

Zur neupositivistischen Philosophie der Mathematik.

Von Arnulf Molitor.

(Fortsetzung.)

2. Hans Hahn und die logizistische Grundlegung der Mathematik.

Von der Grundlegung der Mathematik fordert Hahn vor allem, daß sie dartue, wieso die Anwendung der Mathematik auf die gegebene Wirklichkeit mit dem empiristischen Standpunkt verträglich ist¹⁾. Diesen Nachweis erbringt aber gerade der Logizismus, d. h. die Auffassung, die die (reine) Mathematik als einen Teil der Logik betrachtet, bezw. jene in diese ausklingen läßt. Denn die Logik, die für Hahn überhaupt erst durch die Sprache entsteht (L. M. N., S. 10), sagt über die Welt der Erfah-

¹⁾ H. Hahn (gest. 1934 als o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Wien) kann insofern als der Begründer des (neupositivist.) „Wiener Kreises“ angesehen werden, als er seinerzeit die Berufung M. Schlicks auf die verwaiste Lehrkanzel Ernst Machs veranlaßte, wodurch wiederum in weiterer Folge die Habilitation R. Carnaps ermöglicht bezw. begünstigt wurde. Seine Anschauungen betreffend die Philosophie der Mathematik hat Hahn vor allem in der Schrift „*Logik, Mathematik und Naturerkennen*“ „Einheitswissenschaft“, Heft 2, Verlag Springer, Wien 1933) — im folgenden kurz zitiert als „L. M. N.“, und in der am 7. September 1930 in Prag stattgefundenen Diskussion der Grundlagen der Mathematik (abgedruckt in der „*Erkenntnis*“, Jahrg. 1931, S. 135 ff.) zur Darstellung gebracht (hier kurz als „Disk.“ angeführt.) Ferner kommen in Betracht: die Anmerkungen (Hahns) zu den von ihm im Verein mit A. Höfler neu herausgegebenen „*Paradozien des Unendlichen*“ von B. Bolzano, „*Die Bedeutung der wissenschaftlichen Weltauffassung insbesondere für Mathematik und Physik*“ („*Erkenntnis*“ Bd. 2, 1931), „*Die Krise der Anschauung*“ (in „*Krise und Neuaufbau in den exakten Wissenschaften*“, 5 Wiener Vorträge, Verl. Springer, 1933), und „*Gibt es Unendliches?*“ (in „*Alte Probleme und neue Lösungen in den exakten Wissenschaften*“, 5 Wiener Vorträge, Verl. Springer, 1934). — Eine allgemeine Würdigung seines Schaffens gibt K. Mayrhofer in den „*Monatsh. f. Math. u. Phys.*“, 1934, S. 221 ff.

rung, der Wirklichkeit gar nichts aus, handelt überhaupt nicht von irgendwelchen Gegenständen, sondern nur von der Art, wie wir darüber sprechen. Daraus ergibt sich nun zweierlei: 1) daß diese Auffassung der Logik und gerade sie — und mit ihr sowohl die logistische Begründung der Mathematik wie deren Anwendbarkeit — mit dem empiristischen Standpunkt von vornherein verträglich ist, da etwaige Kollisionen gleichsam per definitionem ausgeschlossen werden, und 2) daß die logischen (und mathematischen) Sätze allgemein gültig oder besser gesagt, unwiderleglich sind²⁾. Letzteres, weil die Grundsätze der Logik in ähnlicher Weise Verabredungen darstellen, wie etwa die Benennungen von Pflanzen, Tieren, Farben und dgl. Wir lernen wie durch Dressur, gewissen Gegenständen die Bezeichnung „rot“ beizulegen, und treffen die Vereinbarung, jeden andern Gegenstand „nicht-rot“ zu nennen. Diese ist es dann, die es uns gestattet, mit absoluter Sicherheit den Satz auszusprechen: „Keinem Gegenstand wird sowohl die Bezeichnung „rot“ als auch die Bezeichnung „nicht-rot“ beigelegt,“ — oder kurz: „Kein Gegenstand ist sowohl rot als nicht-rot“ — i. e. der Satz vom Widerspruch. Aus unserer Vereinbarung folgt aber auch ebenso und mit der gleichen Sicherheit: „Jedem Gegenstand wird entweder die Bezeichnung „rot“ oder die Bezeichnung „nicht-rot“ beigelegt: oder kurz: „Jeder Gegenstand ist entweder

²⁾ Das gilt aber, wie Hahn ausdrücklich bemerkt, nicht für den realistischen Logizismus B. Russells, für den die logischen Axiome sehr wohl Aussagen auch über die Welt der Wirklichkeit bedeuten, was einem konsequenten Empirismus widerspreche. L. Wittgensteins und der Intuitionisten Kritik am Standpunkte Russells sei daher sachlich berechtigt. — Was Hahn als (konsequenten, wahren) „Empirismus“ erklärt, darf nicht mißverstanden werden: „Wir glauben, daß nur die Erfahrung, nur die Beobachtung uns Kenntnis vermitteln von den Tatsachen, die die Welt bilden, während das Denken nichts ist als tautologisches Umformen. — Mit dieser Auffassung des Denkens stehen wir im Gegensatz nicht nur zum Rationalismus und Dualismus, sondern auch zu der Auffassung einiger Empiristen, welche glaubten, Logik (und Mathematik) aus der Erfahrung herleiten zu können, indem sie lehrten, die Sätze der Logik und Mathematik drückten Erfahrungstatsachen aus, — nicht anders als etwa die der Physik —, nur daß es sich dabei um besonders häufig gemachte Erfahrungen handle, wodurch diese Sätze einen besonders hohen Grad von Sicherheit erlangt hätten.“ („Die Bedeutung der wiss. Weltauffassung“ etc., S. 97. — Von mir gesperrt. M.)

rot oder nicht-rot — der Satz vom ausgeschlossenen Dritten. Diese beiden Grundsätze der Logik sagen aber gar nichts über irgendwelche Gegenstände, ob sie rot oder nicht-rot sind, sondern nur, wie wir ihnen diese Bezeichnungen beilegen, wie wir über sie sprechen wollen. Aber auch solche Sätze wie „Kein Gegenstand ist (zur gleichen Zeit und an derselben Stelle) sowohl blau als gelb“ drücken kein wirkliches Wissen a priori über das Verhalten von Dingen aus, kein Wissen, das wir a priori durch „Wesensschau“, durch Erfassen des Wesens der Farben erhalten. Gewiß kann zwar da mit völliger Sicherheit vor aller Beobachtung behauptet werden, daß keine Wahrnehmung einen solchen Gegenstand aufweisen wird, dennoch besagt auch jener Satz gar nichts über Gegenstände, sondern handelt nur davon, wie wir über sie zu sprechen übereingekommen sind. Denn wenn wir ihnen einmal die Farbbezeichnungen zuweisen bzw. zugewiesen haben, so können wir vor aller Erfahrung ganz unbedenklich sagen: Keinem Gegenstand wird dabei sowohl die Bezeichnung „blau“ als auch die Bezeichnung „gelb“ zugewiesen i. e.: Kein Gegenstand ist sowohl blau als gelb, — und zwar deshalb ganz unbedenklich, weil wir diese Zuweisungen eben so eingerichtet haben³⁾. Daß es sich hier um bloße Festsetzungen über den Gebrauch der Farbwörter, um eine „Syntax der Farbwörter“ (Wittgenstein) handelt, kann man sich daran klar machen, daß an sich auch eine andere Art ihrer Verwendung denkbar wäre. Man wird vielleicht von einem gelbgrünen Gegenstand sagen, er sei sowohl gelb als auch grün, bei Tönen (z. B. Dreiklängen) ist eine analoge Sprechweise sogar allgemein üblich. Trotzdem wäre es durchaus möglich, für jeden Akkord eine eigene Bezeichnung festzusetzen und dann von vornherein zu behaupten: „Die Töne c und e können niemals gleichzeitig gehört werden“⁴⁾. — Ein Beispiel eines Satzes dagegen, der wirklich über Gegensätze selbst spricht, ist das folgende: „Wenn Du dieses Stück Eisen auf 800 erhitzest, wird es rot, auf 1300 erhitzt, jedoch weiß werden.“ Hier erfolgt die Zuweisung von Tempera-

³⁾ Hahn verwendet in seinem Beispiele die Bezeichnungen „blau“ und „rot“; aus Gründen, die später ersichtlich werden, wurde hier eine Aenderung getroffen. — Vgl. u. S. 67.

⁴⁾ Hier hinkt schon der Vergleich mit „blau“ und „gelb“. Man könnte derartiges vielleicht behaupten, aber nicht, ohne die Tatsache des gleichzeitigen Hörens von c und e zu vergewaltigen. Man kann aber niemals Blau und Gelb wirklich gleichzeitig und an derselben Stelle sehen.

turbezeichnungen an die Gegenstände unabhängig von den Farbbezeichnungen, während oben diese letzteren in Abhängigkeit von einander den Gegenständen zugewiesen wurden. Weil oder indem der in Frage stehende Satz von einander unabhängig gegebene Bezeichnungen in Beziehung setzt, sagt er tatsächlich über das Eisen etwas aus und ist eben deshalb nicht (a priori) sicher, sondern (im Prinzip) durch Beobachtung widerlegbar.

Solche Sätze nun, die lediglich eine Abhängigkeit in der Zuweisung von Bezeichnungen an Gegenstände ausdrücken, nennt Hahn tautologisch. (In diesem Sinne sei auch der Satz „Kein Gegenstand ist . . . sowohl gelb als auch blau“ tautologisch.) Gewöhnlich wird allerdings nach dem Vorgang Wittgensteins) dieses Wort in einem engeren Sinne gebraucht, nämlich für Sätze verwendet, die durch ihre bloße Form wahr sind⁵⁾.

Aber nicht nur die Grundprinzipien, sondern auch alle übrigen Sätze der Logik sind (offenbar in jenem weiteren Sinne Hahns) tautologisch. So z. B. ist die Verabredung über den Gebrauch der Wörter „nicht“ und „oder“ derart getroffen, daß durch die beiden Aussagen „Der Gegenstand A ist rot oder blau“ und „Der Gegenstand A ist nicht-rot“ schon mitgesagt ist: „Der Gegenstand A ist blau“. Und hier offenbart sich schon das Wesen des logischen Schließens. Dieses beruht also keineswegs darauf, daß zwischen Sachverhalten ein realer Zusammenhang besteht, es hat vielmehr mit dem Verhalten der Gegenstände überhaupt nichts zu tun, sondern fließt aus der Art, wie wir über die Gegenstände sprechen. Wer es nicht anerkennen wollte, hat nicht etwa eine andere Meinung über das Verhalten der Gegenstände, sondern er weigert sich, über Gegenstände nach denselben Regeln (wie Hahn) zu sprechen. Die Leistung des logischen Schließens besteht also, kurz gesagt, darin, daß es uns dessen bewußt macht, was wir unbewußt und implizite mitbehauptet haben. („L. M. N.“ S. 14—17.)

Ein Gleiches gilt aber auch für die Sätze der Mathematik. Auch sie sind tautologisch (schon im weiteren Sinne, s. o.), d. h. sie handeln nur von der Art, wie wir über die Gegenstände sprechen sollen. Daß wir dennoch Logik und Mathematik treiben, daß deren Ergebnisse für uns wertvoll sind, beruht darauf, daß

⁵⁾ „Wittgenstein war es, der als erster die Bedeutung . . . des Begriffes „tautologisch“ . . . auseinandersetzte und dadurch entscheidend in die Entwicklung der hier vorgetragenen Gedankengänge eingriff.“ („L. M. N.“ S. 14.)

wir nicht allwissend sind, daß wir nicht sofort übersehen, was wir mit unseren Sätzen behaupten. (L. c. S. 17. — Z. B.: Wir übersehen nicht sofort, daß $24 \cdot 31 = 744$ ist.) Man hat sich natürlich lange gegen diese radikale Auffassung vom Wesen der Mathematik gesträubt, und es ist übrigens (wie Hahn ausdrücklich einräumt) auch heute noch der strikte Nachweis des tautologischen Charakters der Mathematik keineswegs in allen Punkten erbracht. (Obwohl es sich hier also um ein mühevolleres und schwierigeres Problem — nicht um eine endgültige Lösung — handelt, zweifelt indes Hahn nicht, daß diese seine Ansicht ihrem Wesen nach zutreffend sei (L. c. S. 17).) Daß wenigstens die Sätze der finiten Arithmetik den nämlichen tautologischen Charakter haben wie die der Logik, ist auf jeden Fall leicht einzusehen, man hat zu diesem Zwecke nur auf die Definitionen ihrer Symbole zurückzugehen. Nicht so klar aber ist das hinsichtlich der transzendenten Schlußweise, (der sog. vollständigen Induktion, Mengenlehre, etc.). Hier scheinen nicht-tautologische Grundsätze eine Rolle zu spielen, z. B. scheint das Auswahlaxiom⁶⁾ etwas Reales über die Welt auszusagen, — wenigstens für B. Russell, — dessen realistischen Standpunkt Hahn als nicht-empiristisch ablehnt („Disk.“ S. 138. — Vgl. auch o. Fußnote 1). Indessen hält er doch die formale Seite der „*Principia Mathematica*“ Russells für „größtenteils in Ordnung und zur Begründung der Mathematik geeignet“, und nur einer anderen philosophischen Interpretation bedürftig. Nehmen wir, sagt Hahn, mit Russell an, es stünde uns zur Beschreibung der Welt ein System von Aussagefunktion, von Aussagefunktionen über solche, etc., zur Verfügung⁷⁾, so wird diese

⁶⁾ A. Fraenkel formuliert dieses in seiner bekannten „*Einleitung in die Mengenlehre*“ S. 283 wie folgt: » M sei eine Menge, deren Elemente (wiederum) sämtlich mindestens je ein Element enthalten und überdies paarweise elementenfremd sind (d. h. keine gemeinsamen Elemente aufweisen.) Dann existiert mindestens eine Menge $S \dots$, die mit jedem Element (von) M gerade ein einziges Element gemein hat, aber keine anderen Elemente besitzt. Jede derartige Menge S wird eine Auswahlmenge von M genannt.«

⁷⁾ „Aussagefunktionen“ sind Satzrudimente mit Leerstellen die aus wirklichen Aussagen durch Leerlassen der Stellen von Satzteilen hervorgehen. So z. B. geht aus der Aussage „Berlin ist eine Großstadt“ die Aussagefunktion „... ist eine Großstadt“ hervor, die je nach der Besetzung der Leerstelle zu einer wahren, falschen oder sinnlosen Aussage ergänzt werden kann.

Beschreibung verschieden ausfallen je nach der Reichhaltigkeit dieses Systems. Die ganze Mathematik entsteht nun durch die tautologische Umformung der an die Reichhaltigkeit des Systems gestellten Forderungen, die man Axiome nennen kann; die Frage nach ihrer absoluten Gültigkeit ist sinnlos. Ein derartiges System von Aussagefunktionen ist nun weder im realistischen Sinne (Russells), noch im empiristischen Hahns, noch im konstruktiven der Intuitionisten (Brouwers, Weyls, u. a.) aufweisbar, ebensowenig wie etwa dasjenige der euklidischen Punkte, Geraden und Ebenen, — aber trotzdem sehr nützlich zur Beschreibung der Welt, wenn nur dessen Widerspruchslosigkeit vorausgesetzt werden darf (womit Hahn den Anschluß an Hilbert gewonnen haben will, s. „Disk.“ S. 138/139). — „Was bedeutet (nun),“ fragt sich Hahn an der zitierten Stelle, „in der sogenannten Analysis die Existentialbehauptung?“, — und beantwortet seine Frage dahin, daß letztere die Bedeutung einer „Warn Tafel“ habe: „Suche nicht das Gegenteil zu beweisen!“ In der letzten vor seinem Tode erschienenen Abhandlung („Gibt es Unendliches?“) untersucht er jedoch Sinn und Bedeutung von „Es gibt . . .“ in der Mathematik viel genauer und unterscheidet diesbezüglich drei verschiedene Standpunkte:

1) den realistischen oder Platon'schen, d. h. die Objekte der Mathematik haben reale Existenz in einer Welt der Ideen, die keineswegs identisch mit der physischen Welt (ihrem unvollkommenen Abbild) ist; einem mathematischen Begriff kommt Existenz zu, wenn ihm ein reales Objekt in der Welt der Ideen entspricht; ein mathematischer Satz ist wahr, wenn er das reale Verhalten der entsprechenden Objekte in der Ideenwelt richtig wiedergibt.

2) Den intuitionistischen oder Kant'schen, dem zufolge wir eine „reine Anschauung“ haben und die Mathematik Konstruktion in reiner Anschauung ist. Einem mathematischen Begriff kommt Existenz zu, wenn er in dieser reinen Anschauung konstruierbar ist. Es handelt sich dabei um die philosophische Formulierung populärer Sätze wie etwa: „Wenn es schon in der physischen Welt keine genauen Würfel gibt, so kann ich mir doch solche wenigstens vorstellen.“

3) Den logizistischen oder nominalistischen, dessen Wurzeln sich historisch bis zu der „Nominalistenschule der scholastischen Philosophie“ verfolgen lassen. („Gibt es Un-

endliches?“ (S. 93 f.) Ihm gemäß ist die Mathematik eine rein logische Disziplin, spielt sich durchaus innerhalb der Sprache ab und hat mit Realität und „reiner Anschauung“ gar nichts zu tun, sondern handelt lediglich vom Gebrauch von Zeichen und Symbolen, die wir nach von uns selbst gestellten Regeln verwenden, denen wir dann aber niemals widersprechen dürfen. Letztes Kriterium der mathematischen Existenz ist also die Widerspruchsfreiheit.

Nun ist der realistische Standpunkt unhaltbar, weil er dem Denken Fähigkeiten zuschreibt, die es nicht besitzt, denn es besteht in tautologischen Umformungen; zum Erfassen einer Realität ist es außerstande.

Ebenso aber ist auch der intuitionistische Standpunkt unhaltbar, denn eine „reine Anschauung“ gibt es überhaupt nicht. Neuere Anhänger desselben gehen zwar nicht so weit wie Kant, aber es besteht keine Einigkeit unter ihnen. Manche Intuitionisten erklären, daß wohl beliebig große natürliche Zahlen in „reiner Anschauung“ konstruierbar wären, nicht aber die Menge aller natürlichen Zahlen, und leugnen somit die Existenz unendlicher Mengen. Andere wollen zwar auch diese Menge aller natürlichen Zahlen in reiner Anschauung konstruieren, aber keine un abzählbar⁸⁾ unendliche Menge, sie behaupten also die Existenz abzählbarer unendlicher Mengen und leugnen die der unabzählbar unendlichen (insbesondere der Menge aller reellen Zahlen) u. s. w.

Es erübrigt also nur der logizistische Standpunkt, für den die Existenz unendlicher Zahlen bzw. Mengen mit dem widerspruchsfrei möglichen Operieren mit denselben zusammenfällt. Wie steht es nun aber mit dieser Widerspruchsfreiheit? In der Tat sind Widersprüche bei gewissen allzu umfassenden Mengenbildungen (wie der „Menge aller Mengen“) aufgetreten, aber deren Quelle lag nicht im Un-

⁸⁾ „Abzählbar“ heißt eine unendliche Menge, wenn ihre Elemente (umkehrbar-eindeutig) denen der Reihe der natürlichen Zahlen zugeordnet werden können; „un abzählbar“, wenn das nicht der Fall ist, wenn also (wie z. B. bei der Menge aller reellen Zahlen) bei dieser versuchten Zuordnung Glieder der zu prüfenden Menge sozusagen übrig bleiben. — Die Reihe der geraden Zahlen beispielsweise ist abzählbar, denn es läßt sich die folgende Zuordnung herstellen:

1, 2, 3, 4, 5,

2, 4, 6, 8, 10,

endlichkeitsbegriff als solchem, sondern in gewissen Mängeln der klassischen Logik, vor allem in einer unvorsichtigen Verwendung des Wortes „alle“ (deren Behebung zur Russell'schen „Typentheorie“ geführt hat). Im heutigen Aufbau der Mengenlehre ist ein Widerspruch nicht bekannt. Nun folgt daraus natürlich noch nicht, daß ein solcher niemals entdeckt werden wird, nicht vorhanden ist; aber ein absoluter Beweis der Widerspruchsfreiheit ist, wie Hahn im Anschlusse an Menger⁹⁾ offen einräumt, niemals möglich; jeder solche Beweis ist notwendig relativ, und kann nur die Widerspruchsfreiheit eines Systems auf die eines anderen zurückführen. Der logizistische Standpunkt wird aber dadurch noch durchaus nicht illusorisch gemacht, denn es gibt auf keinem Gebiete absolut gesichertes Wissen; ein solches gewährt nicht einmal die sog. Evidenz der inneren Wahrnehmung. Indem ich z. B. den Satz „Ich sehe jetzt weiß“ formuliere und statuiere, kann ich (prinzipiell wenigstens) nie wissen, ob in der noch so kurzen verflossenen Zeit mich mein Gedächtnis nicht getäuscht hat. Einen absoluten Beweis der Widerspruchsfreiheit gibt es also nicht einmal für die Arithmetik der endlichen Zahlen, ja nicht einmal für die einfachsten Teile der Logik („Gibt es Unendliches?“ S. 102—108).

Wenn aber unser Denken nichts vermag als Gesagtes tautologisch umzuformen, so kann es auch in keiner Weise hinter die durch Beobachtung erfaßte Welt der Sinne zu einer Welt des „wahren Seins“ vorstoßen, das wäre ein Verstoß gegen die Vereinbarung, wie wir sprechen wollen. Damit wendet sich Hahn wieder zur Anwendung der Logik und Mathematik auf die Naturwissenschaft. Es ist nicht so, daß wir der Erfahrung die Gültigkeit gewisser Naturgesetze entziehen, und dann, da unser Denken (angeblich) die allgemeinsten Gesetze des Seins erfasse, schon wüßten, daß alles, was aus jenen Naturgesetzen durch logisches und mathematisches Denken folgt, sich verwirklicht finden müsse, denn unser Denken hat mit den Seinsgesetzen eben nichts zu tun. Dem widersprechen auch keineswegs die mit Vorliebe ad hoc angeführten mathematischen Vorausberechnungen naturwissenschaftlicher Tatsachen. Leverriers bekannte Errechnung des Planeten Neptun z. B. brachte uns nur zu Bewußtsein, daß durch das Gravitationsgesetz etc. das Erscheinen eines bis dahin unbekanntem Planeten zu einer bestimmten Zeit und

⁹⁾ Vgl. Karl Menger „Die neue Logik“, S. 119, (in „Krise und Neuaufbau der exakten Wissenschaften“, 1933.).

an einer bestimmten Stelle mitausgesagt wird. In der Tat hat sich hier die Hypothese des Gravitationsgesetzes bewährt. Aber nicht die Rechnung hat ergeben, daß dieser Planet vorhanden ist, sondern das Hinschauen, die Beobachtung hat dies ergeben. Sie hätte auch ebenso gut anders ausfallen können; wäre z. B. an der betreffenden Stelle nichts zu sehen gewesen, dann hätte sich eben das Gravitationsgesetz nicht bewährt. In der Tat zeigten spätere Beobachtungen den Merkur nicht genau an der vorberechneten Stelle, und die Gravitationstheorie wurde von Einstein modifiziert, berichtigt. Unsere sog. Naturgesetze sind überhaupt keine strengen, absoluten, eigentlichen Gesetze, sondern wir wissen von keinem einzigen solchen Gesetz, daß es gilt; sie sind vielmehr Hypothesen, die wir versuchsweise aussprechen, wobei wir zugleich implizite viele andere Sätze mitaussprechen, welche uns bewußt zu machen dann Aufgabe unseres Denkens ist. Insolange nun diese mitausgesprochenen Sätze (sofern sie von unmittelbar Beobachtbarem handeln) durch die Beobachtung bestätigt werden, bewähren sich die Naturgesetze, und halten wir an ihnen fest; wenn aber nicht, dann bewähren sie sich eben nicht und werden durch andere ersetzt. (L. M. N. S. 19.) In derartiger Bewährung — nicht in einer doch gar nicht feststellbaren Uebereinstimmung mit der Realität — besteht auch für Hahn — der sich damit ausdrücklich zum Pragmatismus bekennt⁴⁰⁾ — die Wahrheit von Sätzen, die auf diese Weise

⁴⁰⁾ Hahn erwähnt hier J. Deweys „*Studies in logical theory*“ und W. James's „*Pragmatism*“ als die Standardwerke des Pragmatismus. Er vermag sich aber insofern nur zum geringen Teile auf die genannten Autoren zu berufen, als James eingeständenermaßen der Mathematik möglichst ferne steht und auch Dewey sich mit dieser Wissenschaft nicht beschäftigt (zum mindesten nicht in dem angeführten Werke.) Immerhin hätte Hahn eine teilweise Bundesgenossenschaft bei einem anderen Pragmatisten, nämlich F. S. C. Schiller gefunden, der — allerdings offenbar ohne tiefere und eingehendere mathematische Fachkenntnisse — in seiner „*Formal Logic*“ (1. Aufl. 1912, 2. fast unveränderte Auflage 1930) wiederholt auf diese Fragen zu sprechen kommt. Für Schiller sind die logischen Grundprinzipien weder solche des Seins noch des Denkens, sondern Forderungen, die sich nicht auf Dinge noch auf Gedanken, sondern auf Worte beziehen und daher von der Erfahrung unabhängig erscheinen (l. c. S. 117—135). Ueberhaupt sollte . . . „*Formal Logic* . . . openly confess that it is dealing only with forms of speech“. Soweit wäre also die Uebereinstimmung recht weitgehend. Aber andererseits sind für Schiller diese „Forderungen“ doch — was er zwar nicht direkt

allerdings ihres absoluten Charakters entkleidet, relativiert, vermenschlicht, aber gleichzeitig dadurch (eben dadurch) erst anwendbar wird. (Wäre sie letzteres nicht, so könnte sie überhaupt keinen Zweck erfüllen.)

Die im Vorstehenden kurz entwickelte Philosophie der Mathematik und die Logik Hahns führen aber bei ihm¹¹⁾ zu Konsequenzen, die über die genannten Sachgebiete hinaus von Interesse sind. Durch eine solche Auffassung soll, wie bereits erwähnt, ein wirklich konsequenter Empirismus erst möglich geworden sein. Was ist aber unter solchem „konsequenten“ Empirismus — zum Unterschied von sonstigem, minder konsequentem — zu verstehen? Frühere Empiristen — vor allem E. M a c h — betrachteten nur solche Sätze als wissenschaftlich, als legitim, die (wenigstens prinzipiell) durch Beobachtung bestätigt oder widerlegt werden können, in denen also nur Terme auftreten, die aus Beobachtbarem konstituierbar sind; Sätze über Moleküle, Atome etc. gelten ihnen als „metaphysisch“, hatten kein Bürgerrecht in der Wissenschaft. Aber L. B o l t z m a n n hat bekanntlich entschieden gegen diesen Standpunkt Stellung

sagt — insofern auch Aussagen über die Welt, die Dinge, als es Naturtatsachen gebe, auf denen sie beruhen, nämlich . . . „that there are distinguishable objects and incompatibilities of existence, and an immediately experienced difference of attitude between affirmation and denial, which is a psychical fact.“ Vor allem aber steht Schiller als Psychologist dem Logizismus schroff ablehnend gegenüber: „. . . Judgment is not a matter of „knowledge“, and is strictly extra-logical . . . It is a mistake to reduce ideas to words . . .“, usw. (Vgl. l. c. S. 88 ff und viele andere Stellen.) Schiller betont ausdrücklich — im vollendetsten Gegensatz zu Hahn — die logische Bedeutsamkeit sachlicher Kenntnis (l. c. S. 262), und sein ganzes in Rede stehendes Werk ist im wesentlichen eine verhöhrende Kritik dessen, was er unter „Formal Logic“ versteht, (und was sich allerdings nicht ganz mit der formalen Logik im Sinne Hahns und der Logistiker deckt.) Last not least ist Schillers Empirismus weit radikaler als der Hahns: . . . „If experience were to change so that it not longer presented us with countable things, the principles of arithmetic would gradually lose their meaning.“ (l. c. S. 249) . . . „Experience is always relevant to reasoning, not only in „induction“, but even in mathematics“. (2. Aufl. S. 249) — Dies zur Erläuterung der Beziehungen Hahns zum Pragmatismus.

¹¹⁾ D. h. in seiner Darstellung. In Wirklichkeit ist vielleicht seine Philosophie der Mathematik und seine Auffassung der Logik vielmehr Konsequenz einer instinktiven positivistischen Weltauffassung bzw. Grundeinstellung.

genommen, und der Neopositivist Hahn glaubt sich mit ebenso großer Entschiedenheit gegen Mach auf Boltzmanns Seite stellen zu müssen. Denn die Wissenschaft ist überreich an Sätzen, die prinzipiell nicht durch Beobachtung bestätigt (bzw. widerlegt) werden können, weil sie unkonstituierbare Terme enthalten. In der mathematischen Physik wird die Stelle jedes Ereignisses in Raum und Zeit festgelegt gedacht durch die Angabe von Zahlen (Koordinaten) — was schon prinzipiell über jede Beobachtungsmöglichkeit hinausgeht, ebenso wie die elektromagnetischen Vorgänge, die in den leeren Raum verlegt werden. Jeder Vorgang wird irgendwie dadurch gestört, daß man ihn beobachtet, die Physik aber spricht vom ungestörten Vorgang, — und daß das nicht eine bloße Spitzfindigkeit, sondern von prinzipieller Bedeutung ist, wird durch die neueste Entwicklung der Physik in klares Licht gerückt¹²). Auch das Wort „alle“ (dessen unvorsichtiger Gebrauch der älteren Logik, Logistik und Philosophie der Mathematik so viel zu schaffen machte, s. o.) und das doch irgendwie (wenigstens implizite) in jedem Naturgesetz auftritt, ist — abgesehen von dem Falle, wo die unter „alle“ verstandenen Individuen aufzählbar sind — ein solcher unkonstituierbarer Term, dem nichts Beobachtbares entspricht, — und damit ist schon gesagt, daß Naturgesetze überhaupt prinzipiell nicht durch Beobachtungen bestätigbar sind. (Wittgenstein erklärt sie daher für „sinnlos“. — M.) Sie sind aber deshalb durchaus nicht unwissenschaftlich und bleiben durchaus „legitim“, sind nicht „metaphysisch“, wenn nur solchen eingeführten unkonstituierbaren Termen jedesmal eine Gebrauchsanweisung mitgegeben werden kann, d. h. Regeln, wie mit ihnen zu operieren ist, wie Sätze, in denen sie auftreten, in andere Sätze transformiert werden sollen, in denen schließlich kein unkonstituierbarer Term mehr vorkommt, die vielmehr durch Beobachtung unmittelbar bestätigt (widerlegt) werden können¹³). Fehlt eine solche Gebrauchsanweisung, oder reicht

¹²) Gemeint ist die „Unbestimmtheitsrelation“ Heisenbergs.

¹³) Bei dieser unmittelbaren Bestätigung (Widerlegung) spielen diejenigen Sätze eine wichtige Rolle, die Carnap und Neurath als „Protokollsätze“ bezeichnet haben, und auf die alle Systemsätze der Wissenschaft zurückführbar sind (und bezüglich derer — was Hahn allerdings nicht sagt — größte Unklarheit und Meinungsverschiedenheit auch in neopositivistischen Kreisen besteht.)

sie nicht aus, dann treibt man freilich Metaphysik (die auch Hahn für „sinnleer“ hält), dann nimmt man (wie das Hahn mit einer James entlehnten Wendung ausdrückt) nichtgedecktes Papiergeld an Zahlungs Statt („L. M. N.“ S. 23.)

Wenn wir nun versuchen, zu diesem in Kürze wiedergegebenen Standpunkte Hahns Stellung zu nehmen, so begegnen wir gleich zu Beginn seiner Entwicklungen einem für diese fundamentalen Satze, der nicht unwidersprochen bleiben darf: „Die Logik entsteht erst durch die Sprache.“ Wäre es so, dann erschiene allerdings seine weitere Behauptung, daß Sätze der Logik in keiner Hinsicht Behauptungen betreffend irgendwelche Gegenstände (der Wirklichkeit) enthalten, sehr verständlich, wenn auch u. E. noch nicht zwingend gefordert. Daß sich das aber so verhält, versucht Hahn, soviel wir zu sehen vermögen, gar nicht zu begründen, sondern stellt es dogmatisch als eine ihm evidente Aussage auf. Er meint damit offenbar viel mehr als die bescheidenere Behauptung, daß eine Wissenschaft der Logik nicht ohne Sprache (im weitesten Sinne des Wortes, Gebärden und graphische Zeichen einschließend) möglich wäre, — mag dabei nun Logik als „Wissenschaft vom Denken“, „von den formalen Gesetzen des Denkens“ oder wie immer definiert werden. Aber auch wenn wir von der Erklärung der Logik als einer Wissenschaft absehen und sie etwa als die „Kunst des Denkens“, der „Vermeidung des Irrtums“, oder als „Tat, die in der (bewußten) Entwicklung einer schlummernden Fähigkeit besteht“, verstehen wollen, werden wir die Ansicht Hahns nicht befriedigend finden, denn die zugegebene Unmöglichkeit solcher Wissenschaft, „Kunst“ oder — klar bewußten — „Tat“ ohne die Sprache beweist noch durchaus nicht, daß „logisches“, i. e. richtiges Denken als solches (oder der Anstoß zur Entwicklung der Fähigkeit hierzu) erst durch die Sprache entsteht. Es gibt im Gegenteil auch vollbewußte Begriffsbildung ohne jegliche (Wort-, graphische Zeichen-, etc.) Sprache, es gibt sprachfreies Denken. Ein Zirkel etwa, wie gewöhnlich gehandhabt, kann im Verein mit unseren gleichzeitigen Bewegungs- und Gesichtsempfindungen die Phantasievorstellungen von mannigfachen farbigen Kreisflächen erwecken, und ebenso kann dies schon die bloße Vorstellung eines Zirkels tun. Wir haben da einen (von A. Stöhr so genannten) „anschaulichen vollbewußten Begriff einfachsten Baus“ vor uns, d. h. einen bestimmten Fall von

Vorstellungsreproduktion, der sich durch einen beharrenden Reproduzenten — im Beispiele der Zirkel — auszeichnet. Ein solcher (vollbewußter, aber) noch unbenannter Begriff ist kein Gedankending, keine Abstraktion, keine aus Worten gebildete Definition oder dgl., sondern eine Reproduktionstätigkeit, eine Reproduktionsfunktion¹⁴⁾. — Hahns Behauptungen, in ihrer Allgemeinheit verstanden, (nicht unter Einschränkung auf die Begriffe der Mathematik, wörtliche Definitionen, für die solche reproduzierte Begleitvorstellungen höchst unwesentlich sind), also so wie sie offenbar gemeint ist, ist demnach grundfalsch. Logik, d. h. logisches Denken, entsteht nicht durch die Sprache, es ist vielmehr schon da, und man kann höchstens sagen, daß es sich seiner selbst an der Sprache klarer (und eher!) bewußt wird als ohne diese; an sich ist es aber genetisch nicht von ihr abhängig; wäre dem so, so wäre die Logik überhaupt wesensmäßig „glossomorph“¹⁵⁾. Im Gegenteil setzt die Sprache ihrerseits bis zu einem gewissen Grade das logische Denken voraus (insonderheit die wissenschaftliche).

Noch unbefriedigender erscheint uns, was Hahn im Folgenden (L. M. N. S. 11) über die „Vereinbarung“ sagt, die wir angeblich treffen. Er mag hier, bewußt oder nicht, durch den Konventionalismus Poincarés beeinflusst sein, der Postulate wie etwa „durch zwei Punkte ist eine Gerade bestimmt“ für verkappte Definitionen (der betreffenden Gebilde, hier der Geraden) erklärt. Ohne Zweifel kann man in der reinen Mathematik von derartigen Definitionen ausgehen (die nur an die Bedingung der Widerspruchsfreiheit gebunden sind, wenigstens für den Nicht-Intuitionisten) und ein formal richtiges Lehrgebäude darauf begründen. Es ist aber nicht immer ohne weiteres angängig, Betrachtungsweisen, die sich innerhalb einer Wissenschaft als fruchtbar und berechtigt erwiesen haben, unbesehen auf andere Sachgebiete einfach zu übertragen. Wer soll denn eine solche „Vereinbarung“, wie sie Hahn vorschwebt, eigentlich getroffen haben? Wenn wir selbstverständlich von der ungereimten Annahme absehen, die Urmenschheit hätte sich im Laufe des Ausbaus und der Entwicklung der Sprache zu

¹⁴⁾ Vgl. Adolf Stöhr „Lehrbuch der Logik in psychologischer Darstellung“, Wien 1910, insb. S. 8 ff und S. 65 ff.

¹⁵⁾ Wie es nach Stöhr (und anderen Autoren) die aristotelische Logik de facto ist.

einem solchen — und sei es auch nur „stillschweigenden“ — Übereinkommen bereitgefunden, so bleibt uns kein Ausweg als die Hypothese einer (wenigstens instinktiven) diesbezüglichen Konvention der Kulturmenschheit. Aber auch das wäre ein bloßes Dogma, für das nicht nur jede kulturgeschichtliche Begründung mangelt, sondern welches auch vor allem keine Antwort auf die sogleich sich erhebende Frage gibt, warum oder wozu denn eine solche Vereinbarung getroffen wurde. Der bloße Hinweis auf ihre Zweckmäßigkeit oder dgl. genügt da nicht, solange nicht auch der logische Ort dieser Zweckmäßigkeit angegeben wird, — die in der Beschaffenheit der Gegenstände selbst nach Hahn ja nicht gesucht werden darf, also auch nicht etwa in der Beschaffenheit des menschlichen Geistes, in Lebensförderung und dgl., denn auch das sind doch wohl „Gegenstände“, gehören jedenfalls nicht zur Logik im Sinne Hahn's. Entweder steht die Art und Weise, „wie wir über die Gegenstände sprechen wollen“, zu diesen in der Beziehung, die wir mit dem Worte „Wahrheit“ bezeichnen, und dann wäre zu fragen, worin denn der (nicht bloß sprachliche) Unterschied zwischen den beiden Behauptungen „Die Sätze der Logik betreffen auch die Gegenstände“ und „Sie betreffen nur die Art, wie wir darüber sprechen wollen“ eigentlich liegt; oder jene Weise steht nicht in solcher Beziehung zu ihnen, und dann müßte uns Hahn erklären, weshalb und wozu wir überhaupt über Gegenstände sprechen.

Dogmatische Behauptungen und Verkennungen des Sachverhaltes liegen auch den Ausführungen über die „Syntax der Farbbezeichnungen“ zugrunde. Wir wissen zunächst nicht, ob wir derartige „Zuweisungen“ immer und unter allen Umständen so „einrichten“ können, daß nachher alles stimmt, sich keine Unstimmigkeiten oder Widersprüche ergeben; es könnte uns doch einmal ein tückischer Gegenstand einen bösen Streich spielen, zumal wir ja „von keiner Beobachtung im vorhinein sagen können, wie sie ausfallen muß“. Wir sind also gerade auf dem Standpunkte Hahn's keineswegs dessen sicher, daß „gewisse andere Gegenstände“ immer „andere“ bleiben müssen. Es ist zwar gewiß einzuräumen, daß man (bezüglich der Farben) auch andere Festsetzungen treffen könnte. Wollte etwa jemand behaupten, im Orange (bezw. Violett) gleichzeitig sowohl Rot als Gelb (bezw. Blau) zu sehen, so wäre er wohl schwer zu widerlegen. Aber die Analogie mit dem Beispiel „Gelbgrün“, das Hahn anführt, versagt sofort, wenn man es anstatt

mit Blau und Rot mit Blau und Gelb versucht¹⁶⁾ Jedenfalls wird durch alles hier von Hahn Vorgebrachte nicht bewiesen, daß derartige Festsetzungen immer als zweckmäßige begründet sind, noch weniger aber, daß wir von vornherein dessen sicher sein dürfen, mit ihnen stets und unter allen Umständen das Auslangen zu finden. Vor allem aber übersieht er, daß die Farben(empfindungen) doch wohl selbst auch solche aus der Logik verbannte „Gegenstände“ sind (wenn er behauptet, es handle sich auch hier um von der Natur der Gegenstände unabhängige Festsetzungen, wie wir sprechen wollen. Hier sind diese Festsetzungen in der Tat von der Natur der Farbenempfindungen nicht ganz unabhängig).

Was die „tautologischen Sätze“ betrifft, so ist u. E. nicht einzusehen, wieso dadurch, daß ein Satz im engeren (Wittgenstein'schen) Sinne tautologisch ist, schon der Beweis erbracht sein soll, daß er in keiner Hinsicht eine Aussage über „Gegenstände“ mache. Hahn jedoch scheint uns das durch die Einführung bzw. Verwendung des Terminus „im weiteren Sinne tautologisch“ unwillkürlich zu suggerieren. Aber wenn das logische Schließen auch nicht auf einem realen Zusammenhang zwischen Sachverhalten beruht, kann noch nicht zwingend behauptet werden, daß es über Gegenstände überhaupt nichts, rein gar nichts aussage.

Hahn sucht den „realistischen Standpunkt“ in der Grundlegung der Mathematik durch den Hinweis zu widerlegen¹⁷⁾, daß das in tautologischen Umformungen sich erschöpfende Denken zum Erfassen einer Realität, der „Gesetze des Seins“ u. dgl. völlig außerstande sei. Daß durch diese Behauptung — wenn man nicht

¹⁶⁾ Vgl. o. S. 56. — Man könnte nicht nur in der Empfindung „Orange“ (Violett) die Empfindungen Rot und Gelb (bzw. Blau) zu finden geneigt sein, sondern auch objektiv — etwa mit Hilfe eines Farbkreisels — dafür eine Stütze bieten. Ein rotierender Farbkreis mit gelben und blauen Sektoren erzeugt aber die Empfindung Weiß, (und nicht etwa Grün). Daß gelbe und blaue Pigmente, gemischt, ein grünes Pigment ergeben, beruht darauf, daß es sich hier um sog. subtraktive Farbmischung handelt, indem die blauen und gelben Strahlen einander zu Weiß addieren, während die von den Pigmenten gleichfalls (z. T.) reflektierten grünen übrig bleiben.

¹⁷⁾ Vgl. o. S. 60. — Was aber Hahn dort vorbringt, spricht übrigens wohl dafür, daß unsere sog. „Naturgesetze“ keine strengen, absoluten, eigentlichen Gesetze sind, — aber noch lange nicht dafür, daß unser Denken nur ein System von Sprachregeln sei, ohne Bezug auf die Gegenstände.

den gewöhnlichen Sprachgebrauch willkürlich vergewaltigen will — das, was man herkömmlich unter „Denken“ versteht, ganz und gar nicht umfaßt wird, glauben wir eingangs durch das über die vollbewußte anschauliche Begriffsbildung und sprachfreie Denken Gesagte gezeigt zu haben. Soweit aber jene „Seinsgesetze“ in Betracht kommen, so setzt Hahn bei seiner Erörterung wohl implizite voraus, daß es ein vom Denken (zum mindesten von unserem) unabhängiges Sein gibt. Was das aber bedeutet, wenn unser Denken ja doch keinerlei Realität erfassen soll, ist schwer zu verstehen, auch dann, wenn wir annehmen, es erfasse nur Sein als solches, unter Absehen von allen „Seinsgesetzen“, von aller irgendwie beschaffenen Bestimmtheit, also sozusagen das bloße Sein des Seins, — denn welchen Sinn soll gerade der Neupositivist damit verbinden, er, der sonst überall geneigt ist, Sinnlosigkeiten zu sehen? — Wie immer es also mit der realistischen Grundlegung der Mathematik selbst bestellt sein mag¹⁸⁾, durch Hahns hier teils dogmatische, teils unklare, wenn nicht widerspruchsvolle Argumentationen wird sie kaum erschüttert werden.

Noch dürftiger aber ist seine versuchte Widerlegung des intuitionistischen Standpunkts¹⁹⁾; auch wenn es so etwas wie eine „reine Anschauung“ nicht gibt, so müßte das irgendwie begründet, nicht einfach dogmatisch negiert werden. Daß unter den Intuitionisten selbst keine Einigkeit herrscht, ist vollends ein argumentum ad hominem, — das man übrigens un schwer auch gegen die Logizisten geltend machen könnte, und ebenso gegen die Neupositivisten (hinsichtlich der „Protokollsätze“ vor allem).

Einleitend war bemerkt worden, daß nach Hahn die logischen und mathematischen Sätze „allgemeingültig oder besser besagt unwiderleglich“ sind. Damit ist aber seine Leugnung der Möglichkeit absoluter Beweise der Widerspruchsfreiheit schwer vereinbar. Die Widerspruchsfreiheit eines Systems kann immer nur auf die eines anderen zurückgeführt werden. Jedes solches System besteht aus Sätzen; sind dies „logische“ (= tau-

¹⁸⁾ Es soll damit nicht etwa behauptet werden, daß diese Grundlegung tatsächlich über allen Zweifel erhaben wäre.

¹⁹⁾ Andere Neupositivisten wie Friedr. Waismann nähern sich in der Tat sehr stark dem Intuitionismus in der Philosophie der Mathematik. Vgl. dessen *Einführung in das mathemat. Denken*, Wien 1936.

tologische) Sätze, so sind sie unwiderleglich, und damit ein absoluter Widerspruchsfreiheitsbeweis erbracht, da tautologische („durch ihre bloße Form wahre“) Sätze auch mit einander nicht in Widerspruch stehen können; befinden sich aber nichttautologische Sätze unter denen des Systems, auf welche diejenigen eines anderen zurückgeführt werden sollen, so ist die rein logizistische Grundlegung der Mathematik schon erschüttert, und nicht bloß „der Nachweis des tautologischen Charakters . . . noch nicht in allen Punkten erbracht“²⁰⁾.

Wichtig und interessant vor allem ist aber das unumwundene Zugeständnis, daß auch die exakte Wissenschaft — und zwar gerade die nach Hahn vollkommenste, abgeklärteste, wissenschaftlichste aller Wissenschaften, die Physik — überreich an Sätzen ist, die prinzipiell nicht durch Beobachtung verifiziert werden können, ja daß sie solche Sätze enthalten muß, denn „bei Durchführung der Forderung Mach's . . . würde . . . die ganze Wissenschaft zusammenstürzen“ (L. M. N.“ S. 22). Und dieses Zugeständnis wird — wahrscheinlich ohne daß dies in der Absicht Hahn's läge oder er sich dessen auch nur bewußt wäre —, gerade was die Metaphysik im historischen Sinne betrifft, nicht wesentlich abgeschwächt durch die Forderung einer praktischen Gebrauchsanweisung, „wie derartige Sätze in durch Erfahrung verifizierbare transformiert werden können. Dem angestrebten „konsequenten“ programmatischen Empirismus Hahn's ist also nicht so sehr seine „Konsequenz“ (gegen die, wie oben zu zeigen versucht, mannigfache Bedenken bestehen) als vielmehr sein (im Vergleich mit anderen Angehörigen des „Wiener Kreises“, wie etwa Neurath und Carnap) geringerer Radikalismus und größere Weitherzigkeit und Unbefangenheit zugute zu halten.

²⁰⁾ Wenig überzeugend ist u. E. auch das, was Hahn zum Beweise der Unmöglichkeit absolut sicheren Wissens gegen die Evidenz der Wahrnehmung vorbringt, — es mag sich mit der Sache selbst wie immer verhalten. Gewiß bezieht sich der bereits formulierte Satz »Ich sehe Weiß« streng genommen schon auf Vergangenes, und es wäre prinzipiell ein Gedächtnisirrtum möglich. Aber gegenüber der bloßen Sinneswahrnehmung „Weiß“ als solcher wird sich die Möglichkeit eines derartigen Irrtums kaum aufrecht erhalten lassen.