und Erwartungen relative sein muß, und zweitens, daß diese subjektive

---

[5]) Hahn, bei dem sich dasselbe Beispiel findet (s. Teil 2 dieser Abhandlung), ist offenbar hier, wie auch sonst vielleicht, von M. beeinflußt.

[6]) Auch wenn man Peanos Werk noch so hoch einschätzt, erscheint diese Behauptung günstigstenfalls als eine gelinde Übertreibung, denn jenes „Formulaire“ betrachtet ausschließlich die Mathematik und Logistik, nicht aber Fragen der Erkenntnis.

Wahrheit von der Form unserer Ausführungen oder gar »Deduktionen« völlig unabhängig ist." (Von mir gesperrt. Verf.) — Hier aber und noch mehr im folgenden deutet sich bereits der Intuitionismus an. „Es ist nämlich (zwar) durch die Zugrundelegung einzelner Symbole . . . . ein beträchtlicher Teil der sonst erforderlichen Denkarbeit überflüssig geworden, aber dennoch wird dadurch die Handhabung der Formeln noch nicht auf eine bloß mechanische Handlung zurückgeführt. Es ist ja bei jedem Schritte erforderlich, sich von der Bedeutung der variablen Symbole . . . Rechenschaft zu geben, um jedesmal nur diejenigen Urteile . . . anzuwenden, welche schon vorher bewiesen . . . waren, oder wenigstens mit den schon bewiesenen nicht im Widerspruch sind" (l. c. S. 139). Es ist zwar möglich, „in bestimmten Fällen einen Widerspruch . . . in formeller Weise dazutun, ohne dabei auf die eigentliche »metamathematische« Bedeutung[7]) der angewandten Sym-

[7]) Im Anschluß an Heyting (l. c. S. 37—40) mögen die hier wiederholt gebrauchten Bezeichnungen „formalistisch" bezw. „formale Mathematik", „inhaltliche", „intuitive", „intuitionistische" und „Metamathematik" soweit wie bei der gebotenen Kürze tunlich erläutert werden. Sie stammen zumeist von Hilbert. — Die „formalistische" Mathematik besteht in einem Verfahren zur rein mechanischen Herleitung von Formeln unter grundsätzlichem Absehen von deren (und der einzelnen Symbole) Bedeutung, ja Verzicht auf eine solche. Bestimmte bloße Zusammenstellungen von graphischen Zeichen, die an sich nichts bezeichnen, werden als „Axiome" vorangestellt, und es werden die Regeln angegeben, nach welchen aus jenen „Axiomen" in rein mechanischer Weise andere Zeichenkombinationen, sog. „beweisbare Formeln" hergeleitet werden können. „Inhaltliche" (intuitive, für das geistige Auge „anschauliche") Schlüsse (s. u. das Beispiel!) zieht diese formalistische Mathematik nicht. (Heyting selbst spricht da von „inhaltlichen logischen Schlüssen", was mir fast eine contradictio in adjecto zu sein scheint, wenn „logisch" soviel wie „analytisch" bedeutet.) — Neben diese formalistische tritt nun eine „Metamathematik", die umgekehrt alle „inhaltlichen" (intuitiven) Schlüsse enthält, die die formale Mathematik betreffen, ja überhaupt nur im obigen Sinne „anschauliche", unmittelbar evidente Schlüsse zuläßt. (Ein Beispiel eines solchen „inhaltlichen" Schlusses böte nach Heyting der folgende: „Daß eine Formel, welche die Form eines Widerspruches hat (etwa $1 \neq 1$) unter den beweisbaren Formeln nicht vorkommen kann, läßt sich selbst „formal" nicht beweisen (denn die „formale" Mathematik enthält solche . . . Schlüsse nicht.)"). — Der Zusammenhang zwischen („formaler") Mathematik und Metamathematik soll aus folgender These Hil-

bole Rücksicht zu nehmen; . . . ein formelles Kriterium aber für . . . die Kompatibilität zweier Urteile ist . . . noch nicht aufgefunden worden, und die Logistiker haben sich im allgemei-

---

berts klar werden: ». . . Die Entwicklung der mathematischen Gesamtwissenschaft . . . vollzieht sich . . . in beständigem Wechsel auf zweierlei Art: durch Gewinnung neuer beweisbarer Formeln aus den Axiomen mittels formalen Schließens (d. h. mittels jener mechanischen Herleitung) und andererseits durch Hinzufügung neuer Axiome nebst dem Nachweis ihrer Widerspruchsfreiheit mittels inhaltlichen Schließens.« Diese scharfe Trennung zwischen formaler Mathematik und „anschaulicher" (intuitiver) Metamathematik ist nach Heyting das wesentliche neue Moment der Beweistheorie Hilberts, demgemäß auch das Wort „beweisen" in Bezug auf die formale Mathematik eine ganz andere Bedeutung erhält als in Bezug auf die Metamathematik: dort heißt es so viel wie „Ableiten gemäß den Kalkülregeln", hier: „Zeigen mittels inhaltlicher Schlüsse". — Wir hätten also hier im Sinne Heytings drei verschiedene Arten von Mathematik zu unterscheiden: formale, inhaltliche (intuitive) und Metamathematik, — da er selbst es als eine wichtige Frage hinstellt, wieviel aus der „inhaltlichen" in die Metamathematik eingeht, während aus obiger (weitaus klareren!) These Hilberts vielmehr hervorzugehen scheint, daß „inhaltliche" und Metamathematik für den letztgenannten identisch sind. (Heyting ist da allerdings nicht konsequent, denn kurz vorher suggeriert er die nämliche Identifikation.) — Hilbert habe, anfänglich wenigstens, die Ansicht vertreten, daß auch für die Widerspruchsfreiheitsbeweise der Allgemeinbegriff der natürlichen Zahl, insbesondere die vollständige Induktion, entbehrlich sei. Demgegenüber erhob Weyl (und vor ihm eigentlich schon Poincaré) den Einwand, daß die inhaltlichen Gedankengänge der Beweistheorie Hilberts (wenn auch) »in hypothetischer Allgemeinheit« (so doch) »an irgend einem Beweis, an irgend einem Zahlzeichen durchgeführt« würden. Also wäre die »inhaltliche Induktion«, die Hilbert in der Metamathematik anwendet, identisch mit der »vollständigen Induktion« in dem Sinn, den diese in der inhaltlichen Mathematik hat. Trotzdem also in die Metamathematik mehr von der inhaltlichen eingehe, als Hilbert anfänglich glaubte, ist erstere dennoch keineswegs mit der „intuitionistischen" Mathematik — nunmehr der vierten Spezies dieser Wissenschaft! — identisch, obwohl es immerhin schwierig sei, die Grenzen zwischen diesen beiden Mathematiken genau anzugeben. — Auch wenn wir, wie es offenbar im Sinne Heytings liegt und aus anderen seiner Ausführungen hervorgeht, diese „intuitionistische" Mathematik von der „intuitiven" im weiteren Sinne (d. h. von der — im Gegensatz zur formalen Mathematik — „intuitiv klaren", „anschaulichen", logisch evidenten) als diejenige unterscheiden, die zwar auch auf das Prädikat der intuitiven Klarheit (wenigstens) Anspruch erhebt, aber im übrigen die speziellen radikalen Auffassungen Brouwers und seinen begnügt, jede Einführung neuer Systeme ... (nur) durch ein „B e i s p i e l" zu rechtfertigen" (l. c. S. 140). Da aber auch letzteres doch den schon vorhandenen Begriffen entnommen werden, also „in sich selbst (schon) widerspruchslos" sein müßte, so müßte doch wiederum die Verträglichkeit der Eigenschaften des Beispiels entweder formal bewiesen, oder »intuitiv« angenommen oder »axiomatisch« gefordert werden, — und die Schwierigkeit wird also nach M. nur verschoben. Man könne streng genommen nicht einmal hoffen, „nach dieser Methode fortfahrend die Berechtigung aller später eingeführten Systeme ... auf diejenige der ursprünglichen, allgemein-logischen Symbole, der *prémisses nécessaires au discours* ... zurückzuführen" — solange „kein formales Kriterium die Widerspruchslosigkeit (eben dieser) logischen Prinzipien darzutun erlaubt" (S. 141). Die grundsätzlichen Gegner der rein analytischen Auffassung der Mathematik wie B r o u w e r haben nun gerade mit jener Schwierigkeit den wesentlichen Unterschied zwischen einem analytsch-symbolischen bloßen Formalsystem und der »eigentlichen« (inhaltlichen) Mathematik begründen wollen[8]). Manoury selbst aber hält diese „Unterscheidung einer mathematischen (zufälligen)

---

ner Schule ausdrückt, so bleibt das Ganze doch höchst unbefriedigend, so lange nicht (unter Verwendung geeigneter Beispiele) streng d e f i n i e r t wird, was „inhaltliche Mathematik" und „inhaltliches Schließen" eigentlich heißen soll, — anstatt daß man den Leser die Bedeutung erraten läßt; und noch dringender schiene mir eine strikte Erklärung darüber, was eigentlich unter jener „inhaltlichen" Mathematik zu verstehen ist, die n i c h t „in die M e t a mathematik eingeht", und was unter jener Metamathematik, die n i c h t „inhaltlich" ist. Eine solche könnte es der obigen Erklärung Hilberts zufolge doch eigentlich gar nicht geben!

[8]) L. E. J. B r o u w e r, der die Fundamentalsätze der Mathematik aus der I n t u i t i o n herleiten will, äußert sich darüber folgendermaßen: »Das Endurteil über die Logistik muß sein: daß sie uns betreffs der Grundlagen der Mathematik nichts lehren kann, weil sie durchaus nicht von der Mathematik getrennt bleibt; daß sie im Gegenteil, ... um sich vor Kontradiktionen zu schützen, die ihr eigentümlichen speziellen Prinzipien alle aufzugeben genötigt ist und sich darauf beschränken muß, eine getreue mechanische, stenographische Abschrift zu sein der m a t h e m a t i s c h e n S p r a c h e, welche a n s i c h k e i n e M a t h e m a t i k ist, sondern nur ein dürftiges Hilfsmittel, dessen die Menschen sich bedienen, um einander Mathematisches mitzuteilen und ihrem Gedächtnis für Mathematik eine Stütze zu geben.« *(Over de grondslagen der wiskunde*, Amsterdam 1907, S. 169, in Mannourys Übersetzung, Sperrungen von B r o u w e r.)

Sprache" von einer „völlig außerhalb des Gebietes menschlicher Verständigung liegenden", also intuitiven, eigentlichen (in sich notwendigen) Mathematik" für die letzte Zufluchtsstätte eines konsequenten Kantianismus (S. 142) und ist dabei in einem konsequenwissen Gegensatz zu Brouwer überzeugt, daß auch diese „sich bei näherer Betrachtung als mit innerem Widerspruch behaftet erweisen wird." Insofern nähert er sich wieder dem Logizismus, wiewohl seine weitere Argumentation unverständlich wird: Beraubt man die Mathematik der „Stütze der auf Menschliches bezüglichen Relativität", der »Worte« und »Symbole«, der »Hypothesen« und »annähernden Vernachlässigungen«, so soll „nur Tatsächliches übrig bleiben, welches weder notwendig noch frei, weder regelmäßig noch chaotisch zu nennen ist" (S. 143). Es läge aber m. E. viel näher, anzunehmen, daß dann von der Mathematik überhaupt nichts übrig bleibt, denn jenes „Tatsächliche" wäre weder A noch non — A![9]) Es mag mit dem mathematischen Kantianismus (synthetischen Apriorismus) wie immer bestellt sein, durch M.s Ausführungen hier wird er kaum berührt werden, und an „innerem Widerspruch" geben sie ihm an der angeführten Stelle im günstigsten Falle nichts nach. Dieses Bedenken wird auch durch die folgenden Sätze unseres Autors nicht behoben, die seine pragmatistische Einstellung verraten (und auch sonst bei Hahn ihre Parallele finden): „Wir haben uns zwar schon abgewöhnt, in der »Wirklichkeit« irgend eine absolute Gleichheit, irgend ein exakt sich vollziehendes »Naturgesetz« zu erwarten, vergessen aber zu oft, daß (auch) eine »annähernde« Gleichheit oder Regelmäßigkeit keine Objektivität, sondern eine Subjektivität ist, welche ohne die Norm der Menschlichkeit ihre Bedeutung verliert. Sagen wir z. B., zwei Dinge seien annähernd gleich schwer, so ist nicht nur in dem Ding-Begriff eine Bezugnahme auf unseren Gedankeninhalt, . . . auf unsere Sprache vorhergedacht, sondern auch die ge-

---

[9]) Man könnte vielleicht geneigt sein, M. so zu verstehen, als wollte er sagen, daß auf sein „Tatsächliches" jene Paare entgegengesetzter Bezeichnungen eben an sich keine Anwendung finden könnten, und demgemäß kein Verstoß gegen den Satz vom ausgeschlossenen Dritten vorliege. Dann stellte er sich aber zum mindesten in Gegensatz zum gewöhnlichen Sprachgebrauch. Denn was wäre ein „Tatsächliches", mit dem die Bezeichnungen „notwendig-frei', ‚chaotisch-regelmäßig' „sphärenfremd" wären?

nannte Beziehung-an-sich ist keine Beziehung zwischen »zwei« Entitäten (eine solche könnte nur absolut-daseiend oder nicht-daseiend, niemals aber graduell oder »annähernd« sein), sondern eine Beziehung dieses Dingenpaares zunächst zu allen anderen Dingenpaaren und damit zu deren Beziehungen. — In der »Natur-an-sich« (eine Contradictio!) oder in der »Wirklichkeit-an-sich« (ein Pleonasmus!) finden wir nicht nur keine »annähernde Gleichheit«, sondern gar keine Vergleichbarkeit, (nicht nur) keine »nahezu erfüllten Naturgesetze«, sondern gar keine Gesetzmäßigkeit. Wirklich synthetische Mathematik aber soll tatsächlich sein — oder sie soll nicht sein!" (S. 143). — Demgengenüber wäre zu fragen, warum denn gerade die angenäherte Gleichheit etc. ohne Beziehung auf „die Norm der Menschlichkeit" ihren Sinn und ihre Bedeutung verlieren soll, und nicht ebenso auch die exakte, — solange nicht in klarer Weise dargetan wird, was denn eigentlich „Gleichheit" u. s. w. bei grunsätzlichem Ausschluß einer Bezugnahme auf ein Erkenntnissubjekt bedeuten soll[10]). Es hat gewiß keinen Sinn, von dem „angenäherten Dasein" einer Gleichheit zu sprechen, aber das ist ganz und gar nicht gleichbedeutend mit dem Dasein einer angenäherten Gleichheit, wie das M. anzunehmen scheint. Endlich bleibt es schwer zu verstehen, daß „Wirklichkeit-an-sich" nur ein Pleonasmus sein soll, wenn „Natur-an-sich" eine Contradictio ist, — es müßte denn sein, daß M. unter „Natur" soviel wie (chaotische) „Wirklichkeit" + (vom Menschengeist vorgeschriebene) „Gesetze" begreift. M. bekennt sich (S. 19) allerdings zum Idealismus Hegels, und die Bestreitung der Auffindung einer Gesetzmäßigkeit in der Natur würde sich in diesen idealistischen Rahmen wohl fügen, — nicht aber der Glaube an eine Wirklichkeit, die gar nicht anders als „an sich" bestehend gedacht werden kann[11]).

Der besagten Schwierigkeit des synthetischen Apriorismus wegen sieht sich nach M. die mathematische Logik genötigt, einen

---

[10]) Das muß keineswegs im Sinne eines Idealismus verstanden werden, der „Dinge" und „Beziehungen" als gewissermaßen schöpferisch durch den Verstand „erzeugt" betrachtet.

[11]) Die von M. schon in seiner Abhandlung *Hegelen of Cijferen?* („De Beweging", 1. Jahrg., 1905, S. 596) beipflichtend zitierte These Hegels lautet: »Das Ding ist Ich; in der Tat ist in diesem unendlichen Urteil das Ding aufgehoben; es ist nichts an sich; es hat nur Bedeutung im Verhältnisse, nur durch Ich und seine Beziehung auf dasselbe.«

„vollkommen einfachen Anfang“ und eine „vollkommen formelle Weiterentwicklung“ zu suchen, eine Aufgabe, zu deren Lösung Hilberts Arbeiten verdienstvolle Versuche bildeten, insbesondere deren Ausgangspunkt, die Definition der mathematischen Gleichheitsbeziehung: »Wenn $x = y$ ist, und für x ein gewisses Urteil $w(x)$ gilt, so gilt auch das Urteil $w(y)$.« Es habe sich jedoch „bei der Ausarbeitung dieses Prinzips eine ernste Schwierigkeit hervorgetan, welche . . . die letzte Ecke bildet, in die der Apriorismus zurückgedrängt worden ist . . .: (nämlich) die unendliche Anzahl der Folgerungen, auf welche aus einer endlichen Zahl von Prämissen geschlossen werden kann, während (doch) jede Einführung eines Aktuell-Unendlichen bei formellem, d. h. mechanischem, begriffslosem oder vom Begriffe unabhängigem Verfahren von vornherein ausgeschlossen erscheint“ (S. 144). — Wieso aber die Anzahl jener Folgerungen eine aktuell unendliche sein müsse, macht M. nicht ersichtlich, sondern führt im folgenden nur des näheren aus, wie Poincaré seine Angriffe mehr und mehr diesem Punkt zugewandt habe, und erörtert dessen bekannte Entwicklungen über (mathem.) Induktion und Beweis durch Rekurrenz. Poincaré finde die Bestätigung seiner Ansicht, daß die Anwendung des Induktionsprinzips zum direkten Nachweis der Verträglichkeit eines Postulatensystems unumgänglich sei, bei Hilbert selbst. „Wenn nämlich Hilbert beweisen will, daß alle Folgerungen aus dem von ihm zugrundegelegten Substitutionsgesetz (d. i. obiger Definition der Gleichheitsbeziehung), mit Hinzunahme des Identitätsgesetzes $x = x$, wieder auf die Form $\alpha = \alpha$, auf Identitäten also, zurückführbar seien, so erfolgt dieser Beweis in der Tat nach der Methode der vollständigen Induktion. Es ist wahr, daß Hilbert die ausdrückliche Anwendung dieses Verfahrens auf alle (»abzählbar unendlich vielen«) Propositionen bis . . . nach der Einführung des endlichen Zahlbegriffs verlegt, aber eben darum muß die beschränktere, vorläufige Anwendung der Rekurrenz, bei Mangel einer formellen Behandlung des Kontradiktions-Begriffes selbst (s. u. S. 149), als nicht ganz berechtigt, und die Kritik Poincarés in dieser Hinsicht als zutreffend betrachtet werden“ (S. 147)[12]). M. glaubt

[12]) *Les mathématiques et la logique*, „Rev. de metaph. et de mor“, 1905, S. 819 f: »Le plus souvent«, sagt dort Poincaré, »pour demontrer qu' une définition n'implique pas contradiction, on procède par exemple, on cherche à former un exemple d'un objet satisfaisant à

gleichfalls nicht, daß der symbolischen Logik die vollständige Beseitigung jener Schwierigkeiten gelingen werde, „weil ihr (nämlich) ein Mißverständnis betreffs der eigentlichen Bedeutung des »Widerspruchs« zu Grunde liegt, welches nicht durch bloß »logische« (d. h. sprachliche), sondern erst durch »philosophische« (d. h. psychologische) Betrachtungen behoben werden kann[13]).

»Widerspruch« und »mathematische Gewißheit« sind nämlich für M. „o p p o s i t a, welche jedes für sich unverständlich sind. Wer in den logischen Redefiguren nur die F o r m sieht, in welcher uns die unveränderliche Wahrheit einer »eigentlichen« (inhaltlichen, Verf.) Mathesis zugänglich werden soll, kann befürchten, daß jene Form mit dem Wesen dieser Wahrheit in »Widerspruch« geraten könnte[14]). Wer aber im Symbolismus nur ein W e r k z e u g sieht zur bequemeren Verständigung über Urteile, deren »Wahrheit« oder »Unwahrheit« immer relativ, und am Ende auf Abschätzung von Empfindungen zurückführbar ist", fährt M. mit deutlich pragmatistischer (und positivistischer)

---

la définition. Prenons le cas d'une définition par postulats: nous voulons définir une notion A, et nous disons que, par définition, un A, c'est tout objet pour lequel certains postulats sont vrais. Si nous pouvons démontrer directement que tous ces pustulats sont vrais d'un certain objet B, la définition sera justifiée, l'objet B sera un e x e m p l e d'un A. Nous serons certains que les postulats ne sont pas contradictoires, puisqu'il y a des cas où ils sont vrais tous à la fois. — Mais une pareille démonstration directe par l'exemple n'est pas toujours possible. Pour établir que les postulats n'impliquent pas contradiction, il faut alors envisager t o u t e s les propositions que l'on peut d e d u i r e d e c e s p o s t u l a t s considérés comme prémisses et montrer que, parmi ces propositions, il n'y en a pas deux dont l'une soit contradictoire de l'autre. Si ces propositions sont en nombre fini, une vérification directe est possible . . . (Mais) si ces propositions sont en nombre infini, on ne peut plus faire cette vérification directe; il faut recourir à des procédés de demonstration où en général on sera forcé d'invoquer ce principe d'induction complète qu'il s'agit précisément de vérifier.«

[13]) Hinsichtlich dieser Identifikation von formaler Logik und „Sprache", und sei es auch mathematische F a c h sprache oder selbst nur graphische Symbolik, bestehen die oben S. 1, Fußnote[3]) geltend gemachten Bedenken.

[14]) Es ist nicht ganz leicht zu verstehen und M. versucht in keiner Weise, es klar zu machen, wie jemals „Form" und „Wesen" einer Wahrheit — gemeint ist doch wohl der I n h a l t einer wahren Aussage — einander widersprechen können.

Wendung fort, „(der) kann dem »Widerspruch« keine objektive Bedeutung, sondern nur die einer bestimmten Zusammenstellung von Redefiguren (Symbolen) beilegen. Dabei mag allerdings diese Zurückführung selbst in den meisten Fällen sehr schwierig durchzuführen sein, und erst nach Analysierung einfacherer Begriffe, wie der des Wissens, ... der Vergleichung... und des Erinnerns (Erwartens) gelingen. Daß aber das Fürwahrhalten eines Urteils eine geistige Handlung sei, nach deren Zweck gefragt werden kann und soll, und daher der alten Frage nach dem Wesen der Wahrheit die nach dem Ziel der Wahrheitskonvention vorangehen muß, ist bis jetzt nur von sehr wenigen Philosophen betont worden" (S. 149 f.). M. macht hier als pragmatistischen Gesinnungsverwandten nur Nietzsche namhaft (und zitiert den Anfang von dessen *Jenseits von Gut und Böse)*; er hätte aber, um von anderen Pragmatisten abzusehen, namentlich bei F. S. C. Schiller, und unter modernen Mathematikern-Philosophen z. T. auch bei H. Dingler Verständnis gefunden.

Eines aber bedarf es für M. noch, um seine Auffassung endgültig zu rechtfertigen: der Erklärung, wie denn „eine nicht mathematisch-notwendige Wirklichkeit auf uns den Eindruck einer mathematischen Regelmäßigkeit machen kann[15]). Nicht den leichtesten Teil einer solchen »Erklärung« wird die Analysierung des »Widerspruchs« als psychologischer Erscheinung bilden". — M. selbst aber gibt uns diese geforderte Erklärung nicht; er spricht nur von seiner Erwartung bezw. Annahme, „daß eine solche Durchführung der symbolischen (d. h. offenbar der logistischen), sowie der relativistischen (d. h. besser gesagt, der pragmatistischen) Auffassung der »reinen« und »angewandten« Mathematik bis zur gegenseitigen Verschmelzung . . . gelingen wird." (S. 153 f.)

Eine knappe Zusammenfassung seiner Gedanken gibt M. selbst in *Mathesis en mystiek* (S. 99, bezw. eine Übersetzung derselben in seinem Selbstreferat (s. o.): „Die Mathematik ist die kodifizierte Sprache des Besonderen, des Indikativen: der Bewußtseinsinhalte: die Mystik diejenige des Allgemeinen, des Emotionellen: der Seelenbewegungen. Beide aber sind inhalts-

---

[15]) Nach einem Vergleich mit dem oben von M. über „Wirklichkeit - an - sich" Gesagten, s. S. 10, müßte man glauben, dieser Eindruck entstehe für M. eben dadurch, daß der Verstand der „Natur" seine Gesetze vorschreibe.

leer, solange die erstere sich auf das Besondere, die zweite auf das Allgemeine beschränkt. Das abstrakteste mathematische Theorem kann nicht formuliert werden, ohne den lebendigen Adam mit in Betracht zu ziehen, der die Geistesdinge benennt in der Absicht, sie zu beherrschen, und das abstrakteste Glaubensdogma umfaßt in seinen Prämissen dieselben Geistesdinge und dieselbe Absicht." — Dies ist ein Satz, der wörtlich auch in F. S. C. Schillers *Formal Logic* (1. Aufl. 1912, 2. Aufl 1930) stehen könnte, zum mindesten in geradezu idealer Weise dem Schillerschen Standpunkte entspricht. Von dieser Wendung abgesehen, wird m. E. durch Vorstehendes die eigentliche Stellung M.s kaum klarer, denn der Beginn des Resumés bedürfte selbst erst eines Kommentars. Die ausführlichere Würdigung des an Unausgeglichenheiten reichen Werkes aber rechtfertigt sich an dieser Stelle, wie ich glaube, dadurch, daß erstens nicht nur neupositivistische Ansichten darin vorweggenommen, sondern offenbar auch der Neupositivismus (wenigstens bei Hahn) davon beeinflußt erscheint, daß es ferner den originellen Versuch eines Brückenschlages vom Logizismus, bisher der vorherrschenden Philosophie der Mathematik des Wiener Kreises, zum Intuitionismus macht, während z. B. Schlick das Heil in einer (erhofften) Verbindung des ersteren mit dem Formalismus Hilberts gesehen hatte, und endlich, daß es wie von selbst zur Erörterung der weit klarer geschriebenen, jüngst veröffentlichten Philosophie der Mathematik Friedr. Waismanns hinüberleitet, eines Schülers Schlicks (und wohl auch Hahns), der gleichfalls stark vom Intuitionismus beeinflußt ist.